1. Scrivere la funzione $\xi(x,t)$ di un'onda armonica stazionaria che rappresenta le oscillazioni di una corda di densità lineare ρ_ℓ soggetta a tensione T_c e fissa alle estremità in $x=0$ e $x=L$. Trovare i valori di frequenza ammessi.

ONDA ARMONICA STAZIONARIA:

$$\xi(x,t) = [2A \sin kx] \cos \omega t$$

$$f = \frac{v}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2L}{n}, \quad v = \sqrt{\frac{T_c}{\rho_\ell}}$$

$\rightarrow \rho_\ell = \frac{m}{L}$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T_c}{\rho_\ell}}}$$

$(n \in \mathbb{N})$

FREQUENZA FONDAMENTALE: $n = 1$

2. Un reticolo di interferenza ha fenditure che distano 0.02mm e viene attraversato da luce gialla di frequenza 5.0×10^{14}Hz. Su uno schermo posto a 10m dal reticolo si osservano i massimi principali d'interferenza. Calcolare la distanza tra il primo massimo e quello centrale.

INTERFERENZA da RETICOLO:

(luce monocromatica, più di una fenditura (reticolo)):

d : DISTANZA tra FENDITURE

λ : LUNGH. D'ONDA : $\lambda = c/\nu$

L : DISTANZA RETICOLO - SCHERMO

DISTANZA TRA DUE MASSIMI PRINCIPALI:
(calcolo semplice x θ piccolo)

$$\Delta x = L \, tg\theta \simeq L \sin\theta = L \frac{\lambda}{d}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\lambda}{d}}$$ tra 2 MAX SUCCESSIVI

$$\rightsquigarrow \Delta x = \frac{L}{d} \frac{c}{\nu} = \frac{10 \, m}{0{,}02 \cdot 10^{-3} \, m} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{5 \cdot 10^{14} \, 1/s} =$$

$$= 30 \cdot 10^{-2} \, m = 30 \, cm$$

---

3. Un asteroide ha velocità 0.6c e energia cinetica T in un SRI. Qual è la sua velocità in un SRI in cui ha energia cinetica $5T$?

EN. CINETICA RELATIVISTICA : $T = (\gamma(v) - 1) mc^2$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(EN. CIN. NON REL è $T_{non\,rel} = \frac{1}{2} m v^2$, per $v \ll c$)

$$(\gamma(v)-1)\cancel{mc^2} = 5\,(\gamma(0.6c)-1)\cancel{mc^2}$$

$$\gamma(v) = 5\,\gamma(0.6c) - 4$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{\sqrt{1-\frac{0.6^2\cancel{c^2}}{\cancel{c^2}}}} - 4 = \frac{5-3.2}{0.8} = 2.25$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{2.25}\right)^2$$

$$-v^2 = \left[\left(\frac{1}{2.25}\right)^2 - 1\right]c^2$$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{1}{2.25}\right)^2} \sim 0.9c$$

---

4. Due eventi A e B hanno intervalli spaziale e temporale d e T in un SRI K. Per quali valori di T esiste un SRI K' in cui i due eventi coincidono spazialmente? Qual è la velocità relativa di K' rispetto a K? Può A essere causa di B (o viceversa)?

$$\Delta s^2_{AB} = c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^{\,2}$$
$$= c^2(t_B-t_A)^2 - (x_B-x_A)^2 - (y_B-y_A)^2 - (z_B-z_A)^2$$

(INTERVALLO TRA EVENTI).

$\rightsquigarrow$ $\Delta s^2_{AB} = \Delta s'^2_{AB}$ $\forall\, K, K'$ SRI. (invariante relativistico)

($\Delta x = 0$)

- $\exists$ un SRi in cui A, B SPAZIALM. COINCIDENTI Y se hanno un interv.: → $\Delta s^2_{AB} > 0$ (tipo TEMPO)
  oppure $\Delta s^2_{AB} = 0$ (tipo LUCE)

- $\exists$ un SRi in cui A, B **SIMULTANEI** ($\Delta t = 0$) se hanno un interv. $\Delta s^2_{AB} < 0$ (tipo SPAZIO)

- **EVENTI CONNESSI CAUSALM.** hanno un interv. di tipo TEMPO o LUCE ($\Delta s^2_{AB} \geq 0$)

La CAUSA viaggia a vel. $u = \frac{|\Delta \vec{x}|}{\Delta t}$

- $\Delta t'_{BA} = \underbrace{\gamma}_{= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \left(\Delta t_{BA} - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)$,

$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t)$

RISPOSTA

- $\exists$ un SRi K' in cui COINC. SPAZ. se $\Delta s^2_{AB} = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \Delta t^2_{BA} \geq \frac{\Delta x^2}{c^2} \Leftrightarrow T^2 \geq \frac{d^2}{c^2} \Leftrightarrow T \leq -\frac{d}{c} \vee \boxed{T \geq d/c}$

- $0 = \Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t) \Rightarrow \boxed{v = \frac{d}{T}}$

- $\Delta s^2_{BA} \geq 0 \Rightarrow$ **POSSONO essere CONNESSI CAUSALM.**

5. Qual'è l'energia E dello stato fondamentale di un atomo d'idrogeno in eV? Un fotone di frequenza $1.596\ 10^{14}$ Hz viene emesso dallo stato $n = 4$: in quale stato n' viene portato l'elettrone? ($h = 4.14\ 10^{-15}$eV s)

LIVELLI ENERGETICI ATOMO H di BOHR:

$$E_n = -\frac{13.6\,eV}{n^2} \quad , n \in \mathbb{N}$$

FONDAM. : $\boxed{n=1}$

Un ELETTRONE transisce da un livello caratterizzato da n_i (iniziale) a uno n_f (finale), attraverso:

- EMISSIONE ($n_i > n_f$) di un FOTONE
- ASSORBIMENTO ($n_i < n_f$) di un FOTONE

FOTONE di ENERGIA: $E = h\nu_{if} = |E_{n_i} - E_{n_f}|$

RISPOSTA:

- $E_1 = -\frac{13.606\,eV}{1} = -13.606\ eV$
- $\nu_{if} = 1{,}596 \cdot 10^{14}$ Hz
  $h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eV s
- $E = |E_{n'} - E_4| = h\nu = 0{,}66\ eV$

$$\Rightarrow E_4 - E_{n'} = 0{,}66 \text{ eV}$$

$$E_{n'} = E_4 - 0.66 \text{ eV} = -\frac{13.6}{16}\text{eV} - 0{,}66 \text{ eV} = -1{,}51 \text{ eV} = -\frac{13{,}6}{n'^2}\text{eV}$$

$$\Rightarrow n' = \sqrt{\frac{13.6}{1.51}} = 3$$

6. Una sorgente radioattiva emette particelle di massa m e velocità $\vec{u}$ diretta lungo l'asse x. Scrivere le componenti del quadrimpulso delle particelle nel SRI del laboratorio e in un SRI in moto lungo y con velocità v. Calcolare l'energia cinetica delle particelle in quest'ultimo SRI.

QUADRIMPULSO: ($\forall$ particella)

$$\boxed{p^\mu \equiv m u^\mu = m\gamma(u)(c, \vec{u})}$$

per N partic, si somma: $\sum_{k=1}^{N} p_k^\mu$

TRASFORMAZIONI VELOCITÀ:

$\vec{u}$: (in K) $\quad u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$

$\vec{u}'$: (in K') $\quad u_x' = \frac{dx'}{dt'}, \quad u_y' = \frac{dy'}{dt'}, \quad u_z' = \frac{dz'}{dt'}$

dove: (in qs caso si muove lungo y a vel v)

$$\begin{cases} dx' = dx \\ dy' = \gamma(dy - v\,dt) \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dy\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x' = \dfrac{dx}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dy\right)} = \dfrac{u_x}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_y\right)} \\ \\ u_y' = \dfrac{u_y - v}{1-\frac{v}{c^2}u_y} \\ \\ u_z' = \dfrac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}u_y\right)} \end{cases}$$

Racc. dt in ( )

RISPOSTA:

QUADRIMP. LAB: $p^\mu = m u^\mu = m\gamma(c, u_x, 0, 0)$

QUADRIMP. K': $p'^\mu = m u'^\mu = m\gamma\left(c, \frac{u_x}{\gamma}, -v, 0\right)$

$$T = cp^0 - mc^2 = c(m\gamma c) - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)mc^2$$

$\left(\frac{1}{2}mu^2\right.$ nel sist. del LAB$\left.\right)$ → NON RELATIVISTICA

5. Scrivere le due relazioni di De Broglie e calcolare la velocità di fase dell'onda associata a una particella relativistica. Spiegare il risultato.

DE BROGLIE ASSOCIA alle PARTICELLE MASSIVE una FREQUENZA e una LUNGHEZZA D'ONDA DATE RISP. DA:

$$\boxed{\nu = \frac{E}{h} , \qquad \lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}}$$

con $E = m\,\gamma(v)\,c^2$

$\vec{p} = m\,\gamma(v)\,\vec{v}$

VELOCITÀ di FASE: $\boxed{v_f = \nu\lambda = \dfrac{E}{|\vec{p}|} = \dfrac{c^2}{v} > c.}$

Questo risultato è dovuto al fatto che l'onda associata alla particella è necessariamente un PACCHETTO D'ONDA.

Quella che dev'essere $< c$ è la velocità di gruppo $v_g = v$.

---

1. Scrivere la funzione di *a*) un'onda armonica piana di periodo T e velocità v che si propaga lungo la direzione identificata dal versore $\vec{n}$; *b*) un'onda armonica sferica con lo stesso periodo e stessa velocità in coordinate sferiche.

ONDA ARMONICA PIANA di periodo T, velocità v, che si propaga nella direz. $\hat{n}$:

$$\boxed{\xi(\vec{r},t) = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} =$$

$$= \xi_0 \sin(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

- $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$: VETTORE D'ONDA
- $\omega^2 = v^2 \vec{k}^2 = v^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$
- $v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = vT \Rightarrow \vec{k} = \frac{2\pi}{vT}\vec{n}$

ONDA ARMONICA SFERICA in COORDINATE SFERICHE:

$$\boxed{\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{r}\sin(kr - \omega t)}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

---

2. Uno schermo è posto a 2m da una fenditura illuminata con luce di lunghezza d'onda 600nm. Se la distanza tra secondo e terzo minimo nella figura di diffrazione è 6mm, calcolare la larghezza della fenditura.

DIFFRAZIONE:

DISTANZA tra NODI (minimi):

$$\boxed{\Delta x \simeq \frac{\lambda}{d} L}$$

RISPOSTA: $d \simeq \frac{\lambda}{\Delta x} L = \frac{\overset{6\cdot 10^{-7-4}}{\cancel{600\cdot 10^{-9}}}\,m}{\cancel{6}\cdot \cancel{10^{-3}}\,m} \cdot 2\,m$

$= 2 \cdot 10^{-4}\,m$

3. I lati di un quadrato hanno lunghezza propria L. Calcolare l'area del quadrato in un SRI in moto con velocità $v = \sqrt{3}/2c$ lungo la direzione di una diagonale del quadrato.

TL: SRI si muove lungo la diagonale, quindi è come se avessimo 2 moti.

LUNGO x: il lato sopra e sotto avrà lunghezza:

$$L' = \frac{L}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

(CONTRAZ. LUNGHEZZE)

⚠ v è la comp. x della velocità lungo la diagonale! $\rightarrow v_x = v\cos 45° = v\frac{\sqrt{2}}{2}$

LUNGO y: analogo. con $v_y = v \sin 45° = v\frac{\sqrt{2}}{2}$

Nel SRI in moto il quadrato ha lato:

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{6c^2}{16c^2}}\,L = \sqrt{\frac{5}{8}}\,L$$

$$\left(v' = \frac{\sqrt{3}}{2} c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} c \right)$$

$\Rightarrow$ AREA: $A' = \gamma^2 L^2 = \frac{5}{8} L^2$

La stella nana Trappist-1 col suo sistema planetario dista circa 40 anni luce dal sistema solare. A che velocità v dovrebbe viaggiare un'astronave per raggiungerla in 100 anni di tempo misurato dagli astronauti a bordo?

