

CAMPO ELETTRICO

LEGGE DI COULOMB.

$$|\mathbf{F}_{a,b}| = \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0 r_{a,b}^2}$$

Per calcolare il *modulo* della forza agente su due cariche elettriche di carica q_a e q_b , rispettivamente poste ad una distanza relativa r . *Direzione*: lungo la congiungente le due cariche. *Verso*: dipende dal segno delle cariche, **attrattiva** se sono di carica opposta, **repulsiva** se hanno la stessa carica.

CAMPO E POTENZIALE DI UNA CARICA PUNTIFORME.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \bar{u}_r \quad (\text{grandezza vettoriale}) \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (\text{grandezza scalare}) \quad (2)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (3)$$

$$V = -\int_{\infty}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{W_{\infty B}}{q_0} \quad (4)$$

(\mathbf{E} tende a “conservare”, si oppone a una variazione di potenziale in positivo, porta a “punti a potenziale minore”. In genere il gradiente, punta verso punti a potenziale maggiore. Il campo è orientato in modo opposto. Notare che è il gradiente a fare passare, come noto, da grandezza scalare a vettoriale).

ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA DI UN SISTEMA DI DUE CARICHE.

$$W = V_2 q_1 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r} \right) q_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

$$W = V_1 q_2 = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r} \right) q_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$

Definita come il lavoro W speso dalle forze del campo per portare la carica dal punto in cui il potenziale vale V fino all'infinito (dove si assume $V = 0$).

In genere, per sistemi a più cariche si ha: $W = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}; i \neq j$

$$\begin{array}{llll} \mathbf{F} \approx \frac{q_1 q_2}{r^2} & W \approx \frac{q_1 q_2}{r} & \rightarrow & \mathbf{F} = -\nabla W \\ \mathbf{E} \approx \frac{q_1}{r^2} & V \approx \frac{q_1}{r} & \rightarrow & \mathbf{E} = -\nabla V \end{array}$$

DIPOLO ELETTRICO: CAMPO, POTENZIALE, MOMENTO.

Un dipolo elettrico (due cariche uguali q , di segno opposto), posto in un campo esterno \mathbf{E} subisce un'azione di un momento $\boldsymbol{\tau}$ che tende ad allinearlo col campo stesso:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

$$p = 2qa$$

(distanza fra le due cariche $d = 2a$).

Componenti del campo \mathbf{E} di un dipolo in un generico punto P:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pxy}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Potenziale in un punto P (a grandi distanze dal dipolo):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}$$

CAMPO ELETTRICO E POTENZIALE GENERATI DA DISTRIBUZIONI DI CARICHE.

1. **DISTRIBUZIONE DISCRETA**: quando si hanno N cariche SINGOLE il campo totale in un punto generico P è la somma dei campi generati da ogni singola carica (calcolato questo tramite la (1)).

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \mathbf{E}_k$$

2. **DISTRIBUZIONE CONTINUA**: si suddivide la carica in infinitesimi, dq e ognuno di essi è trattato come una carica singola, quindi il campo $d\mathbf{E}$ è dato da:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

(si usa quando si vede densità lineare, superficiale, volumica di carica, tipo i prossimi esempi)

FILO INDEFINITO (densità lineare di carica, ρ)

$$|\mathbf{E}| = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

SUPERFICIE PIANA UNIFORMEMENTE CARICA

(densità superficiale di carica, σ)

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

(campo non dipendente dalla distanza r a cui ci si pone, dipende SOLO dalla densità superficiale di carica, σ).

CONDENSATORE a facce piane e parallele

$$|\mathbf{E}| = 2|\mathbf{E}_{\text{lastra}}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(questo serve per esercizi sul moto di particelle cariche in presenza di un campo \mathbf{E} uniforme, tipo la deflessione).

SUPERFICIE SFERICA UNIFORMEMENTE CARICA

1. $r > R$

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

$$V(r_2) - V(r_1) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

2. $r < R$

$\mathbf{E} = 0$ (principio della gabbia di Faraday)

$$V(r) = k = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

(cioè assume lo stesso valore che ha sulla superficie stessa, per continuità)

3. $r = R$

$$|\mathbf{E}| = E_R = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$V(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = E_R R$$

SFERA UNIFORMEMENTE CARICA

(vedere lezione per dettagli)

In breve “Il campo è nullo al centro, poi cresce linearmente col raggio r ($E_{\text{interno}} = \frac{qr}{R^3}$), fino a $r =$

R , poi decresce col quadrato del raggio ($E_{\text{esterno}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$); il potenziale invece ha un andamento

proporzionale a $-1/r^2$ dentro alla sfera per poi decrescere con l'inverso del raggio ($1/r$)”.

