

## **Fisica delle onde**

### *Cap 1 – onde meccaniche*

- 1.1 Generalità sulle onde
- 1.2 L'equazione delle onde
- 1.3 Alcune altre equazioni che descrivono fenomeni ondulatori.
- 1.4 Onde piane armoniche
- 1.5 Analisi di Fourier
- 1.6 Onde sferiche
- 1.7 Velocità di gruppo
- 1.8 Rappresentazione complessa di un'onda.
- 1.9 Esempi di onde meccaniche
  - 1.9.1 Onde su una corda tesa
  - 1.9.2. Onde longitudinali lungo una barra solida.
  - 1.9.3. Onde trasversali in una barra.
  - 1.9.4. Onde sonore in un gas
  - 1.9.5 La velocità di propagazione del suono
- 1.10 L'effetto Doppler
- 1.11 Intensità di un'onda
- 1.12 Percezione sonora e scala dei decibel
- 1.13 Impedenza
- 1.14 Riflessione e trasmissione di onde elastiche.
- 1.15 Onde stazionarie

## Capitolo 1 – onde meccaniche

### 1.1 Generalità sulle onde

Un' *onda* è una perturbazione di una proprietà fisica, periodica o impulsiva, che si propaga con una definita velocità. Le onde originano da una *sorgente* che produce la perturbazione.

Esistono molti tipi di onde: onde di origine *meccanica*, come le onde *elastiche* (ad es. onde sonore in un gas), o come le onde *sismiche* generate nei terremoti, o le onde sulla *superficie di un liquido*. Tutti questi tipi di onde si possono propagare solo in presenza di un mezzo e sono generate dalla vibrazione di una sorgente che mette in moto le particelle del mezzo circostante. Ci sono poi le onde *elettromagnetiche*, generate da un moto di cariche elettriche; esse non hanno bisogno, per la loro propagazione, del supporto di un mezzo, ma possono propagarsi anche nel vuoto.

Nella propagazione di un'onda non si ha trasporto netto di materia: gli atomi o le molecole del mezzo vengono posti in movimento ed oscillano attorno a delle posizioni di equilibrio. L'onda trasporta invece *quantità di moto* ed *energia* (e momento angolare).

L'onda viene descritta come la perturbazione, rispetto alla configurazione di equilibrio, di un *campo* opportuno; il campo può avere carattere *scalare* (ad es. campo di pressione per le onde sonore), o *vettoriale* (p.es. campo elettromagnetico per le onde elettromagnetiche). Descriviamo la perturbazione del campo con una funzione delle coordinate spaziali  $x, y, z$ , e del tempo  $t$ :  $\xi(x, y, z, t)$ . Tale funzione può essere *periodica*, oppure *impulsiva*. Se comunque deve rendere conto di un fenomeno che si sposta con velocità  $v$ , occorre che le coordinate spaziali e temporali soddisfino a una condizione opportuna. Consideriamo per semplicità un'onda che si propaghi solo in una direzione ( $x$ ): dunque  $\xi(x, t)$  descrive il 'profilo' dell'onda e ad un istante fissato  $t_1$  e nel punto di ascissa  $x_1$  il campo ha il valore  $\xi_1 = \xi(x_1, t_1)$ . Se l'onda si propaga nel verso positivo dell'asse delle  $x$  (onda *progressiva*), ad un istante successivo  $t_2 > t_1$  (figura 1.1.1) ritroveremo il valore  $\xi_1$  in una posizione  $x_2$  tale per cui:  $x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1)$ . Se dunque dev'essere  $\xi_1 = \xi(x_2, t_2)$  occorre che l'argomento della funzione sia del tipo:  $x - vt$ . Infatti in questo caso:  $\xi(x_2, t_2) = \xi[x_1 + v(t_2 - t_1) - vt_2] = \xi(x_1 - vt_1) = \xi_1$  e ritroviamo il valore  $\xi_1$  all'istante  $t_2$  in corrispondenza ad un valore dell'ascissa spostato verso destra, come ci si aspetta in un fenomeno di propagazione.

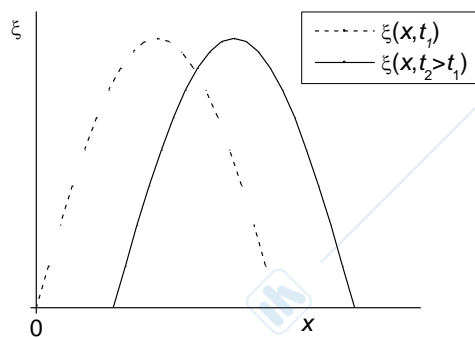


Figura 1.1.1

Anche un argomento del tipo  $x + vt$  nell'espressione della funzione  $\xi(x, t)$  descrive un'onda, che tuttavia si propaga nel verso negativo dell'asse delle ascisse, come si riconosce immediatamente (onda regressiva).

In conclusione, *qualunque funzione* del tipo  $\xi(x \pm vt)$  descrive un'onda che si propaga con velocità  $v$  lungo l'asse delle  $x$ , in un verso o in quello opposto, *senza deformarsi*.

Se la funzione  $\xi$  che descrive lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio è perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda, abbiamo un'onda *trasversale*, come p.es. le onde meccaniche su una corda tesa. Se lo spostamento è parallelo alla direzione di propagazione abbiamo un'onda *longitudinale*, come nel caso delle onde sonore nell'aria. Sebbene queste siano le situazioni più comuni, ci sono onde che non possono ridursi semplicemente a trasversali o longitudinali, come p.es. nel caso di onde acustiche flessionali nei pannelli acustici.

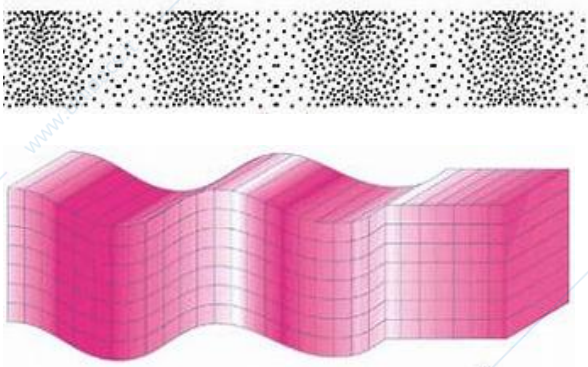


Figura 1.1.2 – Esempi di onda longitudinale (in alto) e trasversale (in basso). L'onda si propaga da sinistra verso destra.

## 1.2 L'equazione delle onde

Vediamo a quale equazione soddisfa una funzione del tipo  $\xi(x \pm vt)$ . Deriviamo due volte rispetto alla variabile  $x$ :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi'; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \xi''$$

Deriviamo due volte rispetto al tempo:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \pm v \xi'; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \xi'' = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Dunque, vale l'equazione:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.1)$$

detta appunto *equazione delle onde* o di *D'Alembert*. In tre dimensioni si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.2)$$

ovvero, utilizzando l'operatore laplaciano:

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2.3)$$

L'equazione è del secondo ordine, perché contiene derivate seconde. E' *omogenea* (manca il termine noto), anche se questa condizione non è necessaria. L'equazione è *lineare* (la funzione  $\xi$  compare, attraverso le sue derivate, solo alla prima potenza). Questo implica che, se  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono due possibili soluzioni dell'equazione, lo è anche una loro combinazione lineare:  $\alpha \xi_1 + \beta \xi_2$ , con  $\alpha, \beta$  coefficienti (principio di sovrapposizione). Fisicamente significa che due o più onde possono attraversare lo stesso spazio contemporaneamente senza influenzarsi reciprocamente. P. es. voci di persone diverse che parlano contemporaneamente nello stesso luogo continuano ad essere riconoscibili come se ciascuna di esse fosse presente da sola.