DILATAZIONE dei TEMPI:

Sulla Terra: $\Delta t = \frac{d}{v}$

Sull'astronave: $\Delta t' = \frac{d}{\gamma v}$

- 1 ANNO LUCE $= \frac{d_0}{c}$

$$d_0 = (3 \cdot 10^8 \, m/s)(\underbrace{31\,536\,000 \, s}_{1 \text{ ANNO}}) \sim 9{,}46 \cdot 10^{15} \, m$$

- $\gamma v = \frac{d}{\Delta t'} = \frac{40 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{15} \, m}{3{,}1536 \cdot 10^9 \, s} = 119\,989\,853 \, m/s$

$$\gamma v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v \rightarrow (\gamma v)^2 = \frac{v^2 c^2}{c^2 - v^2}$$

$$\frac{v^2 c^2}{c^2 - v^2} = (119 \cdot 989 \cdot 853 \, m/s)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2 - v^2} \sim 0,16$$

$$v^2 \sim 0,16 c^2 - 0,16 v^2$$

$$1,16 v^2 \sim 0,16 c^2$$

$$v \sim \sqrt{\frac{0,16}{1,16}}\, c = 4,14 \cdot 10^7 \, m/s$$

---

5. La quadrivelocità di una particella è $u^\mu = \gamma(u)(c, \vec{u})$ nel SRI K. Scrivere le componenti di u^μ nel SRI K' in moto rispetto a K lungo x con velocità v e mostrare che la componente temporale permette di determinare $\gamma(|\vec{u}'|)$ dove $\vec{u}'$ è la velocità della particella in K'.

$$u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta\gamma_v & 0 & 0 \\ -\beta\gamma_v & \gamma_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma_u \begin{pmatrix} c \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma_u \gamma_v (c - \beta u_x) \\ \gamma_u \gamma_v (u_x - \beta c) \\ \gamma_u \, u_y \\ \gamma_u \, u_z \end{pmatrix} = \gamma_u \gamma_v \begin{pmatrix} c - \frac{v}{c} u_x \\ u_x - v \\ u_y / \gamma_v \\ u_z / \gamma_v \end{pmatrix}$$

Ma $u'^\mu = \gamma(u')(c, \vec{u}') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \gamma(u')\, c = \gamma_u \gamma_v \left(c - \frac{v}{c} u_x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma(u') = \gamma_u \gamma_v \left(1 - \frac{v}{c^2} u_x\right)$$

---

6. Un elettrone ($m_e = 511\,\text{keV}/c^2$) ha energia cinetica pari alla sua energia di massa. Calcolarne la velocità, la frequenza e la lunghezza d'onda di De Broglie ($h = 4.15 \times 10^{-15}\,\text{eV s}$).

$$E = \cancel{m}\, \gamma(v)\, \cancel{c^2} = 2\, mc^2$$

$\downarrow$

SOMMA EN. CIN $T = (\gamma(v) - 1)\, mc^2$
e EN. di MASSA mc^2
ma sono =

$$\Rightarrow \quad \gamma(v) = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{c^2 - v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad c^2 - v^2 = \frac{c^2}{4} \quad \Rightarrow \quad -v^2 = -\frac{3}{4} c^2$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

- $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{m \gamma v} = \dfrac{h}{2 m v} = \dots$ (non leggo i dati)
- $\nu = \dfrac{E}{h} = \dfrac{m \gamma c^2}{h} = \dots$

Scrivere la funzione di un'onda armonica piana di frequenza f e velocità v che si propaga lungo la direzione identificata dal versore $(1,0,1)/\sqrt{2}$.

ONDA PIANA ARMONICA in DIR $\vec{n}$

$$\xi(\vec{r},t) = \xi_0(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$= \xi_0(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$$

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$: VETTORE D'ONDA

$\omega = 2\pi\nu$ (ν FREQUENZA)

$v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = vT$

$(= \lambda\nu)$ $\quad (= v/\nu)$

$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi f}{v}$

$k_y = 0$

$k_z = \frac{\sqrt{2}\pi f}{v}$

$\omega = 2\pi f$

$$\Rightarrow \xi(\vec{r},t) = \xi_0\left(\frac{\sqrt{2}\pi f}{v}x + \frac{\sqrt{2}\pi f}{v}z - 2\pi f t\right)$$

Un faretto LED è immerso in una vasca di alcol etilico (indice di rifrazione $n = 1.36$) a 2m dalla superficie ed emette luce gialla di frequenza 5.09×10^{14} Hz. La lunghezza d'onda λ della luce nell'alcol e il diametro d del cerchio di luce sulla superficie attraverso cui la luce esce dalla vasca sono $\lambda =$ $\quad d =$ [d =4.34 m, λ = 433nm]

RIFRAZIONE:

LEGGE di SNELL: $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

$$\boxed{n_j = \frac{c}{v}}$$

-> V. LUCE VUOTO
-> V. LUCE MEZZO

$$\boxed{\lambda = \frac{v}{\nu}}$$

$$v = \frac{c}{n} = 2{,}21 \cdot 10^8 \ m/s \Rightarrow \lambda = 4{,}33 \cdot 10^{-7} \ m$$

$d = 2h \, tg\,\theta_2$ · DIAMETRO CERCHIO di LUCE

(h profondità)

ANGOLO LIMITE rifrazione da liq. a aria:

$\theta_1 = \pi/2$

- $\theta_{1\,LIM} = \pi/2 \rightarrow \sin\theta_1 = 1$
- $\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}$ (SNELL)
- $tg\,\theta_2 = \frac{\sin\theta_2}{\sqrt{1-\sin^2\theta_2}} = \frac{n_1}{n_2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n_1^2}{n_2^2}}}$

$$\Rightarrow d = 2h\,tg\,\theta_2 = 2(2m)\frac{1}{1.36}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1.36^2}}} = 4{,}34 \ m$$

Un quadrato ha lati di lunghezza propria L. Determinare la sua area A in un SRI in moto con velocità $2/3\,c$ lungo la direzione di uno dei lati. Come cambia il risultato al variare della direzione del moto nel piano della lastra? $A =$ [$A = \sqrt{5}/3\,L^2$]

- LUNGO x: $L' = \frac{L}{\gamma}$ $\qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$
- LUNGO y: INVARIATO

$\Rightarrow A = \frac{\sqrt{5}}{3} L \cdot L = \frac{\sqrt{5}}{3} L^2$

In altre direzioni ho contrazione sia di base che altezza. Studio lungo x e lungo y, considerando come v le componenti v_x e v_y.

Due protoni sono diretti l'uno contro l'altro a velocità $0.97c$. Qual è la loro velocità relativa v_{rel}? Qual è il numero massimo n_{max} di protoni che possono essere prodotti nella collisione? $v_{rel} =$, $n_{max} =$ [$n_{max} = 8$, $v_{rel} = 0.99954c$]

VEL. RELATIVA CORPI UNO CONTRO L'ALTRO:

$$u' = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$$

$$u' = \frac{2(0.97c)}{1 + 0.97^2} = 0.99954\,c$$

Il quadrivettore A^μ ha componenti (A_0, A_x, A_y, A_z) nel SRI K. Scrivere le componenti di A^μ nel SRI K' in moto rispetto a K lungo x con velocità v. Fare almeno due esempi di quadrivettori.

$$A^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} =$$

$$\left(\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(A_0 - \beta A_x) \\ \gamma(A_x - \beta A_0) \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

- QUADRIVELOCITÀ $u^\mu = \gamma(u)(c, \vec{u})$
- QUADRIMPULSO $p^\mu = m u^\mu$.

Un elettrone ($m_e = 511\text{keV}/c^2$) ha energia cinetica pari a un quarto della sua energia di massa. Ricordando che $h = 4.14\ 10^{-15}$eV s calcolare la lunghezza d'onda di De Broglie λ dell'elettrone, $\boxed{\lambda = \quad}$ $[\lambda = 3.2 \times 10^{-12}\text{m}]$

$$T = (\gamma - 1) mc^2 = \frac{1}{4} mc^2$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

DE BROGLIE:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\gamma v}$$

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{m\gamma c^2}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{4} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{3}{5} \Rightarrow v = \frac{3}{5} c$$

$$\leadsto \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\gamma v} = \frac{h}{m \frac{5}{4} \frac{3}{5} c} = \frac{4h}{3mc} =$$

$$= \frac{4(4,14 \cdot 10^{-15}\ eV)}{3(511 \cdot 10^3 \frac{eV}{c^{\cancel{2}}})\cancel{c}} = 3,2 \cdot 10^{-12}\ m$$

Due astronavi identiche viaggiano in direzioni opposte nello spazio e comunicano via radio. Il capitano dell'astronave A sostiene che la lunghezza (nella direzione del moto relativo) della sua astronave è 2000m, mentre quella dell'altra è 1000m. Quali sono le misure per il capitano dell'astronave B? Calcolare la velocità relativa delle astronavi. I due capitani si scambiano poi segnali di luce gialla ($f = 5.09 \times 10^{14}$Hz), misurandone la frequenza in arrivo. Quale risultato ottengono? [$v_{rel} = 0.866c$, $f' = 1.9\,10^{15}$ o $1.4\,10^{14}$Hz, a seconda se si avvicinano o allontanano]

Per A $\Big\langle$ La sua astronave è a RIPOSO $L_A = 2000\,m$
L'astronave di B è in MOTO REL. : $L_B' = \frac{L_B}{\gamma} = 1000\,m$

Per B : $\Big\langle$ La sua è a riposo : $L_B = \gamma \cdot 1000\,m = 2000\,m$
A si muove : $L_A' = \frac{L_A}{\gamma} = \frac{2000\,m}{\gamma} = 1000\,m$

$$\leadsto \gamma = 2 \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow v_{rel} = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

EFFETTO DOPPLER RELATIVISTICO:

$$\underset{\text{LUNGH. D'ONDA OSSERVATA}}{\lambda_o} = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\ \underset{\text{LUNGH. D'ONDA EMESSA}}{\lambda_s}$$

$v>0$ SI ALLONTANANO

$v<0$ SI AVVICINANO

REM

$\lambda f = v$

RAGGIO DI LUCE:

$\lambda f = c$

$$\lambda_s = \frac{c}{f} = 5{,}894 \cdot 10^{-7}\ m$$

- SI AVVICINANO: $\lambda_o = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}\ \lambda_s = 2{,}1997 \cdot 10^{-6}\ m$

$$\Rightarrow f' = 1{,}4 \cdot 10^{14}\ Hz$$

- SI ALLONTANANO: $\lambda_o = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}\ \lambda_s = 1{,}5793 \cdot 10^{-7}\ m$

$$\Rightarrow f' = 1{,}9 \cdot 10^{15}\ Hz$$

Un esperimento di interferenza di Young è condotto con luce monocromatica. Le due fenditure distano 0.400 mm, lo schermo è posto a 3.50 m, e il primo massimo laterale viene osservato a 4.40 mm dal centro della figura.

La lunghezza d'onda è $\lambda =$ [$\lambda = 503$nm]

$$x_n = n\frac{L}{d}\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{x_n d}{nL} =$$

(DIST. 2 MASSIMI CONSECUTIVI)

$$= \frac{(4.40 \cdot 10^{-3} m)(0.4 \cdot 10^{-3} m)}{1 \cdot (3.5 m)} =$$

$$= 5{,}03 \cdot 10^{-7} \; m$$

La stella nana Trappist-1 col suo sistema planetario dista circa 40 anni luce dal sistema solare. A che velocità v dovrebbe viaggiare un'astronave per raggiungerla in 40 anni di tempo misurato dagli astronauti a bordo? $v =$ [$v = 0.707c$]

DILATAZIONE dei TEMPI: $\Delta t = \gamma \Delta t' \leftrightarrow \Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma}$

Sulla Terra: $\Delta t = \frac{d}{v}$

Sull' astronave: $\Delta t' = \frac{d}{\gamma v}$

$$\gamma v = \frac{d}{\Delta t'} = \frac{40 \,\cancel{\text{ANNI}} \cdot c}{40 \,\cancel{\text{ANNI}}} = c$$

$$\Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c \Rightarrow \dots \rightarrow v = \frac{\sqrt{2}}{2} c$$

Due eventi A e B hanno intervalli spaziale e temporale d e T in un SRI K. Per quali T esiste un SRI K' in cui sono A e B sono simultanei? Qual è la velocità relativa di K e K'? T $v =$ [$T < d/c$; $v = c^2 T/d$]

$$\Delta s^2_{AB} = c^2 \Delta t^2_{AB} - \Delta \vec{x}^2 =$$

$$= c^2 (t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2$$

- $\Delta S^2_{AB} > 0$: TIPO TEMPO → ∃ un SRI K' in cui A e B SPAZ. COINC. + possono essere CONN. CAUSALM.
- $\Delta S^2_{AB} = 0$: TIPO LUCE
- $\Delta S^2_{AB} < 0$: TIPO SPAZIO → ∃ un SRI K' in cui A.B SIMULTANEI

- ∃ un SRI K' in cui A.B simultanei se

$$\Delta S^2_{AB} = c^2 T^2 - d^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad T^2 - \frac{d^2}{c^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{-\frac{d}{c} <}_{\substack{\text{ovvio} \\ (T \geq 0)}} \boxed{T < \frac{d}{c}}$$

- $\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\Delta t'} = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right)$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{v}{c^2} d \quad \Rightarrow \quad v = c^2 \frac{T}{d}.$$

Scrivere i due postulati della relatività ristretta.

1) Tutti i SRI sono fisicamente equivalenti e in ognuno di essi le leggi della fisica hanno la stessa forma.

2) La velocità della luce nel vuoto ha lo stesso valore c in tutti i SRI.

