OBIETTIVO del CORSO

ELETTROMAGNETISMO →
- ELETTROSTATICA (CARICHE ELETTRICHE)
- ELETTRODINAMICA (CORRENTI ELETTRICHE) cariche in movimento
- MAGNETOSTATICA e MAGNETODINAMICA (Distinzione meno utile però)

IMPORTANTE: l'elettromagnetismo è uno dei primi esempi di unificazione delle leggi fisiche (o delle forze). Cioè, i fenomeni elettrici e i fenomeni magnetici, apparentemente molto diversi (governati da leggi diverse), vengono unificati attraverso le EQUAZIONI di MAXWELL.

un altro sono p.e. le leggi universali di Newton

Dunque non esistono fenomeni elettrici e magnetici separati, sono manifestazioni diverse dello stesso fenomeno fisico.

Oltre alle equazioni di Maxwell ricaveremo anche le EQUAZIONI di CONTINUITÀ che con le precedenti descrivono tutti i fenomeni elettromagnetici.

Il percorso di studio sarà svolto quasi tutto nel VUOTO. Ci saranno alcuni accenni su cosa succede in presenza della materia.

RICHIAMO MATEMATICO

NOTA L'elettromagnetismo è **TRIDIMENSIONALE** (a parte per l'elettrostatica, diversamente da quanto fatto in meccanica, non è possibile ridurre lo studio del fenomeno a 1 o 2 dimensioni).

Avremo quindi a che fare con VETTORI.

VETTORI:

$$\vec{A} = (A_1, A_2, A_3) = \{A_i\}_{i=1}^{3}$$

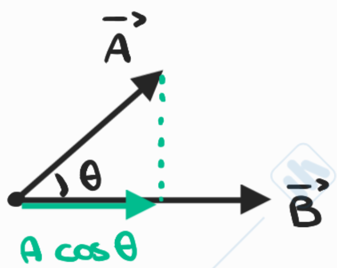
(oppure (A_x, A_y, A_z))

SOMME: Banali, sommo le componenti.

PRODOTTI:

- **SCALARE** (interno):

$$S = \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i = AB \cos\theta.$$

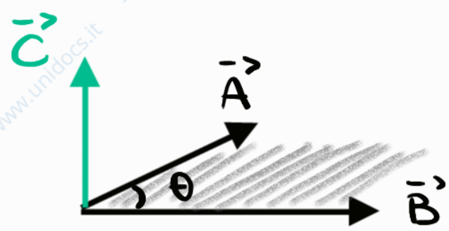


Geometricamente: Lunghezza di $\vec{B}$ per la proiezione di $\vec{A}$ su $\vec{B}$

- **VETTORIALE** (esterno):

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, di modulo

$C = AB \sin\theta$

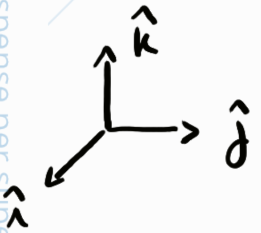


Per calcolarlo usiamo lo "pseudodeterminante" (o tensore completamente antisimmetrico):

$$C_i = \underbrace{\boxed{\varepsilon_{ijk}}}_{\text{Tensore completam. antisimmetrico}} A_j B_k$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{se } i=j,\ i=k,\ j=k \text{ (2 indici =)} \\ +1 & \text{se } (i,j,k) = (1,2,3) \text{ o permutazioni cicliche} \\ -1 & \text{se } (i,j,k) = (1,3,2) \text{ " "} \end{cases}$$

Equivalentemente possiamo anche calcolarlo così:



$\hat{i} = (1,0,0)$
$\hat{j} = (0,1,0)$
$\hat{k} = (0,0,1)$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\varepsilon_{123}}_{+1} A_2 B_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1} A_3 B_2$$

CALCOLO VETTORIALE:

Derivate e integrali estesi nello spazio tridim.