In presenza di onde di grande ampiezza il principio di sovrapposizione non vale più ed altre equazioni sostituiscono la (1) o la (2). Casi del genere si presentano p.es. in onde impulsive prodotte da esplosioni, oppure onde sulla superficie dell'acqua generate da terremoti (tsunami).

### 1.3 Alcune altre equazioni che descrivono fenomeni ondulatori.

Vi sono anche altre equazioni che descrivono moti nello spazio e nel tempo. Anche se non avremo occasione di usarle in questo corso, ne facciamo un breve cenno.

*L'equazione dell'avvezione.* E' un'equazione d'onda del primo ordine:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

Descrive un tipo di trasporto non solo di energia ma anche di materia, come ad es. inquinanti trasportati da una corrente d'acqua, o polline in una corrente d'aria.

*L'equazione di Korteweg-de Vries.* Si tratta di un'equazione d'onda non lineare, a causa del secondo termine:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -6y(x, t) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3}$$

Descrive p.es. onde che si possono produrre in acque poco profonde (canali), dette solitoni (onde solitarie). Le sue soluzioni non obbediscono al principio di sovrapposizione, a causa della non linearità: durante un'interazione tra due solitoni, l'ampiezza totale non è la somma delle ampiezze originali.

*L'equazione di Schrödinger.* E' un'equazione del primo ordine nel tempo e del secondo ordine nello spazio:

$$i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -\frac{h^2}{8\pi^2 m} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + Vy(x, t)$$

Descrive il comportamento di una particella di massa  $m$  sotto l'azione di un campo di forze rappresentato dall'energia potenziale  $V$ . La presenza dell'unità immaginaria implica che le 'onde' soluzioni dell'equazione sono funzioni complesse che non hanno un diretto significato fisico. Il modulo quadro della funzione d'onda è associato alla probabilità di trovare la particella in un dato volume di spazio.

Tornando all'equazione di D'Alembert, che per semplicità consideriamo monodimensionale, siccome entrambe le funzioni  $\xi(x - vt)$  e  $\xi(x + vt)$  sono soluzioni dell'equazione, la soluzione generale è una loro combinazione lineare. Imponendo opportune condizioni si può fare in modo che compaia solo un'onda progressiva ovvero regressiva.

#### 1.4 Onde piane armoniche

Studiamo un tipo particolare di onda, l'onda *armonica*:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - vt)$$

ovvero

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos k(x - vt)$$

Le due rappresentazioni sono ovviamente equivalenti, in quanto seno e coseno sono la stessa funzione sfasata di  $\pi/2$ . La costante  $\xi_0$  è detta *ampiezza* dell'onda; la costante  $k$  è necessaria per ragioni dimensionali (l'argomento di una funzione trigonometrica non può avere dimensioni), è l'inverso di una lunghezza ed è detta *numero d'onda*. Solitamente si scrive, inserendo il numero d'onda all'interno della parentesi:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t) \quad (1.4.1)$$

ovvero

$$\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t) \quad (1.4.2)$$

e la grandezza

$$\omega = kv \quad (1.4.3)$$

è detta *pulsazione* dell'onda armonica (più semplicemente ma con abuso di linguaggio, 'frequenza', anche se la frequenza è la pulsazione divisa per  $2\pi$ ). Ragioniamo in termini della funzione seno (1.4.1). Se fissiamo un istante di tempo  $t_1$  e 'facciamo una fotografia' della funzione, vediamo che essa è una senoide lungo l'asse delle  $x$ . Il suo periodo spaziale  $\lambda$  è dato dalla minima distanza tra due coordinate  $x_1$  e  $x_2$  in corrispondenza delle quali la funzione assume lo stesso valore:

$$\xi_0 \sin(kx_2 - \omega t_1) = \xi_0 \sin(kx_1 - \omega t_1)$$

e ciò è possibile se gli argomenti delle due funzioni seno differiscono per  $2\pi$  :

$$kx_2 - \omega t_1 = kx_1 - \omega t_1 + 2\pi$$

che fornisce:

$$\lambda = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{k} \quad (1.4.4)$$

Se ora fissiamo un punto di coordinata  $x_1$  la funzione  $\xi_0 \sin(kx_1 - \omega t)$  mostra le variazioni temporali che si hanno in corrispondenza di  $x_1$ , variazioni sempre sinusoidali. Il periodo temporale della funzione  $T$  è la minima differenza tra due istanti di tempo  $t_1$  e  $t_2$  in corrispondenza dei quali la funzione assume lo stesso valore. Ragionando come in precedenza troviamo:

$$kx_1 - \omega t_2 + 2\pi = kx_1 - \omega t_1$$

da cui:

$$T = t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.4.5)$$

Ricordando la definizione di frequenza  $f = \frac{1}{T}$  troviamo che  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  e utilizzando le (1.4.3) e (1.4.4) otteniamo:

$$\lambda f = v \quad (1.4.6)$$

Questa è un'importante relazione che lega tra loro frequenza, lunghezza d'onda e velocità dell'onda.

L'argomento della funzione seno,  $kx - \omega t$ , è detto *fase* dell'onda; in termini più generali può scriversi come:

$$kx - \omega t + \phi$$

essendo  $\phi$  un angolo qualunque, detto *fase iniziale*. Il suo significato lo si desume per  $x = t = 0$ ; in tal caso la funzione d'onda assume il valore  $\xi_0 \sin \phi$ , diverso in generale da zero.

Le onde del tipo

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

sono dette piane (e armoniche) in quanto la fase dell'onda,  $kx - \omega t$ , ad un dato istante è costante in tutti i punti  $x = \text{costante}$ , che rappresenta nello spazio un piano ortogonale all'asse  $x$ . In generale definiamo *fronte d'onda* una superficie su cui la fase dell'onda è costante ad un dato istante. Il fronte d'onda si sposta con la velocità di propagazione dell'onda. La linea ortogonale al fronte d'onda in un dato punto rappresenta, in quel punto, la direzione di propagazione dell'onda e dell'energia ad essa associata; tale linea prende il nome di *raggio*. Le onde piane sono un modello

matematico, non esistono in realtà, in quanto nessuna onda reale si propaga mantenendo un'ampiezza costante. Esse tuttavia sono un'importante approssimazione delle onde reali se le consideriamo 'sufficientemente distanti' dalla sorgente. Chiariremo questo punto parlando di un altro modello di onda, più realistico, l'onda sferica.

Nel caso tridimensionale l'espressione precedente si generalizza considerando un *vettore d'onda*  $\mathbf{k}$  orientato lungo la direzione di propagazione dell'onda:

$$\xi = \xi_0 \text{sen}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

Anche le onde armoniche sono un modello matematico: in genere l'onda emessa, anche se periodica, è ben lontana dall'essere armonica. Durante il corso, tuttavia, ci riferiremo quasi esclusivamente ad onde armoniche. Infatti, qualunque onda, periodica o impulsiva, può essere 'costruita' a partire da onde armoniche sfruttando il teorema di Fourier.

Un altro importante commento riguarda la (1.4.6): vi sono casi in cui la velocità dell'onda monocromatica non dipende dalla frequenza dell'onda. Esempi importanti sono le onde elettromagnetiche che si propagano in vuoto o le onde sonore che si propagano in aria. Se così non fosse, i diversi suoni emessi a differenti frequenze da una sorgente (p.es. una persona che ci sta parlando a una certa distanza) arriverebbero con ritardi temporali diversi da quelli con cui sono partiti, con problemi di intelligibilità. Ma in molti altri casi la velocità è dipendente dalla frequenza dell'onda, come nel caso delle onde luminose che si propagano in un mezzo trasparente:  $v = v(f)$ ; in questo caso parliamo di dispersione e il mezzo è detto dispersivo. La scomposizione di un fascetto di luce bianca nei diversi colori quando lo si fa passare attraverso un prisma è un esempio del fenomeno della dispersione, sul quale torneremo più avanti.