Un elettrone ha velocità $0.75c$. Un protone (massa 1836 volte quella dell'elettrone) ha la stessa energia cinetica. La sua velocità è quindi $v =$ [$v = 0.024c$]

$$T = (\gamma(v) - 1)\, mc^2 \quad \text{EN CINETICA}$$

$$T_{el} = T_{pr} \Leftrightarrow (\gamma(v_{el}) - 1)\, \cancel{m_{el}}\, \cancel{c^2} = (\gamma(v_{pr}) - 1)\, 1836\, \cancel{m_{el}}\, \cancel{c^2}$$

$$\gamma(v_{el}) - 1 = 1836\, \gamma(v_{pr}) - 1836$$

$$\gamma(v_{pr}) = \frac{\gamma(v_{el}) + 1835}{1836} = 1{,}00027879$$

$$\gamma(v_{el}) = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}75^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_p^2}{c^2}}} = 1{,}00027879$$

$$v_p = c\left[1 - \left(\frac{1}{1{,}00027879}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= 0{,}024c.$$

L'energia dello stato fondamentale di un atomo d'idrogeno è -13.6eV. Nel passaggio dallo stato $n = 3$ allo stato fondamentale viene emesso un fotone. Calcolare l'energia, la lunghezza d'onda e il quadrimomento del fotone nel SRI in cui l'atomo è a riposo ($h = 4.14\ 10^{-15}$eV s), assumendo che il fotone sia emesso lungo l'asse x. In un secondo SRI K', in moto lungo x rispetto a K, l'energia cinetica dell'atomo è $\frac{1}{4}m_pc^2$, dove m_p è la massa del protone e abbiamo trascurato la massa dell'elettrone. Calcolare il quadrimomento del fotone in K' e da qui la sua frequenza. Giustificare il risultato usando l'effetto Doppler relativistico. [Sol: $E_\gamma = 12.09$eV, $E'_\gamma = E_\gamma/2$, $\nu' = 1.46\ 10^{15}$ Hz]

LIVELLI ENERGETICI ATOMO H di BOHR:

$$E_n = -\frac{13.6\,eV}{n^2} \quad , n \in \mathbb{N}$$

FONDAM.: $\boxed{n=1}$

Un ELETTRONE transisce da un livello caratterizzato da n_i (iniziale) a uno n_F (finale), attraverso:

- EMISSIONE ($n_i > n_f$) di un FOTONE
- ASSORBIMENTO ($n_i < n_f$) di un FOTONE

FOTONE di ENERGIA: $E = h\nu_{if} = |E_{ni} - E_{nf}|$

ESEMPIO:

$E_1 = -13.6\,eV$ en. stato fondam.

$E_3 = -\frac{13.6}{9}\,eV$ en. stato $n=3$

- EN. FOTONE:

$E_\gamma = |E_3 - E_1| = 12,09\,eV$

- LUNGH. D'ONDA FOTONE: $\lambda_{if} = \frac{c}{\nu_{if}} = \frac{ch}{E_\gamma}$

$\rightsquigarrow \lambda_{if} = \frac{(3 \cdot 10^8\,m/s)(4,14 \cdot 10^{-15}\,eV\,s)}{12,09\,eV} = 1,027 \cdot 10^{-7}\,m$

- FOTONE: PARTICELLA A MASSA NULLA, per cui vale

$\boxed{E = pc}$ (p: quadrimomento)

$$p = \frac{E}{c} = \frac{12{,}09\ eV}{3 \cdot 10^{8}\ m/s} = 4{,}03 \cdot 10^{-8}\ \frac{eV\,s}{m}$$

SRi K':

- $T = (\gamma(v) - 1)\, m_p c^2 = \frac{1}{4} m_p c^2$

$\Rightarrow \quad \gamma(v) = \frac{5}{4}$

EFFETTO DOPPLER RELATIVISTICO:

$$\frac{\nu}{\nu'} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad , \quad \beta = \frac{v}{c} \quad e \quad \begin{cases} v > 0 & \text{si ALLONTANANO} \\ v < 0 & \text{si AVVICINANO} \end{cases}$$

(ν → EMESSA; ν' → OSSERVATA)

Ed essendo $\nu = \frac{c}{\lambda}$:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

(λ' → OSSERVATA; λ → EMESSA)

$$\frac{E}{E'} = \frac{h\nu}{h\nu'} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \sqrt{\frac{8/5}{2/5}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow 1 - \beta^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow E'_\gamma = \frac{1}{2} E_\gamma$$

$$p' = \frac{E'_\gamma}{c} = \frac{1}{2}\frac{E_\gamma}{c} = \frac{1}{2}p = 2{,}015 \cdot 10^{-8}\ eV\frac{s}{m}$$

$$\nu' = \frac{E'_\gamma}{h} = \frac{\frac{1}{2}E_\gamma}{h} = \frac{\frac{1}{2}(12{,}09\,eV)}{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs} = 1{,}46 \cdot 10^{15}\ Hz$$

Scrivere la funzione di un'onda armonica piana con vettore numero d'onda $\vec{k}$ diretto lungo l'asse delle y. Determinare la relazione tra velocità di propagazione, numero d'onda e frequenza.

ONDA PIANA ARMONICA: $\boxed{\xi(\vec{r},t) = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

- $\vec{k}$: VETTORE NUMERO D'ONDA : $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{n}$ ↳ DIREZ. dell'ONDA

(IN UNA 1 DIM: $k = 2\pi/\lambda$)

- sempre in UNA DIM, abbiamo:

$$\boxed{v = \lambda \underset{\text{o } f}{\nu} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}}$$ REL. DISPERSIONE

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu}$$

Qui: $\xi(\vec{r},t) = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

dove • $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{u}_y = \left(0, \frac{2\pi}{\lambda}, 0\right) = (0, k, 0)$

$$\Rightarrow \xi(\vec{r},t) = \xi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}y - \omega t\right) =$$

$$= \xi_0 \sin(ky - kv t) =$$

$$= \xi_0 \sin(k(y - vt)).$$

- REL. k, v, f : REL. di DISPERSIONE:

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k}$$

Uno schermo è posto a 1m da una fenditura illuminata con luce di lunghezza d'onda 600nm. Se la distanza tra primo e secondo minimo nella figura di diffrazione è 3mm, la fenditura ha larghezza $d =$ 0,2 mm

DIFFRAZIONE: DISTANZA tra NODI (minimi):

$$\boxed{\Delta x \simeq \frac{\lambda}{d} L}$$

$$d \simeq \frac{\lambda}{\Delta x} L = \frac{(6 \cdot 10^{-7}\,m)(1\,m)}{3 \cdot 10^{-3}\,m} = 2 \cdot 10^{-4}\,m$$

La stella Proxima Centauri dista 4.2 anni luce dal sistema solare. A che velocità v dovrebbe viaggiare un'astronave per raggiungerla in 20 anni di tempo misurato dagli astronauti a bordo? $v =$

$$\Delta t' = \frac{d}{\gamma v} \Rightarrow \gamma v = \frac{d}{\Delta t'} = \frac{4.2\ \text{ANNI} \cdot (3 \cdot 10^8\,m/s)}{20\ \text{ANNI}}$$

$$= 6{,}3 \cdot 10^7 \ m/s.$$

$$\gamma^2 v^2 = \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2 v^2}{c^2 - v^2} = (6{,}3 \cdot 10^7 \ m/s)^2$$

$$\frac{v^2}{c^2 - v^2} = 0{,}0441$$

$$1{,}0441 \ v^2 = 0{,}0441 \ c^2$$

$$v = \sqrt{\frac{0{,}0441}{1{,}0441}} \ c = 0{,}21 \ c$$

Due eventi sono simultanei in un SRI K e l'intervallo spaziale tra di loro è Δx. Calcolare la loro separazione temporale $\Delta t'$ in un SRI K' in moto lungo x in cui la separazione spaziale $\Delta x' = 2\Delta x$ e la velocità relativa di K' rispetto a K.

$\Delta t' =$	$v =$

EVENTI SIMULTANEI: $\Delta s^2_{AB} = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 \ < 0$

- $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{c}\Delta x}$

- $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = \gamma \Delta x$

Ma $\Delta x' = 2\Delta x \Rightarrow \gamma = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2 \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{rel} = \frac{\sqrt{3}}{2} c}$$

Un elettrone ha velocità 0.5c. Un protone (massa 1836 volte quella dell'elettrone) ha la stessa energia cinetica. La sua velocità è quindi $v =$

$$T_{el} = (\gamma(v_{el}) - 1)\cancel{m}\cancel{c^2} = (\gamma(v_p) - 1)\, 1836\, \cancel{m}\cancel{c^2} = T_p$$

$$\gamma(v_{el}) = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} = 1,1547$$

$$1836\,\gamma(v_p) - 1836 = 0,1547$$

$$\gamma(v_p) = 1,00008426$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} = 1,00008426$$

$$1 - \frac{v_p^2}{c^2} = 0,999915747$$

$$v_p = \sqrt{8,4253 \cdot 10^{-5}}\, c = 0,0092\, c$$

L'energia dello stato fondamentale di un atomo d'idrogeno è -13.6eV. L'elettrone si trova nello stato $n = 7$ e dopo l'emissione di un fotone di frequenza 2.98 10^{14} (h = 4.14 10^{-15}eV s) passa allo stato con numero quantico $n =$

$n_i > n_f$

$$E_n = \frac{-13.6\ eV}{n^2}$$

$$E = |E_7 - E_n| = h\nu$$

$$\left(-\frac{13.6}{49}+\frac{13.6}{n^2}\right) eV = (4,14\cdot 10^{-15}\, eV\, s)(2,98\cdot 10^{14}\, Hz)$$

$$\frac{13.6}{n^2} = 1,5113 \quad \Rightarrow \quad n = 3.$$

Un elettrone e un positrone con velocità trascurabile nel SRI K si annichilano. Ricordando che $h = 6.6 \times 10^{-34} J\,s$, $q_e = 1.6 \times 10^{-19} C$, e $m_e = 511 \mathrm{KeV}/c^2$, calcolare in K l'energia, la lunghezza d'onda e il momento dei fotoni emessi. Un'astronave in moto rispetto a K con velocità $0.6c$ nella direzione di uno dei fotoni ne misura la frequenza; con quale risultato?

ANNICHILAZIONE: POSITRONE (e^+) + ELETTRONE (e^-) che si annichilano emettono DUE FOTONI (γ), ciascuno con:

$$E_\gamma \simeq m_e c^2 = 511\cdot 10^3\ eV$$

$$p_\gamma^0 = \frac{E_\gamma}{c} = m_e c = \frac{511\cdot 10^3 eV}{c}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E} = \frac{(4,14\cdot 10^{-15}\, eV s)(3\cdot 10^8\, m/s)}{511\cdot 10^3\, eV} = 2,43\cdot 10^{-12}\, m$$

$\rightarrow \nu = E/h$

$$\nu = c/\lambda = 1,234\cdot 10^{20}\ Hz$$

EFFETTO DOPPLER RELATIV.

$$\frac{\nu}{\nu'} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \rightarrow \quad \nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu = 7,58\times 10^{19}\ Hz$$

(se si ALLONT.)

$\beta = 0,6$

$$\nu' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\nu = 1,75\times 10^{20}\ Hz$$

(se si AVVIC.)

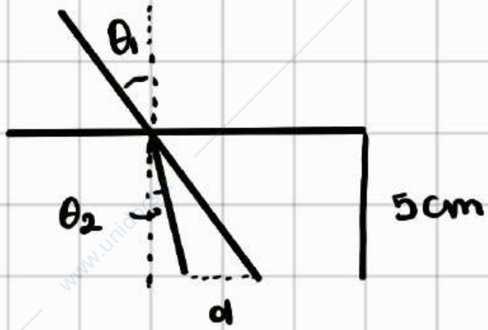
($v<0 \rightarrow \beta = -0,6 < 0$)

Scrivere la funzione di un'onda armonica piana con vettore numero d'onda $\vec{k}$ diretto lungo l'asse z, e la relazione tra velocità di propagazione, numero d'onda e frequenza.

$$\xi(\vec{r},t) = \xi_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

- $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{u}_z = (0, 0, \frac{2\pi}{\lambda})$
- $v = \lambda f = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k}$

Un fascio di luce laser incide ad un angolo $\pi/4$ su una lastra di vetro spessa 5cm. Determinare la distanza d tra le rette che individuano la direzione del fascio prima e dopo il passaggio attraverso il vetro, il cui indice di rifrazione è 1.4142. $d =$



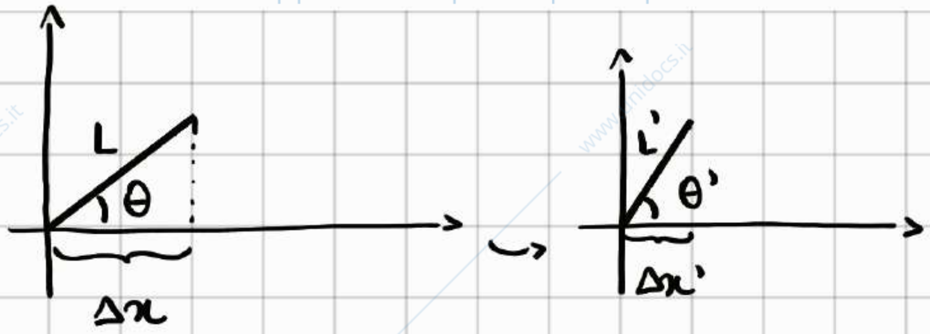
SNELL:

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \pi/6$$

$$d = h(tg\,\theta_2) = (0{,}05\,m)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2{,}89\ cm$$

Una barra ha lunghezza propria L. Un osservatore in moto relativo rispetto alla barra con velocità $0.8c$ lungo l'asse x ne misura la lunghezza e trova $0.79\,L$. L'angolo tra la barra nel SRI in cui questa è ferma e l'asse x è $\theta =$



CONTRAZ. LUNGH:

$$\Delta x' = \Delta x / \gamma(v) \quad , \quad \gamma(v) = 1,67$$

$$\begin{cases} L' = 0,79\,L \\ \Delta x' = \Delta x / \gamma(v) \\ L \sin\theta = L' \sin\theta' \Rightarrow \sin\theta = 0,79 \sin\theta' \quad (*) \end{cases}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = \gamma(v) \rightarrow \frac{\cancel{L}\sqrt{1-\sin^2\theta}}{0,79\,\cancel{L}\sqrt{1-\sin^2\theta'}} = 1,67$$

$$\rightarrow \frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta'} = 1,7405525$$

$$\rightarrow 1-\sin^2\theta = 1,7405525 - 1,7405525 \frac{\sin^2\theta}{0,6241}$$

$$1,7889 \sin^2\theta = 0,7405525$$

$$\sin\theta = 0,643405682$$

$$\theta = 40°$$

Due eventi A e B sono simultanei nel SRI K, dove le loro coordinate spaziali sono $x_B = x_A + \Delta x$, $y_A = y_B$, $z_A = z_B$. Calcolare la loro separazione temporale $\Delta t'$ in un SRI K' in moto lungo x in cui $\Delta x' = x'_B - x'_A = 2\Delta x$ (usare un invariante relativistico!), e da qui la velocità relativa di K' rispetto a K.

$\Delta t' =$, $v =$

$\exists$ un K' t.c.

A, B SIMULTANEI : $\forall$ $\Delta s^2_{AB} = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 < 0$

INV. REL.!

$(\Delta s^2_{AB} = \Delta s'^2_{AB})$

$$\Delta t' = \gamma\left(\cancel{\Delta t} - \frac{v}{c^2}\Delta x\right) = -\gamma \frac{v}{c^2}\Delta x$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 2\Delta x$$

$$\Delta y' = \Delta y$$

$$\Delta z' = \Delta z$$

$$2\Delta x = \gamma\Delta x - v\cancel{\Delta t} = \gamma\Delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = 2}$$

- $\Delta t' = -\gamma \frac{v}{c^2}\Delta x$
- $\gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2 \iff 1 - \dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{4}$

$$\iff v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

L'energia dello stato fondamentale ($n = 1$) di un atomo di idrogeno è -13.6 eV. Nel passaggio dallo stato $n = 2$ a quello $n = 4$ ($h = 4.14 \times 10^{-15}$ eV s) viene ~~emesso~~ assorbito un fotone di frequenza $f =$.

$n_i < n_f$

$$E_n = -\frac{13.6\,eV}{n^2}$$

$$E_\gamma = |E_{n_i} - E_{n_f}| = h\nu$$

$$h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eV\,s$$

$$\nu = \frac{|E_{n_i} - E_{n_f}|}{h} = \frac{\left| -\frac{13.6\,\cancel{eV}}{4} + \frac{13.6\,\cancel{eV}}{16} \right|}{(4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\cancel{eV}\,s)} =$$

$$= \frac{3}{16}\,\frac{13.6}{4{,}14 \cdot 10^{-15}}\,Hz = 6{,}16 \cdot 10^{14}\,Hz$$

Scrivere le funzioni che rappresentano a) un'onda armonica piana con vettore d'onda $\vec{k}$ arbitrario; b) un'onda armonica sferica in coordinate sferiche.

a) $\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

$$v = \lambda f = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{n}$$

b) $\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \sin(kr - \omega t)$

La frequenza fondamentale di una corda di chitarra è 240 Hz. Una seconda corda, identica alla prima, se pizzicata simultaneamente dà luogo a battimenti di frequenza 6Hz. Il rapporto r fra le tensioni applicate alle due corde è $r =$

FREQUENZA: $f = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T_c}{\rho_L}}$

FREQ. FOND. (n=1): $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_{c1}}{\rho_L}} = 240\ Hz$

FREQUENZA BATTIMENTI: sottrazione delle frequenze:

f_1 : fondam. => la più bassa.

$f_2 > f_1$, $f_2 - f_1 = 6\ Hz$ => $f_2 = 246\ Hz$

RAPPORTO TENSIONI:

$T_{c1} = 4L^2 f_1^2 \rho_L$

$T_{c2} = 4L^2 f_2^2 \rho_L$

$$r = \frac{T_{c1}}{T_{c2}} = \frac{\cancel{4L^2} f_1^2 \cancel{\rho_L}}{\cancel{4L^2} f_2^2 \cancel{\rho_L}} = \frac{f_1^2}{f_2^2} = 0{,}952$$

La stella Gamma Pavonis dista circa 30 anni luce dal sistema solare. A che velocità v dovrebbe viaggiare un'astronave per raggiungerla in 30 anni di tempo misurato dagli astronauti a bordo? $v =$

$$d = 30 \text{ anni luce} = 30 \text{ ANNI} \cdot c$$

$$\Delta t_{TERRA} = \frac{d}{v}$$

$$\Delta t_{ASTRON.} = \frac{\Delta t_{TERRA}}{\gamma} = \frac{d}{\gamma v} = 30 \text{ ANNI}$$

$$\gamma v = \frac{\cancel{30 \text{ ANNI}} \cdot c}{\cancel{30 \text{ ANNI}}} = c$$

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c$$

$$v^2 = c^2 - v^2$$

$$v^2 = \frac{1}{2} c^2$$

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2} c$$

Un elettrone ha velocità $0.75c$. Un protone (massa 1836 volte quella dell'elettrone) ha la stessa energia cinetica. La sua velocità è quindi $v =$

$$T_{el} = (\gamma(v) - 1)\cancel{m_{el}}\cancel{c^2} = (\gamma(v_p) - 1) 1836 \cancel{m_{el}}\cancel{c^2}$$

$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\cdot\cdot}{T_p}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-0.75^2}} - 1 = \frac{1836}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} - 1836$$

$$\frac{1836}{\sqrt{1-\frac{v_p^2}{c^2}}} = 1835 + \frac{1}{\sqrt{1-0{,}75^2}}$$

$$\frac{v_p^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{1836}{1835 + \frac{1}{\sqrt{1-0{,}75^2}}}\right)^2$$

$$v_p = \sqrt{c^2 - c^2\left(\frac{1836}{1835 + \frac{1}{\sqrt{1-0{,}75^2}}}\right)^2}$$

$$= c\sqrt{1 - \left(\frac{1836}{1835 + \frac{1}{\sqrt{1-0{,}75^2}}}\right)^2}$$

$$= 0{,}024\, c$$

Scrivere le due relazioni di De Broglie e calcolare la velocità di fase dell'onda associata per particelle relativistiche. Spiegare il risultato.

De Broglie associa alle particelle massive frequenza e lungh. d'onda date risp. da:

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{m\gamma(v)c^2}{h} \qquad (h = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\ \text{eV s})$$

$$\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|} = \frac{h}{m\gamma(v)v}$$

$\Rightarrow$ $v_F = \nu\lambda = \frac{c^2}{v} > c$: questo
(VELOCITÀ di FASE)

risultato, anche se strano, è corretto, infatti l'onda associata alla particella è necessariam. un pacchetto d'onda.

Invece, la velocità che dev'essere $< c$ è:

$v_g = v < c$
(VEL. di GRUPPO)

L'energia dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno è -13.6eV. Che cosa succede quando un elettrone passa dallo stato $n = 3$ a quello $n = 5$? Determinare la lunghezza d'onda del fotone coinvolto ($h = 4.14 \times 10^{-15}$eV s): $\lambda =$ [$\lambda = 1.284\mu m$]

$E_n = \frac{-13.6\ eV}{n^2}$

Nel passaggio da n_i a n_f, $3 = n_i < n_f = 5$, viene ASSORBITO un fotone, di energia:

$$E_\gamma = |E_{n_i} - E_{n_f}| = \left| -\frac{13.6\ eV}{9} + \frac{13.6\ eV}{25} \right| =$$

$$\nu h = \left| \frac{-16 \cdot 13.6\ eV}{225} \right| = 0,967\ eV$$

$$\Rightarrow \nu = \frac{E_\gamma}{h} = \frac{0,967\ eV}{(4,14 \cdot 10^{-15} eV\,s)} = 2,34 \cdot 10^{14}\ Hz$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = 1,284 \cdot 10^{-6}\ m$$

Le astronavi Poincaré (P) e Born (B) viaggiano in direzioni opposte (verso x positivi e negativi, rispettivamente) con velocità $0.3c$ rispetto al Sole. Calcolare la velocità di P rispetto a B e viceversa. L'astronave Majorana è all'inseguimento della B con velocità $0.1c$ rispetto a P sulla stessa rotta. Qual'è la valocità della Majorana rispetto al Sole? [soluzione: $u'_B = -0.5505c, u_M = 0.2062c$]

VELOCITÀ RELATIVE:

Supp. (P) nel SRi a riposo, (B) in un SRi che si muove a vel. $-v$ nella direz. delle x.

$$v_{rel} = \frac{-v-v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \underbrace{-0{,}5505\,c}_{u'_B}$$

Dalla TRASF. VEL: $u_x' = \dfrac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}$

$$u_x - v = u_x' - \frac{v}{c^2}u_x u_x'$$

$$u_x\left(1+\frac{v}{c^2}u_x'\right) = u_x' + v$$

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1+\frac{v}{c^2}u_x'}$$

(M) si muove in direz. opp. a (P),

$u_M' = -0.1c$

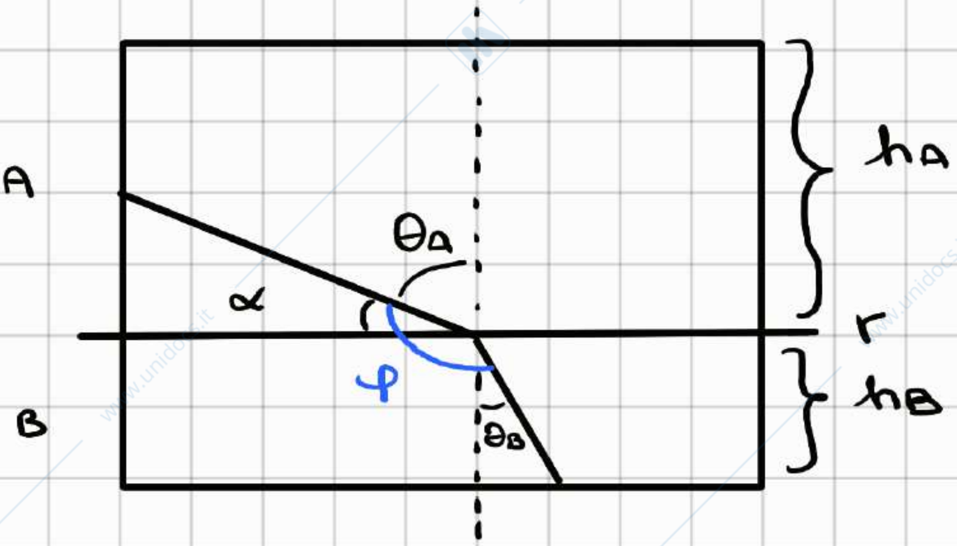
$v = 0.3\,c$
(di P)

$$\Rightarrow \quad u_H = \frac{0.2\,c}{1 - \frac{0.3c}{c^2}\,0.1c} = 0{,}2062\,c$$

Una piscina è divisa a metà da una linea retta r che separa due zone A e B di profondità 4m e 2m. Un'onda armonica piana si propaga sulla superficie dell'acqua della piscina. Nella zona A i fronti d'onda formano un angolo di 30° con r e la lunghezza d'onda è $\lambda_1 = 0.5$m. Ricordando che le onde superficiali nei liquidi poco profondi hanno velocità $v = \sqrt{gh}$ calcolare la lunghezza d'onda λ_2 nella seconda zona e l'angolo φ tra i fronti d'onda nelle due zone.

$\lambda_2 =$	$\varphi =$

ONDE SUPERFICIALI in un LIQUIDO:



STESSA FREQUENZA!