- **OPERATORE DIFFERENZIALE (Nabla):**

$$\vec{\nabla} = \vec{\partial} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

- **GRADIENTE**

$$\vec{\nabla} s = \left(\frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial y}, \frac{\partial s}{\partial z} \right)$$

Applico Nabla ad un campo scalare

- **DIVERGENZA**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Nabla interno campo vettoriale

ROTORE

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Nabla esterno campo vettoriale

Semplici conseguenze:

- $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} S = 0, \quad \forall S$ (ROTORE del GRADIENTE IDENTICAMENTE NULLO qualsiasi sia il campo scalare)

  Questo perchè il prodotto esterno è antisimmetrico e quando faccio il prodotto di due vettori uguali (anche se qui ho degli "pseudo" vettori, sono operatori) si annulla.

NOTA: In 1 dim $\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow f$ costante.

Nel caso vettoriale è più complicato, anche se si verifica $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} S = 0$, questo non implica affatto S costante! S può anche essere non costante.

Perciò, nel caso multidimensionale, la derivata è sì nulla quando il campo è costante (uniforme), ma anche in altri casi!
Vediamone un po':

- **CAMPO UNIFORME**: $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{A}_0$

  ↳ COSTANTE: non dipende da $\vec{x}$, è in ogni punto uguale a se stesso, cioè in ogni punto ha stessa direz. verso, lungh.

È l'equivalente della funzione costante nel caso unidimensionale. Qualsiasi derivata faccia sarà quindi uguale a zero (sia divergenza che rotore nulli):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

Infatti, le derivate di ogni componente di A, in ogni direzione, sono tutte nulle: $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = 0$

CAMPO CENTRALE (es. di campo non uniforme, ma sempre con derivate nulla: sia div. che rotore)

$$\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

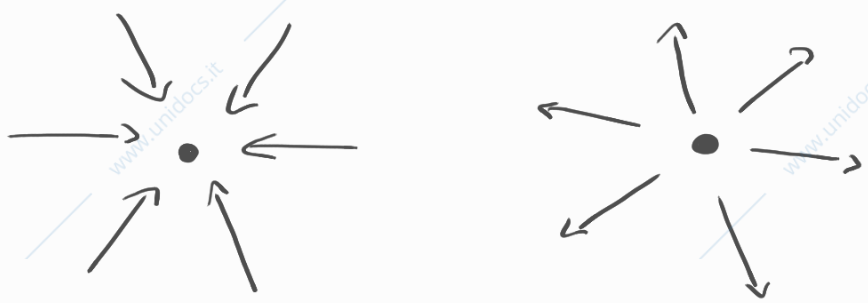
($\vec{r}$: VETTORE POSIZIONE)

dove $\vec{r} = (x, y, z)$ e $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$(\Rightarrow r^3 = (x^2+y^2+z^2)^{3/2})$

<u>Modulo</u>: $F = |\vec{F}| = \frac{1}{r^2}$

<u>es</u> Quello gravitazionale è un campo centrale.



DIVERGENZA :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \underbrace{\frac{\partial F_x}{\partial x}}_{\downarrow} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = 0$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} + x\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3}} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{\cancel{2}r}\cancel{2}x = \frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3}{r^4}\frac{x}{r} = -\frac{3x}{r^5}$$

$\frac{\partial F_y}{\partial y}$ e $\frac{\partial F_z}{\partial z}$ ANALOGHI

⚠ **ATTENZIONE**: il 3 cerchiato in rosso è dovuto al fatto che stiamo svolgendo il calcolo in 3 dimensioni. Se però considero la divergenza in d dimensioni, $d \neq 3$, si avrà:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{d}{r^3} - \frac{3}{r^3} \neq 0 \quad \text{se } \vec{F} = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Se invece $\vec{F}$ fosse $\vec{r}/r^d$ in d dimensioni, allora avrei di nuovo divergenza nulla.

ROTORE :

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \cancel{\frac{1}{r^3}\frac{\partial z}{\partial y}} + z\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r^3} =$$

$$= -\frac{3zy}{r^5}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \cancel{\frac{1}{r^3}\frac{\partial y}{\partial z}} + y\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r^3} =$$

$$= -\frac{3yz}{r^5}$$

$\Rightarrow \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$ (le altre 2 componenti sono analoghe)