## 1.5 Analisi di Fourier

Il teorema di Fourier permette di esprimere una qualunque funzione periodica tramite una serie di funzioni armoniche. Per comprendere come questo sia possibile, consideriamo un caso concreto: una funzione periodica del tipo 'onda quadra', rappresentata in fig. 1.5.1:

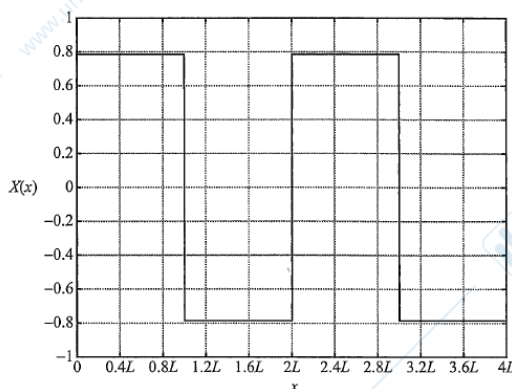


Figura 1.5.1

che si estende lungo l'asse  $x$  (da  $-\infty$  a  $+\infty$ ) ed ha un periodo spaziale  $2L$ . Consideriamo ora la sinusoide rappresentata in fig. 1.5.2:

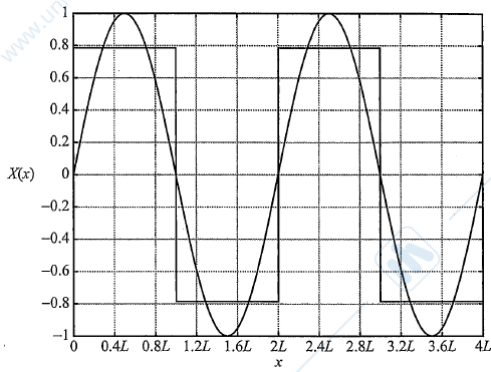


Figura 1.5.2

avente *lo stesso periodo* dell'onda quadra. Notiamo che essa si annulla dove si annulla la funzione di partenza. Non è certamente una buona approssimazione dell'onda quadra: le sue variazioni non sono a gradino, ad es. Inoltre, l'onda armonica supera l'onda quadra nei massimi e minimi, e ne risulta inferiore negli altri intervalli. Supponiamo, nel tentativo di migliorare l'approssimazione, di aggiungere una seconda sinusoide, come in fig. 1.5.3

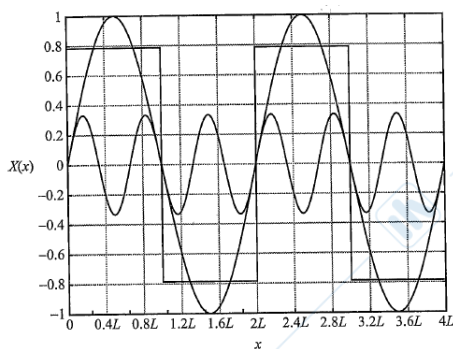


Figura 1.5.3

e scegliamola in modo che si annulli sempre dove si annulla l'onda quadra. Ha frequenza spaziale tripla della sinusoide 'fondamentale', mentre la sua ampiezza è  $1/3$ . Quando consideriamo la loro somma:

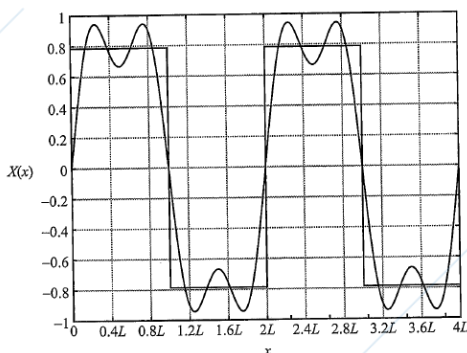


Figura 1.5.4

e la confrontiamo con l'onda quadra, vediamo che vi sono oscillazioni intorno al valore costante di quest'ultima, ma l'approssimazione è migliorata, in quanto le differenze sono diminuite e la

funzione approssimante varia più rapidamente in corrispondenza dei gradini presenti nell'onda quadra. A questo punto possiamo andare avanti con l'aggiunta di altre sinusoidi che, in questo particolare esempio, hanno frequenze multiple dispari della fondamentale e ampiezze decrescenti. La figura 1.5.5:

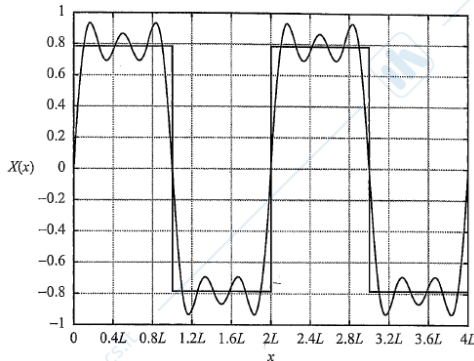


Figura 1.5.5

mostra la somma di tre sinusoidi: la funzione risultante riproduce, rozzamente, il comportamento dell'onda quadra. Aggiungendo opportune sinusoidi, si può migliorare l'approssimazione: con 16 termini abbiamo il risultato in figura 1.5.6

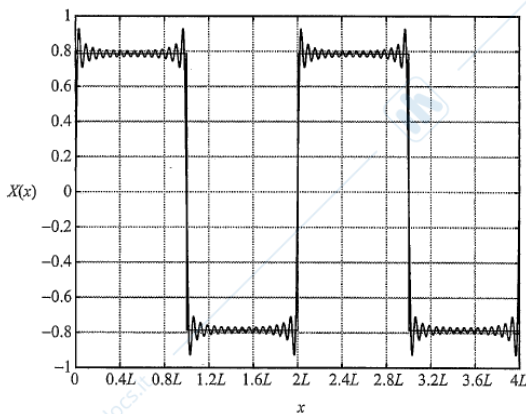


Figura 1.5.6

Con 64 termini il risultato in figura 1.5.7:

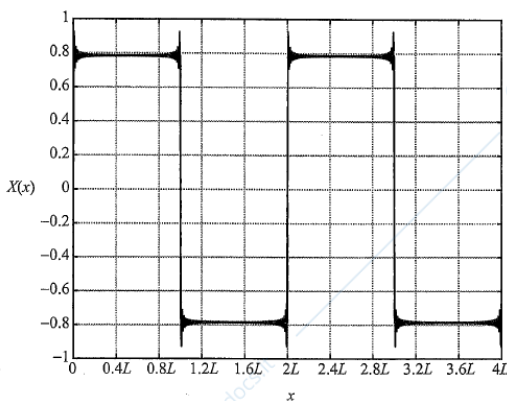


Figura 1.5.7

In pratica, 'a occhio', notiamo che la differenza con l'onda quadra è solo nei punti in cui quest'ultima mostra la discontinuità a gradino.