$f_A = f_B = f$

$h_B = 2\,m$

$h_A = 4\,m \quad , \quad \alpha = 30° \quad , \quad \lambda_A = 0{,}5\,m$

$$v_A = \sqrt{g h_A} = \lambda_A f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{\sqrt{g h_A}}{\lambda_A}$$

$$v_B = \sqrt{g h_B} = \lambda_B f \quad \Rightarrow \quad \lambda_B = \frac{\cancel{\sqrt{g}}\sqrt{h_B}}{\cancel{\sqrt{g}}\sqrt{h_A}} \cdot \lambda_A$$

$$= 0{,}35\,m$$

SNELL: $n_A \sin\theta_A = n_B \sin\theta_B$

$\boxed{n = \frac{c}{v}}$ INDICE DI RIFRAZ.

$\downarrow$

$\theta_A = 90° - \alpha = 60°$

$\theta_B = ?$

$$\sin\theta_B = \frac{n_A}{n_B} \sin\theta_A =$$

$$= \frac{\cancel{c}}{\sqrt{g h_A}} \cdot \frac{\sqrt{g h_B}}{\cancel{c}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}612$$

$\Rightarrow \theta_B \sim 38°$

$\Rightarrow \varphi = 38° + 30° + 90° = 158°$

Un reticolo di interferenza ha un numero molto grande di fenditure a distanza d = 0.01mm e viene attraversato da un fascio di luce gialla di frequenza 5.4×10^{14}Hz. Descrivere che cosa si osserva su uno schermo distante 5 m e calcolare la distanza Δ tra il massimo centrale e il primo massimo. $\Delta =$

RETICOLO DI INTERFERENZA: $\boxed{\Delta x = \frac{L}{d}\lambda = \frac{L}{d}\frac{c}{v}}$

$$\Delta = \frac{L}{d}\frac{c}{v} = \frac{(5\,m)}{(0{,}01 \cdot 10^{-3}\,m)} \cdot \frac{(3 \cdot 10^8\,m/s)}{(5{,}4 \cdot 10^{14}\,Hz)} = 0{,}278\,m$$

La stella nana Trappist-1 col suo sistema planetario dista circa 40 anni luce dal sistema solare. A che velocità v dovrebbe viaggiare un'astronave per raggiungerla in 40 anni di tempo misurato dagli astronauti a bordo? $v =$

$$40\ \cancel{\text{ANNI}} = \Delta t = \frac{d}{\gamma v} = \frac{40\ \cancel{\text{ANNI}} \cdot c}{\gamma v}$$

$$\Rightarrow \gamma v = c \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c \quad \Rightarrow \quad 2\frac{v^2}{c^2} = 1$$

$$\Rightarrow v = \frac{\sqrt{2}}{2} c$$

Scrivere i due postulati della relatività ristretta.

1) Tutti i SRi sono fisicamente equivalenti e in ognuno di essi le leggi della fisica hanno la stessa forma.

2) La velocita' della luce nel vuoto, $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$, ha lo stesso valore in tutti i SRi.

Un'astronave ha energia cinetica T e velocità $0.5c$. Qual è la sua velocità v' in un SRI in cui essa ha energia cinetica $3T$? $v' =$

$$T = (\gamma(0{,}5c) - 1)\cancel{mc^2} = 3(\gamma(v) - 1)\cancel{mc^2} = 3T$$

$$3\gamma(v) = \gamma(0{,}5c) - 1 + 3$$

$$\gamma(v) = \frac{\gamma(0{,}5c) + 2}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\gamma(0{,}5c) + 2}{3}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{3}{\gamma(0{,}5c)+2}\right)^2$$

$$v^2=c^2\left[1-\left(\frac{3}{\gamma(0{,}5c)+2}\right)^2\right]$$

$$v=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\gamma(0{,}5c)+2}\right)^2}\;c=0{,}309\,c$$

$$\gamma(0{,}5c)=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}5^2}}$$

Calcolare il numero N di fotoni emessi ogni secondo da una lampada monocromatica di potenza 5W che emette luce di lunghezza d'onda 400nm ($h = 6.63 \times 10^{-34}$ J s).

$N =$

POTENZA EMESSA da LAMPADA MONOCROMATICA:

$$\boxed{P=NE}\quad,\quad E=\nu h$$

N → # FOTONI al SECONDO.

$$\Rightarrow\quad N=\frac{P}{E}=\frac{P}{\nu h}=\frac{\lambda P}{ch}=\frac{(4\cdot10^{-7}\,m)(5\,J/s)}{(3\cdot10^{8}\,m/s)(6{,}63\cdot10^{-34}\,Js)}\ \gamma\ \text{FOTONI}=$$

$$=1{,}006\cdot10^{19}\ \text{FOTONI}/s.$$

Una sorgente radioattiva S emette particelle di massa m e velocità u lungo l'asse x. Scrivere tutte le componenti del quadrimpulso delle particelle e la loro lunghezza d'onda di De Broglie. Determinare le componenti dello stesso quadrimpulso misurate da un osservatore O in moto con velocità v lungo x rispetto a S. Qual'è l'energia cinetica delle particelle per O?

- QUADRIMPULSO : $p^\mu = m u^\mu = m\,\gamma(u)\,(c, \vec{u})$

(di ciascuna particella, ie quadrimp. tot. è la somma di tutti)

$\vec{u}$ è lungo x $\Rightarrow$ $\vec{u} = (u_x, 0, 0)$

$$\Rightarrow \boxed{p^\mu = m\,\gamma(u)\,(c, u_x, 0, 0)}$$

- TRASFORMAZ. VELOCITA'

$$\begin{cases} dt' = \gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right) \\ dx' = \gamma(dx - v\,dt) \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

RACC. dt

$$\Rightarrow \bullet\ u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - v\,dt)}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

$$\bullet\ u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} =$$

$$= \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)}$$

- $u'_z = \dfrac{u_z}{\gamma(1-\frac{v}{c^2}u_x)}$

$\Rightarrow \vec{u}' = \left(\dfrac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}, 0, 0 \right)$

$\Rightarrow$ QUADRIMP. in O:

$$\boxed{p_\mu' = m u_\mu' = m\,\gamma(u')\left(c, \frac{u_x - v}{1-\frac{v}{c^2}u_x}, 0, 0\right)}$$

- LUNGH. D'ONDA DE BROGLIE (nel sistema a riposo):

$\nu = \dfrac{E}{h} = \dfrac{m\gamma(u)c^2}{h}$, dove: - $\gamma(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

- $h = (4{,}14 \cdot 10^{-15}\ eVs)$

- EN. CINETICA in O':

$T = (\gamma(v) - 1)\, mc^2$, $\gamma(v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Scrivere la funzione a) di un'onda armonica piana di pulsazione ω e velocità v che si propaga nella direzione del versore $\vec{n}$; b) di un'onda armonica sferica con stessa frequenza e velocità in coordinate sferiche.

a) $\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$, dove:

- $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{n} \rightsquigarrow |\vec{k}| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$

- $v = \lambda \cdot f = \frac{2\pi f}{k} = \frac{\omega}{k}$

b) $\xi(r,t) = \frac{\xi_0}{r}\sin(kr - \omega t)$

Un reticolo di interferenza ha un numero molto grande di fenditure a distanza $d = 0.01$mm e viene attraversato da un fascio di luce gialla di frequenza 5.4×10^{14}Hz. Descrivere che cosa si osserva su uno schermo distante 5 m e calcolare la distanza Δ tra il massimo centrale e il primo massimo.

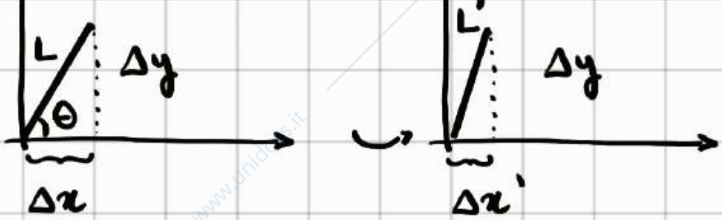
Risultato: $\Delta =$....

$d = 0{,}01\ \text{mm}$, $\nu = 5{,}4\cdot10^{14}$ Hz, $L = 5$ m

$$\Delta = \frac{L}{d}\lambda = \frac{L}{d}\frac{c}{\nu} = \frac{(5\,\cancel{m})}{(0{,}01\cdot10^{-3}\,\cancel{m})}\cdot\frac{(3\cdot10^8\ m/\cancel{s})}{5{,}4\cdot10^{14}\ \cancel{Hz}} =$$

$$= 0{,}278\ m$$

Una barra di lunghezza propria L forma un angolo di 60° con l'asse x. Per un osservatore in moto con velocità $c/2$ lungo l'asse x la lunghezza della barra è ....



CONTRAZ. LUNGH.:

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

$$\Delta x = L\cos\theta, \quad \Delta x' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \frac{L\cos\theta}{\gamma} = L'\cos\theta'$$

$$\Delta y = L \sin\theta \,, \quad \Delta y' = L' \sin\theta' = \Delta y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L \sin\theta = L' \sin\theta' \\ L \dfrac{\cos\theta}{\gamma} = L' \cos\theta' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma \, tg\,\theta = tg\,\theta' \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \theta' = arctg(\gamma \, tg\,\theta) = \qquad tg\,60° = \sqrt{3}$$

$$= arctg(2) \sim 63{,}44°$$

$$\Rightarrow L' = L \frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = 0{,}97\, L$$

Un pione neutro, π^0, ha massa m e decade in due fotoni. *i*) determinare l'energia e la frequenza dei fotoni nel SRI di riposo del π^0; *ii*) scrivere i quadrimomenti dei fotoni nello stesso SRI, assumendo che si propaghino lungo l'asse x; *iii*) si consideri ora il SRI K' in cui il π^0 ha energia $\frac{5}{4}mc^2$: calcolare la sua velocità $\vec{v}$; *iv*) effettuando un'opportuna trasformazione di Lorentz, determinare le componenti dei quadrimomenti in K', nell'ipotesi che $\vec{v}$ sia parallela all'asse x e che i fotoni vengano emessi nella stessa direzione.

PIONE NEUTRO (π_0): decade in due fotoni, che, nel SRI del pione hanno direzioni opposte e viaggiano a velocità c.

$$\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$$

1) EN. SI CONSERVA $\Rightarrow$ $\underset{\substack{\| \\ mc^2}}{E_{\pi_0}} = E_{\gamma_1} \overset{=}{+} E_{\gamma_2}$

$$\Rightarrow \; E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} = \frac{1}{2} mc^2$$

Ma $E_\gamma = \nu h \Rightarrow \nu = \frac{E_\gamma}{h} = \frac{1}{2} \frac{mc^2}{h}$

2) $p^\mu = (p^0, \vec{p}_{rel})$ →

⚠ FOTONI DIRETTI in DIREZ. OPPOSTE! Perciò il loro momento $\vec{p}_{rel}$ è = e opposto

Data una particella con velocità $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, il corrispondente quadrimpulso è dato da:[1]

$$p^\mu = \begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma mc \\ \gamma p^x \\ \gamma p^y \\ \gamma p^z \end{pmatrix} = m\gamma \begin{pmatrix} c \\ v^x \\ v^y \\ v^z \end{pmatrix} := mu^\mu$$

dove $u^\mu = (u^0, u^1, u^2, u^3) = \gamma(c, \mathbf{v})$ sono le componenti della quadrivelocità, m è la massa a riposo, γ è il fattore di Lorentz, $\mathbf{v} = (v^x, v^y, v^z)$ e $\mathbf{p} = (p^x, p^y, p^z)$ sono gli usuali vettori tridimensionali velocità e quantità di moto, e c è la velocità della luce. Le componenti spaziali di p^μ sono dunque le componenti della quantità di moto classica $\mathbf{p}$ moltiplicata per il fattore γ.

- $p^0 = \frac{E}{c} = \gamma mc$

  ma $E = \frac{1}{2} mc^2 \rightarrow p^0 = \frac{1}{2} mc \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}$

- $\vec{p}_{rel} = m\gamma \vec{v} = m\gamma (v_x, v_y, v_z)$

  I fotoni viaggiano qui a vel. c lungo x
  $\Rightarrow \vec{v} = (c, 0, 0)$.