Qui con raggio r intendo la distanza fra il centro della sfera e il punto interno-esterno alla sfera in esame. R invece è il raggio della sfera.

IMPORTANTISSIMO: la sfera in questo tipo di esercizio **NON** è conduttrice. Se così fosse la carica andrebbe a distribuirsi **TUTTA E SOLO** sulla superficie della sfera. Dato che “un

eccesso di carica, posto su un conduttore isolato, si distribuisce interamente sulla sua superficie esterna”. Il campo dentro sarebbe nullo e il potenziale costante.

ANELLO UNIFORMEMENTE CARICO

$$|\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$V(x) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

A grandi distanze dal centro dell'anello, il campo \mathbf{E} ha l'andamento di quello generato da una carica puntiforme. Mentre al centro è nullo. Una qualsiasi superficie gaussiana sferica concentrica, infatti, non “trova” cariche al suo interno in un intorno infinitesimo del centro dell'anello.

DENSITA' DI ENERGIA.

“Se in un punto dello spazio esiste un campo elettrico \mathbf{E} , si può pensare che in quel punto sia immagazzinata energia nella misura di $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ per unità di volume”.

CIRCUITI R e C, RC, RL.

CAPACITA' DI UN CONDENSATORE.

$$C = \frac{q}{V}$$

(dipende dalla geometria del condensatore, ne diamo tre esempi)

- **CONDENSATORE PIANO** $C = \frac{\epsilon_0 S}{h}$
- **CONDENSATORE SFERICO** $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$
- **CONDENSATORE CILINDRICO** $C = 2\pi\epsilon_0 \frac{l}{\log(R_2 / R_1)}$

CONDENSATORI IN SERIE E PARALLELO.

Dati n condensatori di capacità C_1, C_2, \dots, C_n , la capacità equivalente, C_{eq} è data da:

PARALLELO (V ai capi di ogni condensatore è la stessa)

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

SERIE (carica su ogni armatura è la stessa)

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

LAVORO DI CARICA DI UN CONDENSATORE (inteso anche come energia immagazzinata in un condensatore).

$$W = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2$$

CORRENTI CONTINUE. RETI LINEARI.

$$V = RI$$

RESITENZE IN SERIE E PARALLELO.

Date n resistenze R_1, R_2, \dots, R_n , la resistenza equivalente, R_{eq} è data da:

SERIE (stessa corrente I che le attraversa tutte)

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

PARALLELO (stessa V ai capi di ogni resistenza)

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

POTENZA EROGATA – DISSIPATA.

$$P_{erogata} = VI$$

$$P_{Joule} = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

$$P_{erogata} = P_{Joule}$$

(si derivano tutte fra loro ricordando che $V = RI$)

PRINCIPI DI KIRCHHOFF. RETI ELETTRICHE.

nodi $\sum_k i_k = 0$

maglie $\sum_k R_k i_k = \sum_k V_{0,k}$

Una rete elettrica è formata da un insieme di **rami** e **nodi**. I **rami** sono tratti di conduttori costituiti da elementi attivi (generatori) e passivi (resistori). I **nodi** sono punti in cui convergono almeno 3 rami diversi. All'interno di una rete può essere individuato un determinato numero di cammini chiusi, detti **maglie**. Reti siffatte sono chiamate lineari in quanto lineare è l'equazione che vale per tutti i suoi elementi (Nigro M. e Voci, C., Problemi di Fisica Generale, Ed. Cortina-Padova, 1997). Se i rami di una rete sono L , ci sono L correnti: si dimostra che esse non sono indipendenti fra loro e che, se N è il numero di nodi, il numero di correnti INDIPENDENTI sarà:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} - \mathbf{N} + \mathbf{1}.$$

A ciascuna di esse si può associare una maglia. Le maglie vengono scelte in modo tale che ciascuna di esse abbia almeno 1 ramo che non sia parte della maglia scelta in precedenza.

CIRCUITI RC. COSTANTE DI TEMPO $\tau_C = RC$.

FASE DI CARICA.

$$q = q_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = CV \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$

FASE DI SCARICA

$$q = q_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau_C}}\right)$$

CIRCUITI RL. COSTANTE INDUTTIVA $\tau_L = L/R$.

FASE DI CARICA.

$$i = i_0 \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) = \frac{V}{L} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

FASE DI SCARICA

$$i = i_0 \left(e^{-\frac{t}{\tau_L}}\right)$$

CAMPO DI INDUZIONE MAGNETICA

SPIRA e ROTAZIONE IN PRESENZA DI B. MOMENTO MAGNETICO μ .