Si intuisce che, matematicamente, si otterrebbe esattamente l'onda quadra sommando infiniti termini: è quello che stabilisce il teorema di Fourier. Nel caso di una funzione  $X(x)$  con periodicità spaziale:

$$X(x) = A_0 + \sum \left[ A_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{2L}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{2L}\right) \right] \quad (1.5.1)$$

Mentre nel caso di una funzione periodica nel tempo:

$$T(t) = A_0 + \sum \left[ A_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{P}\right) \right] \quad (1.5.2)$$

I coefficienti  $A_n$  e  $B_n$  sono le ampiezze delle sinusoidi componenti. Nel nostro esempio comparivano solo sinusoidi, mentre nelle formule ci sono anche termini in coseno: questo dipende dalla eventuale simmetria della funzione di partenza. Se la funzione è dispari, cioè cambia segno passando da  $x$  a  $-x$ , occorre rappresentarla con funzioni trigonometriche dispari, quindi sinusoidi. È il caso dell'onda quadra che abbiamo esaminato. Un altro esempio è l'onda triangolare, in figura 1.5.8

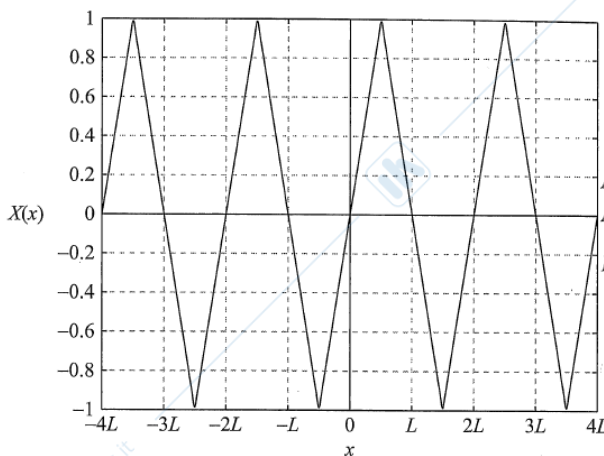


Figura 1.5.8

Ma possiamo avere funzioni periodiche pari: ad es. se innalziamo e trasliamo opportunamente l'onda triangolare:

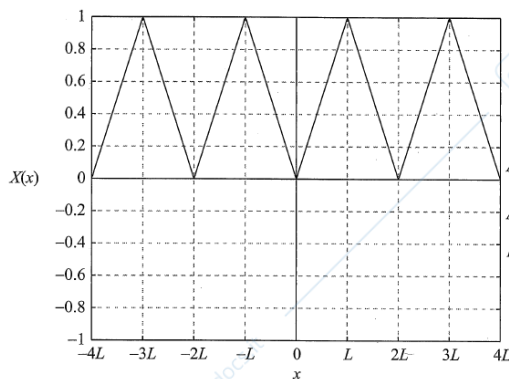


Figura 1.5.9

otteniamo una funzione pari. E' chiaro che avremo bisogno di funzioni armoniche componenti con la stessa parità della funzione che vogliamo rappresentare, quindi ci serviremo di coseni: nella serie di Fourier mancheranno i termini in seno. E, in generale, la funzione periodica di partenza può non essere né pari né dispari e in questo caso dovremo 'mescolare' funzioni di opposta parità: quindi compariranno nella serie sia il seno che il coseno.

Da un punto di vista operativo, abbiamo bisogno di calcolare le ampiezze delle funzioni armoniche, cioè i coefficienti  $A_n$  e  $B_n$ . Per fortuna, sfruttiamo una proprietà di ortogonalità delle funzioni armoniche: se integriamo su un periodo il prodotto di due seni o di due coseni con differente periodo, otteniamo zero. Anche il prodotto di un seno per un coseno dà zero. Considerando il caso di periodicità spaziale:

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n2\pi x}{2L}\right) \sin\left(\frac{m2\pi x}{2L}\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n2\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m2\pi x}{2L}\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n2\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{m2\pi x}{2L}\right) dx = 0$$

A questo punto, se moltiplichiamo la (1.5.1) per  $\cos\left(\frac{n2\pi x}{2L}\right)$  e integriamo su un periodo, troviamo:

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L X(x) \cos\left(\frac{n2\pi x}{2L}\right) dx \quad (1.5.3)$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L X(x) \sin\left(\frac{n2\pi x}{2L}\right) dx \quad (1.5.4)$$

Cosa rappresenta il termine  $A_0$  che compare nelle (1) ovvero (2) e che si ottiene dalla precedente (3) per  $n = 0$ ? E' il valore medio della funzione  $X$ , come si riconosce immediatamente dalla definizione di valore medio. Ovviamente, se partiamo da una funzione a valor medio nullo, come nel caso dell'onda quadra,  $A_0 = 0$ .

L'analisi effettuata in termini di seno e coseno può essere svolta in modo equivalente riferendosi alla rappresentazione complessa delle onde armoniche. La serie in forma esponenziale diviene:

$$X(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i[n2\pi x/(2L)]}$$

con

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L X(x) e^{i[n2\pi x/(2L)]} dx$$

Perché nella serie di Fourier compaiono solo frequenze discrete? In altri termini, perché ci sono solo frequenze (spaziali, nell'esempio) multiple intere di  $2\pi/(2L)$ ? Perché solo in questo caso è garantito

che ogni funzione armonica si annulli dove si annulla la funzione che vogliamo rappresentare. In ogni altro caso la funzione armonica non si annullerebbe nella 'posizione giusta' e non porterebbe a una rappresentazione fedele della funzione di partenza.

Finora abbiamo considerato onde periodiche, ma sappiamo che abbiamo anche onde impulsive. Possiamo rappresentarle con un'analisi di Fourier? La risposta è positiva, solo che invece di una serie abbiamo un integrale di Fourier. Consideriamo la seguente funzione, periodica di periodo  $2L$ :

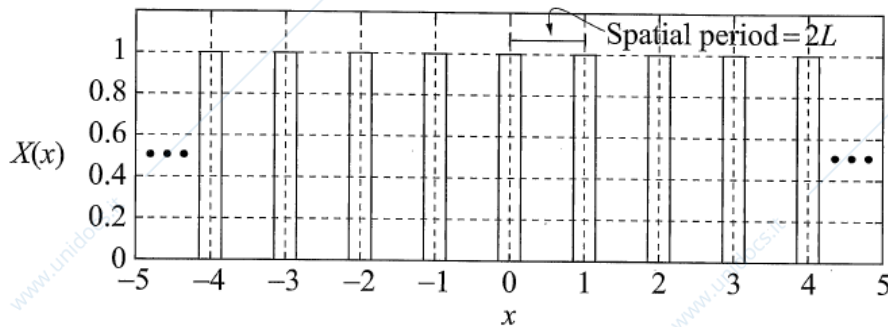


Figura 1.5.10

Il suo 'spettro di frequenza', ossia la dipendenza dell'ampiezza della componente di Fourier dalla frequenza, è rappresentato in figura 1.5.11:

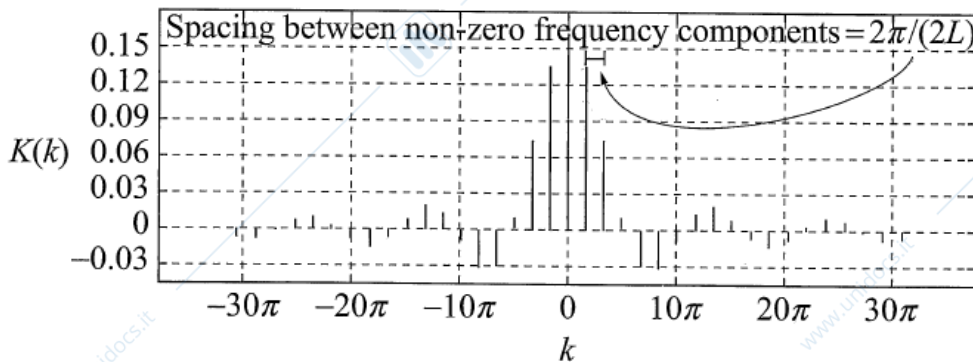


Figura 1.5.11

Notiamo che la spaziatura (= variazione in frequenza) tra le componenti adiacenti vale  $2\pi/(2L)$ . Immaginiamo di voler rappresentare un impulso come quello mostrato in figura 1.5.12:

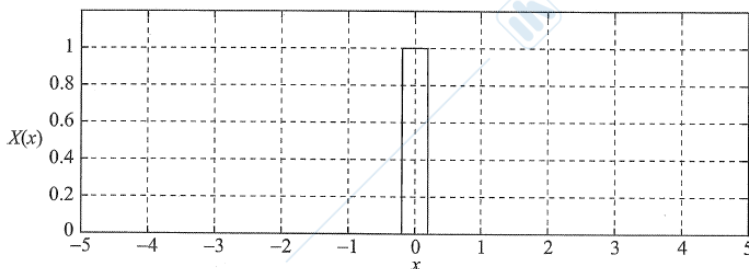


Figura 1.5.12

Potremmo pensare di ottenerlo come un limite della funzione periodica, aumentando il periodo  $2L$ . Ma questo diminuirebbe la spaziatura tra le frequenze delle funzioni armoniche. Al limite, per  $2L \rightarrow \infty$ , questa spaziatura diverrebbe infinitesima e la frequenza varierebbe con continuità. Si intuisce quindi (ma lo si dimostra matematicamente) che la rappresentazione di Fourier di una funzione aperiodica  $X(x)$  è:

$$X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(k) e^{ikx} dk$$

dove  $k = 2\pi/\lambda$  è la frequenza spaziale, che varia con continuità. La funzione  $K(k)$  è detta la trasformata di Fourier della  $X(x)$ :

$$K(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(x) e^{-ikx} dx$$

Calcoliamo come esempio la trasformata di Fourier dell'impulso rettangolare, supponendo che abbia ampiezza  $A$  e si estenda per un intervallo  $2L$  centrato sull'origine.

La trasformata  $K$  diviene, nel caso specifico:

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^L A e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A \frac{1}{-ik} [e^{-ikL} - e^{ikL}] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2A}{k} \left[ \frac{e^{ikL} - e^{-ikL}}{2i} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2A}{k} \sin(kL) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A(2L) \frac{\sin(kL)}{kL} \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è usata la formula di Eulero per rappresentare il seno.

La trasformata è rappresentata in figura 1.5.13:

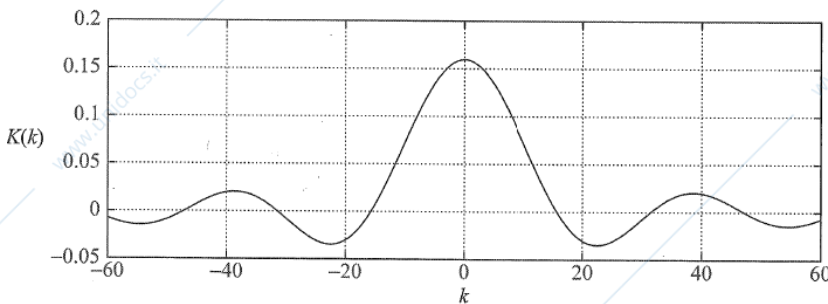


Figura 1.5.13

E' interessante osservare cosa succede se allarghiamo l'impulso di partenza, aumentando  $L$ : la trasformata si restringe, come si nota dalla figura seguente

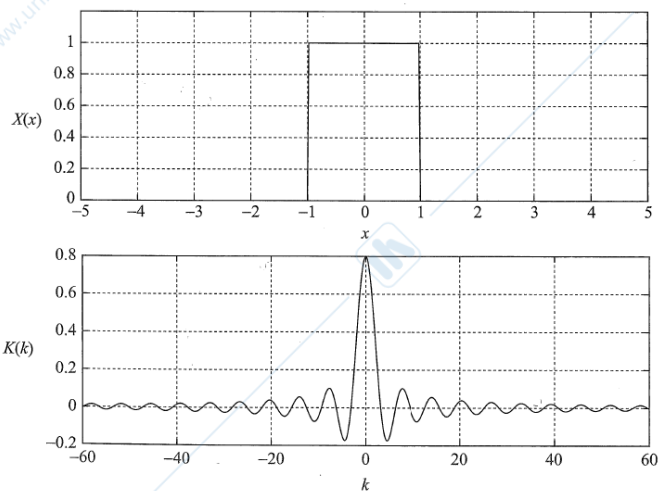


Figura 1.5.14

e la sua altezza aumenta. Vale naturalmente il viceversa: più restringiamo la funzione di partenza più allarghiamo la sua trasformata. Se lo spettro diviene molto stretto, la funzione nel dominio dello spazio o del tempo deve essere molto estesa. Questo ci fa comprendere perché non possiamo in pratica generare una sinusoida pura (onda monocromatica): il suo spettro di Fourier consisterebbe di una sola componente, ma questo richiederebbe una funzione senza inizio e senza fine sia nello spazio che nel tempo. Nel caso di un segnale reale che si estenda per un intervallo di tempo  $\Delta t$ , il suo spettro di frequenza avrà un'ampiezza dell'ordine di  $1/\Delta t$ . Esiste in altri termini un 'principio di indeterminazione' che stabilisce che il prodotto dei due intervalli di frequenza e di tempo deve soddisfare alla relazione:

$$\Delta\omega\Delta t \approx 2\pi$$

Nel dominio spaziale:

$$\Delta x\Delta k \approx 2\pi$$

Due commenti prima di lasciare l'argomento:

- l'analisi di Fourier è importantissima dal punto di vista pratico. Anche se non possiamo rappresentare esattamente una funzione (occorrerebbero infiniti termini nella serie), possiamo troncare la serie a un termine opportuno, commettendo un errore che può essere reso inferiore a un valore prefissato. In questo modo possiamo ad es. scomporre un suono in componenti armoniche; o, viceversa, sintetizzare artificialmente un suono sommando un numero adeguato di armoniche. Questo è il principio su cui si basano gli strumenti elettronici. Possiamo naturalmente scomporre un rumore in modo da individuare le armoniche più importanti e eliminarle utilizzando una tecnica di interferenza distruttiva: si costruisce un 'contro-rumore' che tende a compensare il rumore dato. Su questo principio sono basate le cuffie a controllo 'attivo' del rumore.

- anche se ci siamo basati sulle funzioni trigonometriche, si potrebbe generalizzare il discorso usando una qualunque 'base' di funzioni ortogonali (l'ortogonalità è essenziale per dedurre le ampiezze delle componenti). Su questo principio si basano molte applicazioni dell'analisi di Fourier

che non fanno uso necessariamente delle funzioni trigonometriche, ma, a seconda dei casi, di funzioni più appropriate (p.es. per essere implementate in opportuni algoritmi).

## 1.6 Onde sferiche

In problemi di propagazione in cui non si manifesti una direzione privilegiata siamo in presenza di simmetria sferica: le variabili dipendono solo dalla distanza  $r$  dalla sorgente. In questo caso, invece di coordinate cartesiane, conviene usare coordinate sferiche. Vediamo che forma assume l'equazione di D'Alembert. Supporremo che  $\xi = \xi(r, t)$ .