  $\Rightarrow \vec{p}_{rel} = m \underbrace{\frac{1}{2}}_{\gamma} (c, 0, 0) = \left(\frac{1}{2} mc, 0, 0 \right)$

$\rightsquigarrow p^\mu_1 = \left(\frac{1}{2} mc, \frac{1}{2} mc, 0, 0 \right)$

$p^\mu_2 = \left(\frac{1}{2} mc, -\frac{1}{2} mc, 0, 0 \right)$
↳ in cui $\vec{p}_{rel_2} = -\vec{p}_{rel_1}$

3) In K': $E' = \frac{5}{4} mc^2 = \frac{5}{4} E$

$$E' = \gamma mc^2 \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{4}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{16}{25} \rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{9}{25} \rightarrow v = \frac{3}{5} c$$

4) $p^{\mu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, p^{\nu}$, $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_{1,2}^{\mu'} = \begin{pmatrix} p_0'{}_{1,2} \\ p_x'{}_{1,2} \\ p_y'{}_{1,2} \\ p_z'{}_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mc \\ \pm\frac{1}{2}mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma mc \mp \frac{1}{2}\frac{v}{c}\gamma mc \\ -\frac{1}{2}\frac{v}{c}mc \pm \frac{1}{2}\gamma mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\gamma m \begin{pmatrix} c \mp v \\ -v \pm c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scrivere la funzione $a)$ di un'onda armonica piana di pulsazione ω e velocità v che si propaga nella direzione del versore $\vec{n}$; $b)$ di un'onda armonica sferica con stessa frequenza e velocità in coordinate sferiche. [Sol: $A\sin(\omega\vec{n}\cdot\vec{x}/v - \omega t + \phi)$, $A/r\sin(\omega r/v - \omega t + \phi)$]

Un fascio laser di frequenza 5×10^{14}Hz viene sdoppiato e i due fasci risultanti, di uguale intensità, vengono fatti interferire dopo aver percorso nel vuoto le distanze r_1 e r_2. Qual è il rapporto tra la potenza ricevuta nel punto di ricombinazione per $r_1 = r_2$ (interferenza costruttiva) e $r_2 = r_1 + 0.2\mu$m

- [x] 4
- [ ] 1.33
- [ ] 2.50

[Sol: 1, $R = 1/\cos^2(\delta/2), \delta = k(r_2 - r_1), k = 2\pi f/c$]

INTERFERENZA :

POTENZA RICEVUTA nel PUNTO di RICOMBINAZIONE:

$$\boxed{R = \frac{1}{\cos^2(\delta/2)}, \quad \delta = k(r_2 - r_1) \quad e \quad k = \frac{2\pi f}{c}.}$$

$$\frac{R_2}{R_1} \to 4$$

Due eventi coincidono spazialmente nel SRI K. In un SRI K' in moto relativo rispetto a K

- [ ] non hanno mai le stesse coordinate spaziali
- [ ] hanno sempre le stesse coordinate spaziali
- [x] nessuna delle precedenti

[Sol: 3]

Quale di queste quantità fisiche è un invariante relativistico?

- ☒ la fase di un'onda elettromagnetica
- ☐ l'energia totale di un sistema fisico [Sol: 1]
- ☐ il campo magnetico

Un elettrone ha velocità $0.9c$. Un muone (massa 207 volte quella dell'elettrone) ha la stessa energia cinetica. Qual è la sua velocità in km/s? riportare qui i calcoli

- ☒ 33400
- ☐ 6800 [Sol: 1; $\gamma_\mu = 1 + m_e/m_\mu(\gamma_e - 1)$]
- ☐ 24000

$$T_{el} = \cancel{m}(\gamma(0.9c)-1)\cancel{c^2} = 207\,\cancel{m}(\gamma(v)-1)\cancel{c^2} = T_\mu$$

$$\gamma(0.9c) - 1 = 207\,\gamma(v) - 207$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\gamma(0.9c)+206}{207}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{207}{\gamma(0.9c)+206}\right)^2$$

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{207}{\gamma(0.9c)+206}\right)^2} = 33\,390 \text{ km/s}$$

$$\gamma(0.9c) = \frac{1}{\sqrt{1-0.9^2}}$$

L'energia dello stato fondamentale di un atomo di idrogeno è -13.6 eV. In quale transizione viene assorbito un fotone di frequenza 4.56 10^{14}Hz?

($h = 4.14 \times 10^{-15}$ eV s)

- ☐ da $n = 1$ a $n = 2$
- ☐ da $n = 5$ a $n = 3$
- ☒ da $n = 2$ a $n = 3$

[Soluzione: 3]

$$E_n = \frac{-13.6\,eV}{n^2}$$

$$E_\gamma = |E_{n_i} - E_{n_f}| = \nu h$$

$$\left| -\frac{13.6}{n_i^2} + \frac{13.6}{n_f^2} \right| eV = (4.56 \cdot 10^{14}\,Hz)(4.14 \cdot 10^{-15}\,eV\,s)$$

$$= 1.88784$$

$$\left| \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right| = \frac{1.88784}{13.6} = 0,138812$$

$n=1 \to n=2$? $\quad \left| \frac{1}{4} - 1 \right| = 0,75$: NO

$n=5 \to n=3$? $\quad \left| \frac{1}{9} - \frac{1}{25} \right| = 0,071$: NO

$n=2 \to n=3$? $\quad \left| \frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right| = 0,1388$: SI

L'astronave Kelvin si allontana dalla Terra con velocità $0.99c$. L'astronave Ehrenfest l'insegue. La Kelvin punta contro la Ehrenfest un potente laser di frequenza 10^{18}Hz. L'equipaggio della Ehrenfest misura $9\ 10^{16}$ per la frequenza del laser, sotto la soglia di pericolosità, e prosegue nell'inseguimento. Quali sono le loro chances di raggiungere la Kelvin? A quale velocità si muove la Ehrenfest *rispetto alla Terra*? [Sol: β_E rispetto a K è -0.98393, β_E rispetto a Terra 0.2343. La E non raggiungerà mai la Kelvin]

$v_K = 0,99\,c$

$$\frac{\nu}{\nu'} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{10^{18}\,Hz}{9 \cdot 10^{16}\,Hz} = \frac{100}{9}$$

ν: EMESSA

ν': OSSERVATA

$$\rightsquigarrow \frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{10^4}{81} \to 1+\beta = \frac{10^4}{81} - \frac{10^4}{81}\beta$$

$\rightarrow 124,46\,\beta = 122,46 \rightarrow \beta = 0,984$, ma !,
SI AVVICINANO $\Rightarrow \beta < 0 \Rightarrow \beta = -0,984$ di E risp. a K.

Vel. rel. di E risp. a K: $v_{rel} = \beta c = -0,984\,c$

Vel. di E risp. alla Terra: $u_x = \dfrac{u_x' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u_x'}$

$(u_x' = v_{rel}$ e $v = v_K)$

$$v_B = u_x = \frac{v_{rel} + v_K}{1 + \frac{v_K}{c^2} v_{rel}} = \frac{-0,984c + 0,99c}{1 - 0,984 \cdot 0,99} = 0,23\,c$$

$v_B < v_K \Rightarrow$ B non raggiungerà mai K.

Le sirene di due navi hanno frequenza 400 Hz. Una delle navi è ferma in porto mentre l'altra si avvicina con velocità 1.7 m/s (vel. suono 340m/s). Quando entrambe suonano la sirena si avvertono sulla banchina battimenti di frequenza

- [x] 4Hz
- [ ] 1Hz
- [ ] 2Hz

BATTIMENTI: Sottraz. delle frequenze.

EFFETTO DOPPLER:

Effetto Doppler:

$$\nu = \frac{v - v_{ricevitore}}{v - v_{sorgente}} \nu_0,$$

dove:

- ν è la frequenza percepita,
- ν_0 è la frequenza naturale dell'onda,
- v è la velocità di propagazione dell'onda nel mezzo,

(1) $v_S = 1,7$ m/s $\quad v_R = 0$ m/s

$$\Rightarrow \nu = \frac{340}{340-1{,}7} \cdot 400\ Hz \sim 402{,}01\ Hz$$

② $v_S = 0\ m/s \qquad v_R = 1{,}7\ m/s$

$$\Rightarrow \nu = \frac{340-1{,}7}{340} \cdot 400\ Hz = 398\ Hz$$

$\rightsquigarrow$ $402 - 398\ Hz = 4\ Hz.$

Uno schermo è posto a 2m da una fenditura illuminata con luce di lunghezza d'onda 650nm. Se la distanza tra primo e secondo minimo nella figura di diffrazione è 5mm, la fenditura ha larghezza

- ☐ 0.44 mm
- ☐ 0.52 mm
- ☒ 0.26 mm

$L = 2m \qquad \lambda = 650 \cdot 10^{-9}\ m \qquad d = 5 \cdot 10^{-3}\ m$

$$\Delta x = \frac{L}{d}\lambda = \frac{(2\ m)}{(5 \cdot 10^{-3}\ m)}(650 \cdot 10^{-9}\ m)$$

$= 0{,}26\ mm$

L'intervallo tra due eventi A e B, Δs^2_{AB}, è di tipo tempo. Segue che

- ☐ A è causa di B o viceversa
- ☒ esiste un SRI in cui A e B coincidono spazialmente
- ☐ esiste un SRI in cui A e B sono simultanei

Quale di queste affermazioni si riferisce a una quantità invariante relativistica?

- ☐ si trasforma in maniera simmetrica
- ☒ ha lo stesso valore in ogni SRI
- ☐ è covariante a vista

Calcolare la velocità di un elettrone ($m = 9.11\ 10^{-31}$kg) la cui lunghezza d'onda di De Broglie è 2.5×10^{-12}m ($h = 6.63\ 10^{-34} Js$)

- ☐ $0.6c$
- ☒ $0.7c$
- ☐ $0.8c$

$$\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|} = \frac{h}{m\gamma(v)v}$$

$$\frac{6,63}{2,5 \cdot 9,11}$$

$$\gamma v = \frac{h}{m\lambda}$$

$$-34+31+12=9$$

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{h}{m\lambda}$$

$$\frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{h^2}{m^2\lambda^2}$$

$$v = \frac{\frac{h}{m\lambda}}{\sqrt{1+\frac{h^2}{m^2\lambda^2c^2}}} = \ldots$$

Un fascio di luce laser forma un angolo $\pi/3$ rispetto alla normale ad una lastra di vetro speciale ($n = 1.732 \approx \sqrt{3}$) spessa 10cm. Determinare la distanza tra le rette che individuano la direzione del fascio prima e dopo il passaggio attraverso il vetro

- ☒ 5.8 cm
- ☐ 6.7 cm
- ☐ 2.8 cm

$n_1 = 1$

$n_2 = \sqrt{3}$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$d = h\,\frac{\sin(\pi/3 - \pi/6)}{\cos(\pi/6)} = h\,tg(\pi/6) = 5.77\ cm$$

Un esperimento di Young è realizzato con luce di frequenza 4.4×10^{14}Hz e distanza fenditure-schermo di 2m. La distanza tra il secondo e il terzo nodo è di 2 mm. Determinare la distanza tra le fenditure. Descrivere che cosa cambia sullo schermo se la frequenza della luce aumenta.

- ☐ 0.34mm
- ☒ 0.68mm
- ☐ 0.17mm

[Soluzione: 2.]

$$\Delta = \frac{\lambda}{d}L = \frac{L}{d}\frac{c}{\nu} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{L}{\Delta}\frac{c}{\nu} = 0{,}68\,mm$$

Diminuisce la distanza tra i nodi, Δ.

Un elettrone ha velocità 0.8c. Un muone (massa 207 volte quella dell'elettrone) ha la stessa energia cinetica. Qual è la sua velocità in km/s? riportare qui i calcoli

- ☐ 180000
- ☐ 2100
- ☒ 24000

$$T_e = (\gamma(0.8c) - 1)\cancel{m_e c^2} = (\gamma(v)-1)\,207\,\cancel{m_e c^2} = T_\mu$$

$$\gamma(0.8c) = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = 1{,}67$$

$$\gamma = \frac{0{,}67}{207} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{207{,}67}{207}$$

$$v = \sqrt{1-\left(\frac{207}{207{,}67}\right)^2}\ c = 24.079\ \text{km/s}$$

Calcolare il numero di fotoni emessi per secondo da una lampada di potenza 10W che emette luce di lunghezza d'onda 600 nm ($h = 6.63 \times 10^{-34} J\, s$).

- ☐ 5.1×10^6
- ☒ 3×10^{19}
- ☐ 9.8×10^{17}

$$P = NE \qquad N = \frac{P}{E} = \frac{P}{\nu h} = \frac{P\lambda}{ch} =$$

$$= \frac{(10\ \text{J/s})(6 \cdot 10^{-7}\ \text{m})}{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Js})(3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s})} = 3 \cdot 10^{19}$$ fotoni per secondo

Le astronavi Poincaré (P) e Born (B) viaggiano in direzioni opposte con velocità $0.2c$ rispetto al Sole. Calcolare la velocità di P rispetto a B e viceversa. L'astronave Majorana è all'inseguimento della P con velocità $0.1c$ rispetto a P sulla stessa rotta. Qual'è la velocità della Majorana rispetto al Sole?