$\tau = \mu \times \mathbf{B}$ - momento della coppia di forze magnetiche.

$\mu = NiA$ - momento magnetico μ .

(A è l'area della spira, vale per qualsiasi spira NON solo rettangolare).

PRIMA FORMULA DI LAPLACE. (BIOT-SAVART).

(campo \mathbf{B} generato da una corrente in un conduttore)

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{r^3} d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$$

FILO INDEFINITO.

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r}$$

VERSO E DIREZIONE: regola della mano destra (corrente nel verso del pollice. Campo orientato come le dita arrotolate intorno al pollice).

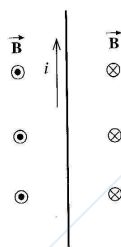


Figura 21.11
Nella regione a destra del filo il campo è entrante rispetto a chi guarda, nella regione a sinistra è uscente.

CAMPO AL CENTRO DELLA SPIRA CIRCOLARE (raggio r).

$$B = \frac{\mu_0 i}{2r}$$

FILO DI FORMA CILINDRICA. (R raggio cilindro)

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}$$

LAMINA PIANA. (a larghezza lamina)

$$B = \frac{\mu_0 i}{\pi a} \arctg\left(\frac{a}{2r}\right)$$

SOLENOIDE (n spire/unità lunghezza)

$$B = \mu_0 i n$$

TOROIDE

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r}$$

RELAZIONE DI LORENTZ (carica in campo magnetico).

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

SECONDA LEGGE DI LAPLACE. (forza agente su un filo percorso da corrente in presenza di \mathbf{B}).

$$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

CONDUTTORI PARALLELI. FORZA AGENTE RECIPROCA.

$$|\mathbf{F}| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l}{d} i_a i_b$$

ATTRATTIVA se le correnti nei due fili hanno verso **CONCORDE**

REPULSIVA se le correnti hanno verso **DISCORDE**



RICAPITOLANDO:**TEOREMA DI GAUSS – FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO**

$$\varepsilon_0 \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = q$$

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

PRIMA EQ. MAXWELL**TEOREMA DI GAUSS. CAMPO MAGNETICO.**

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

SECONDA EQ. MAXWELL**TEOREMA DI AMPERE o DELLA CIRCUITAZIONE di B.**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

TERZA EQ. MAXWELL (se $d\Phi(\mathbf{E})/dt=0$)**LEGGE DI FARADAY. FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA.**

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi(B)}{dt}$$

QUARTA EQ. MAXWELL**Da cui deriva anche:****CIRCUITAZIONE DI E (campo conservativo)**

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

| | | |
|-----------------------|--|----------------------------------|
| ε_0 | $8.85415 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ | Costante dielettrica nel vuoto |
| $1/4\pi\varepsilon_0$ | $9.0 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ | |
| μ_0 | $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb}/\text{A} \cdot \text{m}$ | Permeabilità magnetica nel vuoto |

| | | |
|------|---------------------------------|------------------|
| 1 eV | $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ | Elettronvolt |
| e | $-1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ | Carica elettrone |

UNITA' di MISURA nel SI

| GRANDEZZA | SIMBOLO | UNITA' | - |
|-----------------------------|--------------------|------------------|-------------------------------|
| Carica | q | C | Coulomb |
| Campo elettrico | E | V/m | Volt/metro |
| Capacità | C | F | Farad |
| Energia | U | J | Joule |
| Differenza di potenziale | V | V | Volt |
| Densità di corrente | j | A/m ² | Ampère/metro ² |
| Flusso di E | $\Phi(\mathbf{E})$ | Vm | Volt·metro |
| Flusso di B | $\Phi(\mathbf{B})$ | Wb | Weber |
| Induttanza | L | H | Henry |
| Induzione magnetica | B | T | Tesla (Weber/m ²) |
| Intensità di corrente | I | A | Ampère (C/s) |
| Momento di dipolo elettrico | p | Cm | Coulomb·metro |
| Momento di dipolo magnetico | μ | Am ² | Ampère·metro ² |
| Potenza | P | W | Watt(Joule/s) |
| Resistenza | R | Ω | Ohm (V/A) |
| Resistività | ρ | Ωm | Ohm·metro |

FATTORI DI CONVERSIONE

| | | |
|-------|------------|-------|
| T | 10^{12} | Tera |
| G | 10^9 | Giga |
| M | 10^6 | Mega |
| K | 10^3 | Kilo |
| m | 10^{-3} | milli |
| μ | 10^{-6} | micro |
| n | 10^{-9} | nano |
| p | 10^{-12} | pico |