Il Laplaciano in coordinate sferiche assume la forma:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

(non consideriamo la dipendenza dalle coordinate angolari) e l'equazione diviene:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Consideriamo adesso la funzione  $F$  così definita:

$$F = r\xi$$

e vediamo a quale equazione soddisfa. Sostituendo nella precedente:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{F}{r} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F/r}{\partial t^2}$$

e svolgendo le derivate:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

(il fattore  $1/r$  viene portato fuori dalla derivata temporale, non dipendendo esplicitamente dal tempo). Dunque, semplificando, la funzione  $F$  soddisfa all'equazione di D'Alembert monodimensionale in  $r$ , e quindi è del tipo:

$$F(r \pm vt).$$

Pertanto, tornando alla nostra funzione  $\xi$ , essa è della forma:

$$\xi = \frac{\xi_0}{r} \text{sen}(kr - \omega t) \quad (1.6.1)$$

considerando per semplicità soluzioni armoniche. Queste onde sono dette *sferiche* perché le superfici equifase sono sfere: a un dato istante, la fase è la stessa per  $r = \text{cost}$ . Notiamo la differenza fondamentale rispetto alle onde piane: l'ampiezza non è costante, ma decresce con l'inverso della distanza dalla sorgente.

Immaginiamo ora di essere a 'grande' distanza dalla sorgente ( $r \gg \lambda$ ): se consideriamo una determinata direzione di propagazione, notiamo che la curvatura della superficie equifase (sferica) diviene poco pronunciata e la superficie stessa si può confondere con il suo piano tangente. Inoltre, spostandosi di una distanza pari a una lunghezza d'onda,  $\frac{\xi_0}{r+\lambda} \approx \frac{\xi_0}{r}$  e quindi l'ampiezza dell'onda non varia in modo significativo. Pertanto l'onda può considerarsi piana, con buona approssimazione. Le onde piane sono quindi approssimazioni di onde sferiche a sufficiente distanza dalla sorgente.

## 1.7 Velocità di gruppo

Abbiamo detto che un'onda reale non è mai monocromatica pura, ma è piuttosto ottenuta dalla sovrapposizione di componenti monocromatiche. Immaginiamo un 'pacchetto' d'onde che si propaghi: qual è la sua velocità? Nel caso del vuoto (onda elettromagnetica) o di un mezzo non dispersivo, la velocità del pacchetto (che chiamiamo velocità di gruppo, cioè del 'gruppo' di onde che lo compongono) coincide con quella delle sue componenti, che chiameremo velocità di fase:  $v = \omega/k$ . Come definiamo la velocità di gruppo nel caso di dispersione? In questo caso infatti ogni componente monocromatica è caratterizzata dalla sua velocità.

Consideriamo un caso ideale: un 'pacchetto' formato da due sole componenti monocromatiche, caratterizzate da frequenze molto simili e uguale ampiezza:

$$\xi_1 = \xi_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\xi_2 = \xi_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

con

$$\omega_1 = \omega - \frac{\Delta\omega}{2} \quad ; \quad \omega_2 = \omega + \frac{\Delta\omega}{2}$$

( $\Delta\omega$  è la differenza tra le due frequenze). Se utilizziamo l'identità trigonometrica:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

possiamo esprimere l'onda risultante nel seguente modo:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2\xi_0 \cos \left[ \frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \sin \left[ \frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right]$$

Se usiamo i valori medi:  $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ ,  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  possiamo riscrivere l'onda risultante come segue:

$$\xi = 2\xi_0 \cos \left[ \frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t \right] \sin(kx - \omega t)$$

( $\Delta k = k_2 - k_1$ ), che è un'onda armonica (fattore seno) con frequenza e lunghezza d'onda pari alla media aritmetica delle grandezze corrispondenti delle onde componenti. La sua ampiezza, tuttavia non è costante ma varia nel tempo con frequenza pari alla semidifferenza delle frequenze delle componenti. Nella figura seguente vediamo le due componenti, che periodicamente risultano in fase e in opposizione di fase, e l'onda risultante.

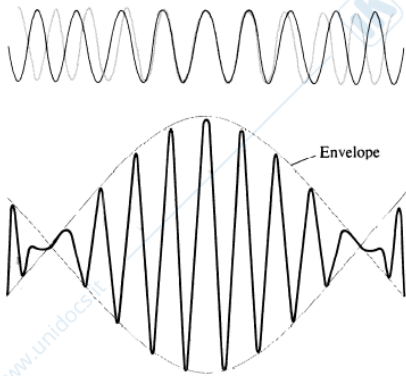


Figura 1.7.1

La velocità con cui varia l'involuppo, ossia la velocità del gruppo d'onde, con cui si muove il pacchetto d'onde, è data da:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Generalizzando al caso di una distribuzione continua di componenti monocromatiche su un certo intervallo di frequenze, avremo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.7.1)$$

che coincide con la velocità di fase nel caso in cui questa sia costante. In presenza di dispersione, nota la relazione tra frequenza e lunghezza d'onda (o numero d'onda), si può ricavare la velocità di gruppo.

### 1.8 Rappresentazione complessa di un'onda.

In alcuni casi è conveniente adottare una rappresentazione di un'onda in termini di funzione complessa (nel senso dei numeri complessi). Ci si basa sulle formule di Eulero, che pongono in relazione la funzione esponenziale e quelle trigonometriche:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

o, inversamente:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} ; \quad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

naturalmente, l'onda fisica è una quantità reale, quindi interpretiamo la funzione complessa:

$$\xi = \xi_0 \exp[i(kx - \omega t)]$$

nel senso di considerare la sua parte reale, in termini di coseno. E se volessimo una funzione seno? Ricordiamo che il seno è il coseno sfasato di  $\pi/2$ . Quindi basta considerare un inessenziale fattore di fase nell'espressione complessa. Vedremo il vantaggio di tale rappresentazione quando si tratterà di sommare diverse funzioni armoniche.

## 1.9 Esempi di onde meccaniche

### 1.9.1 Onde su una corda tesa

Consideriamo una corda tesa lungo l'asse delle  $x$  e spostiamola *di poco* dalla sua posizione di equilibrio. Sia  $\xi(x,t)$  la funzione che descrive lo spostamento; mostriamo che soddisfa all'equazione di D'Alembert. Sia  $dl$  un elementino di corda sottoposto ai suoi estremi alla tensione  $T$ , la quale forma con l'asse  $x$  gli angoli  $\alpha$  e  $\alpha'$  (figura 1.9.1).

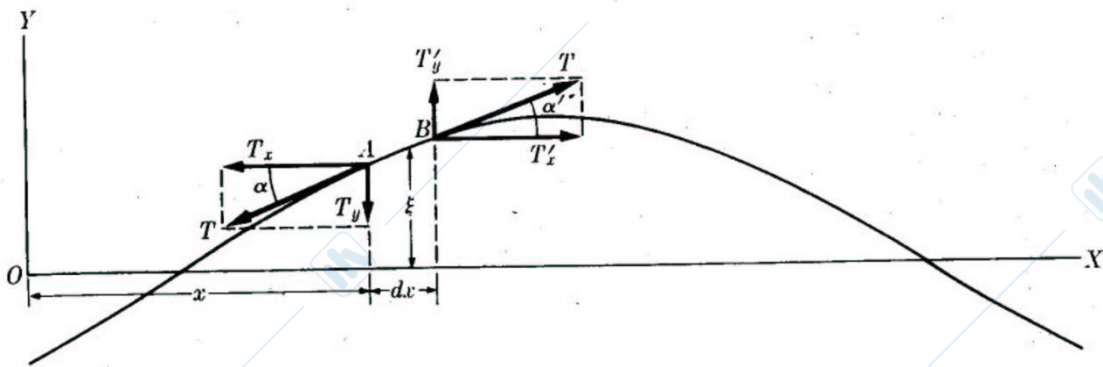


Figura 1.9.1

Le componenti della forza sono:

$$F_x = T(\cos\alpha' - \cos\alpha);$$

$$F_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha).$$

$\alpha$  e  $\alpha'$  sono piccoli, per l'ipotesi di piccole perturbazioni, per cui:  $\cos\alpha \cong \cos\alpha' \cong 1$ ,  $\sin\alpha' - \sin\alpha \cong \tan\alpha' - \tan\alpha \cong \frac{\partial \tan\alpha}{\partial x} dx$ . Infatti, lo sviluppo al primo ordine implica che

$\tan\alpha' = \tan\alpha + \frac{\partial \tan\alpha}{\partial x} dx$ . Quindi  $F_x = 0$ , mentre:

$$F_y = T \frac{\partial \tan\alpha}{\partial x} dx.$$

Ma  $\tan\alpha = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ , per cui

$$F_y = T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

Uguagliamo la forza così ottenuta al prodotto della massa del tratto di corda  $dl$  per l'accelerazione; la massa è  $dm = \rho S dl \cong \rho S dx$ , essendo  $S$  la sezione della corda e  $\rho$  la sua densità di volume, mentre l'accelerazione:  $a = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ .

In conclusione si ottiene:

$$T \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

ovvero:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho S}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.9.1)$$

essendo  $\mu$  la densità *lineare* di massa (massa per unità di lunghezza della corda; si misura in kg/m).

Troviamo quindi che la legge di Newton si 'trasforma' nell'equazione delle onde (1.2.1), e la velocità con cui si propaga l'onda sulla corda è data da:  $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ , come si ottiene confrontando la (1.9.1) con la (1.2.1). Lo spostamento dalla posizione di equilibrio ( $\xi$ ) è perpendicolare alla direzione di propagazione ( $x$ ): si tratta quindi di onde *trasversali*. Si noti che tale condizione discende dal fatto che la componente della forza in direzione del moto,  $F_x$ , è nulla, una conseguenza dell'ipotesi di piccole perturbazioni. Se si dà uno spostamento grande si generano anche onde parallele alla direzione di propagazione (onde *longitudinali*). Un esempio di onde longitudinali si ha per le onde sonore in un gas.

### 1.9.2. Onde longitudinali lungo una barra solida.

Se produciamo un disturbo all'estremità di una barra solida, p.es. colpendola con un martello, il disturbo si propaga lungo la barra e alla fine si ritrova all'estremo opposto. Consideriamo dunque una barra di sezione uniforme  $A$ , soggetta a una forza  $F$  lungo il suo asse, che può variare lungo l'asse.

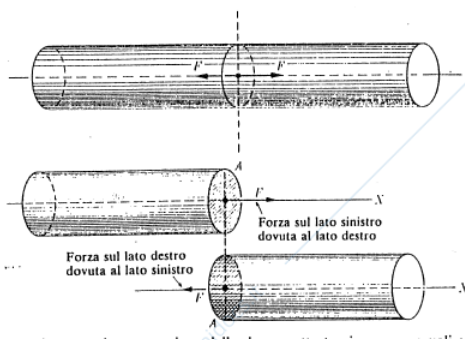


Figura 1.9.2.1

Chiamiamo sforzo normale  $S$  la forza per unità di sezione:

$$S = F/A$$

E' espresso in  $\text{N m}^{-2}$ ; è equivalente a una pressione.

Sotto l'azione del campo di forze ciascuna sezione subisce uno spostamento  $\zeta$ , parallelo all'asse. Supponiamo che  $\zeta$  vari lungo l'asse, ci sia cioè una deformazione:  $\zeta = \zeta(x)$ . Consideriamo due sezioni  $A$  ed  $A'$ , separate da una distanza  $dx$  in condizioni indisturbate.

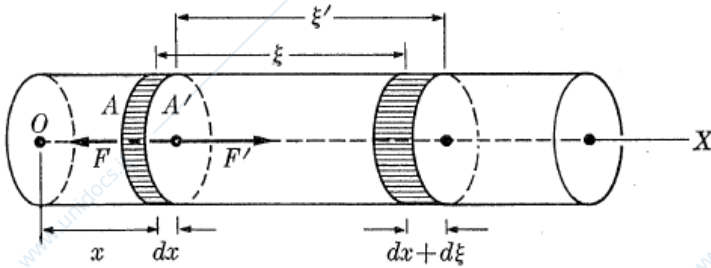


Figura 1.9.2.2

Sotto l'azione del campo di forze le due sezioni  $A$  e  $A'$  si sposteranno di una distanza  $\zeta$  e  $\zeta'$ , rispettivamente. La separazione tra le due sezioni, nello stato deformato, è dunque:

$$dx + (\zeta' - \zeta) = dx + d\zeta$$

La deformazione della barra in quel tratto è dunque  $d\zeta$ . Si definisce deformazione normale  $\varepsilon$  la deformazione per unità di lunghezza. Dunque:

$$\varepsilon = d\zeta/dx.$$

E' una quantità adimensionale.

Se rimaniamo in un campo di piccoli sforzi, cioè in un limite elastico, vale la legge di Hooke, che stabilisce una proporzionalità tra sforzi e deformazioni:

$$S = Y \varepsilon$$

La costante di proporzionalità  $Y$  è detta modulo di Young e di misura in  $\text{Nm}^{-2}$ . Tanto per avere un'idea, il modulo di Young per l'acciaio è pari a  $2 \cdot 10^{11}$  Pa.

Tornando alla forza:

$$F = AS = AY\varepsilon = AYd\zeta/dx$$

La forza netta sull'elementino definito dalle due sezioni  $A$  e  $A'$  (figura 1.9.2.2) è:

$$F' - F = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = AY dx \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

Se la barra ha una densità  $\rho$  la massa della sezione  $dm = \rho A dx$  e la sua accelerazione è  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ . Quindi, applicando la legge di Newton, scriviamo l'equazione del moto della sezione:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = (\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

ossia

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (\rho A) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Ricordando la precedente espressione della forza in funzione dello spostamento  $\xi$ , ricaviamo:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{Y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Questa è un'equazione delle onde: il campo di spostamenti si propaga lungo la barra con una velocità pari a  $\sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ . Si tratta di onde longitudinali. Questo risultato viene confermato sperimentalmente misurando indipendentemente velocità, densità e modulo di Young. Anche la forza soddisfa alla stessa equazione e si propaga con la stessa velocità. Lo si verifichi.

### 1.9.3. Onde trasversali in una barra.

E' possibile generare anche onde trasversali in una barra, colpendola trasversalmente. Con riferimento alla figura 1.9.3.1, sia  $\xi$  lo spostamento trasversale di una sezione  $dx$  a un dato istante.

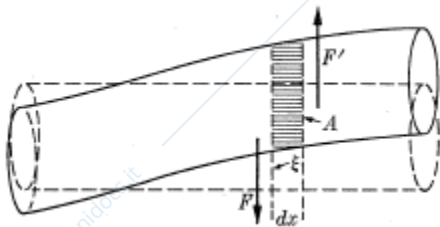


Figura 1.9.3.1

Assumiamo che ciascuna sezione della barra si muova su e giù, senza spostamento longitudinale. Ciascuna sezione è soggetta a forze tangenti alla superficie; la forza per unità di superficie in questo caso è detta sforzo di taglio:

$$S = F/A$$

La deformazione di taglio (adimensionale):

$$\gamma = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

è lo spostamento trasversale per unità di lunghezza. Nel limite elastico, si ha una relazione lineare tra sforzo e deformazione:

$$S = G\gamma$$

dove il modulo di taglio  $G$  (in Pa) è un coefficiente caratteristico di ogni materiale. Dunque:

$$F = AG \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

La forza risultante sulla sezione:

$$F' - F = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

La massa della sezione è  $\rho A dx$  e l'equazione di moto nella direzione trasversale è:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx = (\rho A dx) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Derivando la precedente espressione per  $F$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = AG \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

e sostituendo:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

ritroviamo l'equazione delle onde: la deformazione trasversale si propaga lungo la barra con velocità pari a  $\sqrt{\frac{G}{\rho}}$ .