[soluzione: $v'_P = -0.38c$, $v_M = -0.294c$]

SRi SOLE: $v_P = -0{,}2c$

SRi (B): $v_P' = \dfrac{v_P - v_B}{1 - \frac{v_B v_P}{c^2}} = -\dfrac{2(0{,}2)c}{1-\frac{(-0{,}2)(0{,}2)c^2}{c^2}} = -0{,}38c$

SRi (P) : $v_M' = \dfrac{v_M - v_P}{1 - \dfrac{v_P v_M}{c^2}}$ $\quad v_M' = 0,1c$

$v_P = -0,38c$

$$\Rightarrow v_M - v_P = v_M' - v_M \frac{v_P v_M'}{c^2}$$

$$v_M \left(1 + \frac{v_P v_M'}{c^2}\right) = v_M' + v_P$$

$$v_M = \frac{v_M' + v_P}{1 + \dfrac{v_P v_M'}{c^2}} = \frac{0,1c - 0,38c}{1 + \dfrac{(-0,38c)(0,1c)}{c^2}} =$$

$$= -0,3c$$

Un fascio di luce laser forma un angolo $\pi/3$ rispetto alla normale ad una lastra di vetro speciale ($n = 1.732 \approx \sqrt{3}$) spessa 20cm. Determinare la distanza tra le rette che individuano la direzione del fascio prima e dopo il passaggio attraverso il vetro

- ☐ 5.2 cm
- ☐ 7.7 cm
- ☒ 11.5 cm

$$d = h \, tg\,\theta_2 = 20\,cm \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 11.54\,cm$$

$$h = 20\,cm$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

$$\sin\theta_2 = \frac{n_2}{n_1} \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

Un esperimento di Young è realizzato con luce di frequenza 4.4×10^{14}Hz e distanza fenditure-schermo di 2m. La distanza tra il primo e il secondo nodo è di 2 mm. Determinare la distanza tra le fenditure. Descrivere che cosa cambia sullo schermo se la frequenza della luce aumenta.

- ☐ 0.34mm
- ☐ 0.17mm
- ☒ 0.68mm

$$\Delta = \frac{L}{d}\lambda = \frac{L}{d}\frac{c}{\nu} \Rightarrow d = \frac{L}{\Delta}\frac{c}{\nu} = 0{,}68 \cdot 10^{-3}\,m$$

FREQ. AUM. => DIMINUISCE LA DIST. TRA NODI

In relatività se due eventi sono simultanei nel SRI K, nel SRI K' in moto relativo rispetto a K

- ☐ non sono mai simultanei
- ☐ sono sempre simultanei
- ☒ nessuna delle precedenti

Un elettrone ha velocità $0.91c$. Un muone (massa 207 volte quella dell'elettrone) ha la stessa energia cinetica. Qual è la sua velocità in km/s? riportare qui i calcoli

- ☐ 150000
- ☒ 35000 [soluzione: 2.]
- ☐ 24000

$$(\gamma(0.91c) - 1)\cancel{m}\cancel{c^2} = (\gamma(v) - 1)\, 207\, \cancel{m}\cancel{c^2}$$

$$\gamma(v) = \frac{(\gamma(0.91c) + 206)}{207}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(\gamma(0.91c) + 206)}{207}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{207}{\gamma(0{,}91c) + 206}\right)^2$$

$$v = \sqrt{1 - \left(\frac{201}{\gamma(0,91c) + 206}\right)^2}\; c$$

$$= 34\,861 \text{ km/s}$$

Calcolare il numero di fotoni emessi per secondo da una lampada di potenza 20W che emette luce di lunghezza d'onda 500 nm ($h = 6.63 \times 10^{-34} J\,s$).

- ☐ 7.1×10^7
- ☐ 9.8×10^{18} [soluzione: 3.]
- ☒ 5×10^{19}

$$P = NE = Nh\nu \Rightarrow N = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc}$$

$$= \frac{(500 \cdot 10^{-9}\text{ m})(20\text{ W})}{(6,63 \cdot 10^{-34}\text{ Js})(3 \cdot 10^8\text{ m/s})} = 5,027 \times 10^{19}$$

FOTONI/S

Scrivere la funzione a) di un'onda armonica piana di lunghezza d'onda λ e velocità v che si propaga lungo l'asse z; b) di un'onda armonica sferica con le stesse caratteristiche in coordinate sferiche.

a) $\xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi)$

$$\omega = kv = \frac{2\pi}{\lambda} v$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{u}_z = \left(0, 0, \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

$$\rightsquigarrow \xi(\vec{r}, t) = \xi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \frac{2\pi}{\lambda} v t + \varphi\right)$$

b) $\xi(r, t) = \dfrac{\xi_0}{r} \sin\left(\dfrac{2\pi}{\lambda} r - \dfrac{2\pi}{\lambda} v t + \varphi\right)$

Un esperimento di interferenza di Young è condotto con luce monocromatica. Le due fenditure distano 0.60 mm, lo schermo è posto a 5.00 m, e il primo massimo laterale viene osservato a 4.20 mm dal centro della figura. Qual è la lunghezza d'onda?

- ☐ 469nm
- ☒ 504nm [Soluzione: 2]
- ☐ 488 nm

$d = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ m

$L = 5$ m

$\Delta = 4{,}2 \cdot 10^{-3}$ m

$\Delta = \frac{L}{d}\lambda \Rightarrow \lambda = \Delta \frac{d}{L} = 5{,}04 \cdot 10^{-7}$ m

---

Una barra ha lunghezza propria L. Un osservatore in moto relativo rispetto alla barra con velocità $0.8c$ ne misura la lunghezza e trova $0.79\,L$. L'angolo tra la direzione del moto relativo e la barra nel SRI in cui questa è ferma è

- ☐ 0°
- ☒ 40°
- ☐ 60°

[Soluzione: 2]

$L' = \frac{L}{\gamma}$

$v = 0{,}8\,c \cdot \cos\alpha$

$\gamma = \frac{L}{L'} = \frac{1}{0{,}79}$

$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{0{,}79}$

$v = \sqrt{1 - (0{,}79)^2}\; c$

$0{,}8\,\cancel{c}\,\cos\alpha = \sqrt{1-(0{,}79)^2}\;\cancel{c}$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{1-(0{,}79)^2}}{0{,}8} \rightarrow \alpha = 39{,}96°$$

Quale di queste grandezze fisiche è un invariante relativistico?

- ☐ la frequenza di un fotone
- ☒ la carica elettrica
- ☐ il campo elettrico

[Soluzione: 2]

Un protone di massa m_p proveniente dallo spazio penetra nell'atmosfera terrestre con velocità $0.9c$ e urta un nucleo di ossigeno di massa $m_O = 16m_p$ a riposo. Il numero massimo di particelle di massa m_p cui la collisione può dar luogo è

- ☐ 18
- ☐ 13
- ☐ 20

$$m_p\,\gamma(0.9c)\,c^2 + 16\,m_p\,\gamma(0)\,c^2 = N\,m_p\,c^2$$

$$N = \gamma(0.9c) + 16 = 18{,}3 \rightarrow 18$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 2{,}3$$

Due protoni sono diretti l'uno contro l'altro a velocità $0.97c$. Qual è la loro velocità relativa v_{rel}? Qual è il numero massimo n_{max} di protoni che possono essere prodotti nella collisione? $\boxed{v_{rel} = \qquad , n_{max} = \qquad}$ [$n_{max} = 8$, $v_{rel} = 0.99954c$]

SOMMA EN. = EN. MASSA FINALE

$$m_p\,\gamma(0.97c)\,c^2 + m_p\,\gamma(-0.97c)\,c^2 = n_{max}\,m_p c^2$$

$$n_{max} = 2\,\gamma(0{,}97c) = 2 \cdot 4{,}11 = 8{,}22 \rightarrow 8$$

$$v_{rel} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = 0{,}99954\, c$$

Due protoni sono diretti l'uno contro l'altro a velocità $0.95c$. Qual è il numero massimo di protoni che possono essere prodotti nella collisione?

- ☐ 4
- ☐ 7
- ☒ 6

$$2 m_p \gamma(0.95c)\, c^2 = N m_p c^2$$

$$N = 2\gamma(0.95c) = \frac{2}{\sqrt{1-(0{,}95)^2}} = 6.4$$

Due protoni sono diretti l'uno contro l'altro a velocità $0.9c$. Qual è il numero massimo di protoni che possono essere prodotti nella collisione?

- ☒ 4
- ☐ 7
- ☐ 6

$$N = 2\gamma(0.9c) = \frac{2}{\sqrt{1-(0{,}9)^2}} = 4{,}58 \to 4$$

Una stella di una lontana galassia emette fotoni di energia E_0 e si allontana dalla Via Lattea (e quindi dalla Terra) con velocità non lontana da quella della luce. I fotoni vengono osservati sulla Terra e la loro energia E_T risulta

- ☒ $E_T < E_0$
- ☐ $E_T > E_0$ [Soluzione: 1]
- ☐ $E_T = E_0$

Una sorgente S emette particelle di massa m e velocità u lungo l'asse x. Scrivere le componenti del quadrimpulso delle particelle e la loro frequenza di De Broglie. Quali sono le componenti del quadrimpulso delle particelle per un osservatore O in moto con velocità v lungo l'asse x?

- $p^\mu = m u^\mu = m\gamma(u)\,(c, u_x, 0, 0)$

- $\nu = \dfrac{E}{h} = \dfrac{m\gamma(u)c^2}{h}$

- $$p^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} m\gamma(u) \begin{pmatrix} c \\ u_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m\gamma(u) \begin{pmatrix} \gamma(v)c - \beta\gamma(v)u_x \\ -\beta\gamma(v)c + \gamma(v)u_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m\gamma(u)\gamma(v) \begin{pmatrix} c\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right) \\ u_x - v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p'^\mu = m\gamma(u)\gamma(v)\left(c\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right), u_x - v, 0, 0\right)$$

$$= m\gamma(u')\,(c, u_x', 0, 0)$$

con $\gamma(u') = \gamma(u)\gamma(v)\left(1 - \frac{v}{c^2}u_x\right)$

$u_x' = u_x - v$

Una sorgente S emette fotoni di frequenza ν_0 lungo l'asse x. Scrivere le componenti del quadrimpulso dei fotoni in termini di ν_0. Quali sono le componenti del quadrimpulso dei fotoni per un osservatore O in moto con velocità v lungo l'asse x?

SI AVVICINANO!

1) $p^\mu = (p^0, \vec{p}) = \left(\frac{h\nu_0}{c}, \frac{h\nu_0}{c}, 0, 0 \right)$

2) $p'^\mu = (p'^0, p_x', 0, 0)$

$$p'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^0 \\ p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$p'^0 = \gamma(v)\left(p^0 - \frac{v}{c} p_x\right) = \gamma(v) p^0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$p_x = p^0 \cos\alpha = p^0$$

$$p'_x = \gamma(v)\left(-\frac{v}{c} p_0 + p_x\right) = \gamma(v) p^0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

$$\Rightarrow p'^\mu = \gamma(v) \underbrace{\frac{h\nu}{c}}_{p_0} \left(1 - \frac{v}{c}, 1 - \frac{v}{c}, 0, 0\right)$$

La frequenza fondamentale di una corda di chitarra è 200 Hz. Una seconda corda, identica alla prima, se pizzicata simultaneamente dà luogo a battimenti di frequenza 5Hz. Qual è il rapporto fra le tensioni applicate alle due corde?

- [x] 0.951
- [ ] 1.062 [soluzione: 1]
- [ ] 0.822

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T_c}{\rho_l}}$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_{c1}}{\rho_l}} \qquad f_2 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_{c2}}{\rho_l}}$$

$$f_2 = f_1 + 5\,Hz$$

$$\Rightarrow \frac{T_{C1} = 4\cancel{L^2} f_1^2 \cancel{\rho\ell}}{T_{C2} = 4\cancel{L^2} f_2^2 \cancel{\rho\ell}} = \frac{f_1^2}{f_2^2} = \frac{200^2}{205^2} = 0,951$$

Un reticolo di interferenza ha un numero molto grande di fenditure a distanza $d = 0.01$mm e viene attraversato da un fascio di luce gialla di frequenza 5.1×10^{14}Hz. Descrivere che cosa si osserva su uno schermo distante 10 m e calcolare la distanza tra il massimo centrale e il primo massimo.

- ☒ 58.9cm
- ☐ 72.2cm [soluzione: 1.]
- ☐ 94.1cm

$$\Delta = \frac{L}{d}\lambda = \frac{L}{d}\frac{c}{\nu} = \frac{10\,\cancel{m}}{10^{-5}\,\cancel{m}} \cdot \frac{3\cdot10^8\ m/\cancel{s}}{5,1\cdot10^{14}\ \cancel{Hz}} = 0,588\ m$$

Definire un invariante relativistico e un quadrivettore. [Soluzione: Una grandezza fisica è un'invariante relativistica se è invariante per TL, cioè assume lo stesso valore in tutti i SRI. Un generico quadrivettore A^μ è una quaterna di quantità fisiche che nel passaggio da un SRI a un altro si trasformano esattamente come $x^\mu = (ct, \vec{x})$, ovvero $A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$.]

Se l'intervallo tra due eventi A e B, Δs^2_{AB}, è di tipo spazio, A e B

- ☐ possono essere l'uno causa dell'altro
- ☒ esiste un SRI in cui sono simultanei [Soluzione: 2.]
- ☐ A e B sono fuori del cono di luce

Due protoni sono in moto l'uno verso l'altro con velocità $\pm0.8c$. La loro velocità relativa è

- ☐ $0.94c$
- ☐ $1.6c$ [Soluzione: 3.]
- ☒ $0.98c$

$$v_{rel} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2(0.8c)}{1+0.8^2} = 0,976\,c$$

L'energia dello stato fondamentale ($n = 1$) di un atomo di idrogeno è -13.6 eV. Nel passaggio dallo stato $n = 2$ a quello $n = 4$ ($h = 4.14 \times 10^{-15}$ eV s)

- ☐ viene emesso un fotone di frequenza ...
- ☒ viene assorbito un fotone di frequenza ... [Sol.: 2. $f = 6.16\,10^{14}$ Hz]
- ☐ vengono emessi due fotoni di frequenza ...

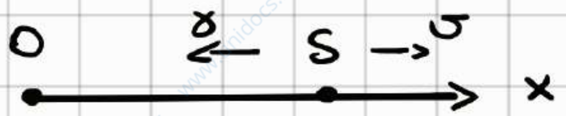
$n_i < n_f \rightarrow$ ASSORBITO

$$E = \nu h = |E_{n_i} - E_{n_f}| = \left| -\frac{13.6\text{ eV}}{4} + \frac{13.6\text{ eV}}{16} \right| =$$

$$= \left| -\frac{3}{16} \cdot 13.6\text{ eV} \right| = 2.55\text{ eV}$$

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{2.55\text{ eV}}{4.14 \cdot 10^{-15}\text{ eV s}} = 6,16 \cdot 10^{14}\text{ Hz}$$

Una sorgente S in moto con velocità $+v$ lungo l'asse x rispetto all'osservatore O emette un fotone verso O che ne misura la frequenza ν. *i*) Scrivere le componenti del quadrimpulso del fotone nel SRI di O. *ii*) Scrivere la componente temporale del quadrimpulso del fotone nel SRI di S, usando le TL. *iii*) derivare la frequenza ν' del fotone alla sorgente. *iv*) spiegare il significato del termine *redshift*. [Soluzione: vedi appunti di relatività]



(se si avvicinano invece che all., es. sopra, il − è un +)

1) $p^\mu = \left(\frac{h\nu}{c}, -\frac{h\nu}{c}\cos\alpha, 0, 0 \right)$

$= \left(\frac{h\nu}{c}, -\frac{h\nu}{c}, 0, 0 \right)$

2) $$p'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ -\frac{h\nu}{c} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p'^0 = \gamma(v) \frac{h\nu}{c} \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

3) Ma $p'^0 = \frac{h\nu'}{c}$

$$\Rightarrow \frac{h\nu'}{c} = \frac{h\nu}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (1+\beta)$$

$$\nu' = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta}\sqrt{1+\beta}} \nu = \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} \nu$$

$$\Rightarrow \nu' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \nu$$

Un faretto LED è immerso in una vasca di alcol etilico (indice di rifrazione $n = 1.36$) a 2m dalla superficie ed emette luce gialla di frequenza 5.09×10^{14} Hz. Quali sono la lunghezza d'onda della luce nell'alcol e il diametro del cerchio di luce sulla superficie attraverso cui la luce esce dalla vasca?

- ☒ $\lambda = 433\text{nm}, 4.34\text{m}$
- ☐ $\lambda = 433\text{nm}, 3.17\text{m}$
- ☐ $\lambda = 564\text{nm}, 2.45\text{m}$

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\nu\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu \cdot n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{(5.09 \cdot 10^{14}\text{Hz})(1.36)} =$$

$$= 0{,}433 \cdot 10^{-6}\ m$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \overbrace{\sin\theta_1}^{1}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1{,}36}\right) = 47{,}33°$$

$$d = 2h\, tg\theta_2 = 4m \cdot tg(47{,}33°) = 4{,}34\ m$$

. Un elettrone e un positrone con velocità trascurabile nel SRI K si annichilano. Ricordando che $h = 6.6 \times 10^{-34} J\,s$, $q_e = 1.6 \times 10^{-19} C$, e $m_e = 511 \text{KeV}/c^2$, calcolare in K l'energia, la lunghezza d'onda e il momento dei fotoni emessi. Un'astronave in moto rispetto a K con velocità $0.5c$ nella direzione di uno dei fotoni ne misura la frequenza; con quale risultato?

$$e^+ - e^- \rightarrow \gamma\gamma$$

- $E_\gamma = mc^2 = 511 \frac{KeV}{\cancel{c^2}} \cdot \cancel{c^2} = 511\ KeV$
- $E_\gamma = \nu h = \frac{c}{\lambda} h \Rightarrow \lambda = \frac{ch}{E_\gamma} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\ m$
- $|\vec{p}| = \frac{E_\gamma}{c} = mc = 511 \frac{keV}{c}$
- In dir. del fotone: si avvicina

$\Rightarrow \alpha = 0$

$$\nu = \gamma(v)\left(1 + \beta \cos(\alpha)\right) \nu'$$

Em. oss.

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma(v)(1+\beta\cos\alpha)} = \nu \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \nu\ 0.577$$

$$= 7{,}13 \cdot 10^{-19}\ Hz$$

Un fascio di luce laser forma un angolo $\pi/3$ rispetto alla normale ad una lastra di vetro speciale ($n = 1.732 \approx \sqrt{3}$) spessa 20cm. Determinare la distanza tra le rette che individuano la direzione del fascio prima e dopo il passaggio attraverso il vetro

- ☐ 5.2 cm
- ☐ 7.7 cm
- ☒ 11.5 cm

[Soluzione: 3. $\theta_2 = \pi/6$, $d = 20cmtanpi/6 = 11.5cm$]

$$d = h \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_2)}$$

$$= 20\text{cm} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})}{\cos(\pi/6)} =$$

$$= 11,5 \text{ cm}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{n_2} \sin\theta_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \pi/6$$

Un fascio di luce laser forma un angolo $\pi/3$ rispetto alla normale ad una lastra di vetro speciale ($n = 1.732 \approx \sqrt{3}$) spessa 10cm. Determinare la distanza tra le rette che individuano la direzione del fascio prima e dopo il passaggio attraverso il vetro

- ☒ 5.8 cm
- ☐ 6.7 cm
- ☐ 2.8 cm

[Soluzione: 1. $\theta_2 = \pi/6$, $d = 10cm/cos(\pi/6)sin(\pi/6) = 1.49cm$]

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$d = 10 \text{ cm} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})}{\cos(\pi/6)} = 5,77 \text{ cm}$$

Un fascio di luce laser incide ad un angolo $\pi/4$ su una lastra di vetro spessa 5cm. Determinare la distanza tra le rette che individuano la direzione del fascio prima e dopo il passaggio attraverso il vetro, il cui indice di rifrazione è 1.4142.

- ☒ 1.49 cm
- ☐ 1.94 cm
- ☐ 0.67 cm

[Soluzione: 1. $\theta_2 = \pi/6$, $d = 5cm/cos(\pi/6)sin(\pi/12) = 1.49cm$]

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$d = 5\,cm\,\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos(\theta_2)} = 5\,cm \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos(\pi/6)} = 1{,}49\,cm$$

Un muone cosmico si dirige verso la Terra con velocità $0.995c$. Qual è la sua vita media per un osservatore a Terra? (la vita media di un muone a riposo è $2.2\ \mu s$)

- ☐ $10\,\mu s$
- ☐ $4\,\mu s$
- ☐ $22\,\mu s$

$$\Delta t' = \gamma\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}995^2}}\cdot 2.2\,\mu s =$$

$$= 22\,\mu s.$$

Il quadrivettore a^μ ha componenti (a_0, a_x, a_y, a_z) nel SRI K. Scrivere le sue componenti nel SRI K' in moto lungo l'asse x con velocità v e nel SRI K'' in moto rispetto a K' con velocità v' sempre lungo x. Scrivere il fattore di Lorentz della TL necessaria per passare direttamente da K a K'' e spiegare quest'ultimo usando le trasformazioni delle velocità.

1) $$a'^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} =$$

$$= \gamma(v)\begin{pmatrix} a_0 - \beta a_x \\ a_x - \beta a_0 \\ a_y/\gamma(v) \\ a_z/\gamma(v) \end{pmatrix}$$

Le sirene di due navi hanno la stessa frequenza di 400 Hz. Una delle navi è ferma in porto mentre l'altra si allontana. Quando entrambe suonano la sirena si avvertono sulla banchina battimenti di frequenza 2.00 Hz. Che velocità ha la nave in moto?

- ☐ 0.8 m/s
- ☐ 1.7 m/s
- ☐ 3.4 m/s

$$\nu = \frac{v - v_R}{v - v_S} \nu_0$$

- $\nu_0 = 400\,Hz$
- $\nu_0 - \nu = 2\,Hz$
- $v_S = 0$
- $v_R = ?$
- $v = 340\,m/s$

$$\nu v = \nu_0 v - \nu_0 v_R$$

$$v_R = \frac{(\nu_0 - \nu)}{\nu_0} v$$

$$\nu = \frac{v - v_R}{v - v_S} \nu_0 \qquad (v_R = 0)$$

$$\nu v - \nu v_S = \nu_0 v$$

$$v_S = \frac{(\nu - \nu_0) v}{\nu} = 1{,}7\ m/s$$

Una barra di lunghezza propria L forma un angolo di 45° con l'asse x. Per un osservatore in moto con velocità $\frac{3}{5}\sqrt{2}c$ lungo l'asse x la lunghezza della barra è

- ☒ 4/5 L
- ☐ 5/4 L
- ☐ 3/5 L

$$L_x = L \cos 45°$$

$$L'_x = \frac{L}{\gamma} \cos 45°$$

$$L_y = L'_y = L \sin 45°$$

$$L' = \sqrt{L'^2_x + L'^2_y}$$

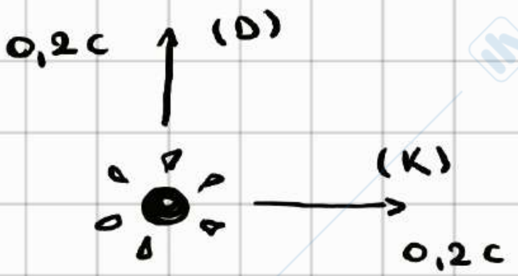
$$= \sqrt{\frac{L^2}{\gamma^2}\,\frac{1}{2} + L^2\,\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} L \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + 1} =$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} =$$

$$= 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} L \,\frac{4\sqrt{2}}{5} = \frac{4}{5} L$$

Le astronavi Kapitza (K) e Dirac (D) viaggiano in direzioni ortogonali a velocità $0.2c$ rispetto al Sole. Calcolare le componenti e il modulo della velocità della D misurata dall'equipaggio della K e viceversa.



$$u^{\mu}_D = \gamma(u)(c, \overbrace{0, u_D, 0}^{\vec{u}_D}) \quad , \quad v = u_K = 0{,}2c$$

$$\Rightarrow u'^{\mu}_{D} = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -\beta\gamma(v) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(u)c \\ 0 \\ u_D \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma(v)\gamma(u)c \\ -\beta\gamma(v)\gamma(u)c \\ u_D \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \gamma(u)\gamma(v)\left(c, -v, \frac{u_D}{\gamma(u)\gamma(v)}, 0 \right)$$

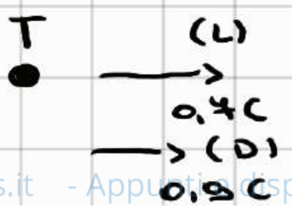
$$\Rightarrow \vec{u}'_D = \left(\underset{\displaystyle -\frac{1}{\sqrt{1-0{,}2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-0{,}2^2}} \cdot 0{,}2c}{\underset{\shortparallel}{-\gamma(u)\gamma(v)v}}, \overset{0{,}2c}{\overset{\shortparallel}{u''_D}}, 0 \right) =$$

$$= (-0.2083c, 0.2c, 0)$$

$$\Rightarrow u'_D = \sqrt{0.2083^2 c^2 + 0.2^2 c^2}$$

$$= 0{,}29\,c$$

L'astronave Landau si allontana dalla Terra alla velocità di $0.7c$. L'astronave Dirac l'insegue alla velocità di $0.9\,c$ relativa alla Terra. Qual è la velocità relativa delle due astronavi per *a*) l'equipaggio della Dirac; *b*) l'equipaggio della Landau?



$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x}$$

a) $$v_L' = \frac{v_L - v_D}{1 - \frac{v_D}{c^2} \cdot v_L} = \frac{(0.7 - 0.9)c}{1 - (0.7)(0.9)} = -0{,}54\,c$$

b) $$v_D' = \frac{v_D - v_L}{1 - \frac{v_L}{c^2} v_D} = \frac{(0.9 - 0.7)c}{1 - (0.9)(0.7)} = 0{,}54\,c$$

Le sirene di due treni hanno la stessa frequenza di 300 Hz. Uno dei treni è fermo in stazione, mentre l'altro sta arrivando. Quando entrambi suonano la sirena si avvertono in stazione battimenti di frequenza 2.00 Hz. Che velocità ha il treno in moto? (la velocità del suono è 340 m/s)

- ☐ 1.13 m/s
- ☒ 2.25 m/s
- ☐ 4.47 m/s

$$V = \frac{v - v_{RICEVITORE}}{v - \cancel{v_{SORGENTE}}} V_0 \qquad V = V_0 - \frac{v_R}{v} V_0$$

$$v_R = \frac{V_0 - V}{V_0} v = 2{,}26\ m/s$$