Abbiamo dunque visto che in una barra (in genere in un solido) possono propagarsi sia onde longitudinali che trasversali. Che relazione c'è tra le rispettive velocità? Si può dimostrare che quella longitudinale è più alta di quella trasversale. Empiricamente, lo si ricava subito dalla seguente tabella:

Material	$Y$	$\kappa$	$G$
Aluminum	0.70	0.61	0.24
Copper	1.25	1.31	0.46
Iron	2.06	1.13	0.82
Lead	0.16	0.33	0.054
Nickel	2.1	1.64	0.72
Steel	2.0	1.13	0.80

#### 1.9.4. Onde sonore in un gas

Consideriamo del gas contenuto in un lungo tubo, di sezione unitaria, disposto nella direzione  $x$ , e siano  $\rho_0$  e  $p_0$  la densità e la pressione del gas all'equilibrio. All'estremità del tubo variamo la pressione del gas tramite una sorgente (ad es. un pistone) che oscilli periodicamente; si otterrà una variazione locale di pressione e di densità, che verranno successivamente trasmesse al resto del gas.

Nell'ipotesi di *piccole* variazioni:  $\rho = \rho_0 + d\rho$ ,  $p = p_0 + dp$ . Indichiamo come al solito con  $\xi(x, t)$  il generico spostamento dalla posizione di equilibrio. Sia  $dm = \rho_0 dx$  la massa di gas compresa tra due sezioni passanti per i punti di coordinate  $x$  e  $x + dx$  (figura 1.9.4.1).

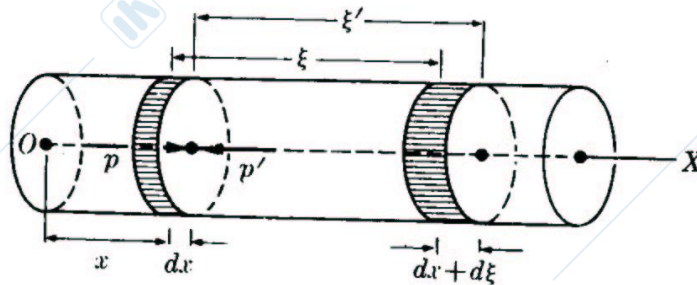


Figura 1.9.4.1

In conseguenza della perturbazione la massa  $dm$  subisce uno spostamento e all'istante  $t$  la si ritrova tra i piani passanti per i punti:  $x + \xi(x, t)$  ed  $x + dx + \xi(x + dx, t)$ , per cui la sua dimensione lineare sarà:

$$x + dx + \xi(x + dx, t) - x - \xi(x, t) = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

(Lo sviluppo al primo ordine di  $\xi(x + dx, t) = \xi(x, t) + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ ). La densità cambia, in quanto la stessa massa occupa un volume diverso:

$$dm = (\rho_0 + d\rho) \left( dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right) = \left( \rho_0 + \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + d\rho + d\rho \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx$$

Ricordando che  $dm = \rho_0 dx$  si ottiene:

$$0 = \left( \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + d\rho + (\rho - \rho_0) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx$$

Ossia:

$$d\rho = -\rho \frac{\partial \xi}{\partial x} \cong -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.9.2)$$

in quanto le variazioni di densità sono piccole.

Per quanto riguarda la pressione, possiamo trovarne la variazione a partire dalla definizione del modulo di compressibilità:

$$\beta = -V \frac{dp}{dV} \quad (1.9.3)$$

Siccome la massa  $m = \rho V = \text{costante}$ , differenziando risulta:  $Vd\rho + \rho dV = 0$ , ossia:  $\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$ .

Sostituendo, otteniamo:

$$\beta = \rho \frac{dp}{d\rho}$$

$$\text{Allora: } dp = p - p_0 = \beta \frac{d\rho}{\rho_0} = -\beta \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

dove abbiamo utilizzato la (1.9.2), per cui

$$p = p_0 - \beta \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.9.4)$$

La variazione di pressione provoca un moto del gas, in quanto è numericamente uguale alla forza agente sulla massa  $dm$  (ricordiamo che la sezione è unitaria); quindi la forza complessivamente agente sulle due sezioni può scriversi come:

$$p(x, t) - p(x + dx, t) = -\frac{\partial p}{\partial x} dx = \beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

Uguagliando la forza al prodotto della massa contenuta tra le sezioni unitarie per l'accelerazione

$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$  si trova:

$$\beta \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho_0 dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

ossia:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\rho_0}{\beta} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9.5)$$

Pertanto lo spostamento della massa dalla posizione di equilibrio soddisfa all'equazione (1.2.1).

Deduciamo che lungo il gas si propaga un'onda di spostamento con velocità  $v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}}$ .

Se le compressioni ed espansioni sono rapide il gas, schematizzato come ideale, non ha tempo per scambiare calore con l'ambiente circostante; per cui l'onda si propagherà in condizioni *adiabatiche*.

Se inoltre consideriamo il gas prossimo all'equilibrio, potremo utilizzare l'equazione:  $pV^\gamma =$  costante; se la riscriviamo equivalentemente:  $V^\gamma dp + \gamma p V^{\gamma-1} dV = 0$  otteniamo:

$$-V \frac{dp}{dV} = \gamma p = \beta \quad (1.9.6)$$

Dunque, il modulo di compressibilità *adiabatico* è pari al prodotto della pressione per la costante  $\gamma$  e la velocità dell'onda prevista risulta:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho_0}}. \quad (1.9.7)$$

In condizioni standard per l'aria, considerata come un gas perfetto biatomico,  $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$ ,  $p = 101325 \text{ Pa}$ ,  $\gamma = 1.4$ ; sostituendo si trova  $v = 331.61 \text{ m/s}$ , da confrontarsi con il valore sperimentale  $331.45 \text{ m/s}$ .

L'onda di spostamento è *longitudinale*: infatti, lo spostamento dell'elementino di massa avviene lungo l'asse delle  $x$ . In un fluido non possono generarsi onde meccaniche trasversali. Si noti comunque che ogni elementino di massa compie delle oscillazioni costituite da compressioni ed espansioni, ma non c'è trasporto netto di massa lungo il tubo.

Lungo la colonna di gas si propagano anche un'onda di pressione e un'onda di densità: infatti, derivando la (1.9.4) rispetto al tempo e rispetto alla coordinata  $x$ :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la (1.9.5);

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

(essendo le derivazioni rispetto ad  $x$  e rispetto a  $t$  indipendenti, se ne può scambiare l'ordine), da cui:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\rho_0}{\beta} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9.8)$$

La (1.9.8) mostra che lungo il tubo si propaga un'onda di pressione, con velocità data dalla (1.9.7). Analogamente, dalla (1.9.2) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1.9.9)$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Sostituendo nell'ultima equazione la (1.9.5) troviamo:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\beta}{\rho_0} \right] \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (1.9.10)$$

e dal confronto di (1.9.9) e (1.9.10) segue:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \frac{\rho_0}{\beta} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0 \quad (1.9.11)$$

Anche l'onda di densità si propaga con la stessa velocità dell'onda di spostamento.

### 1.9.5 La velocità di propagazione del suono

La velocità con cui un dato suono si propaga in un fluido è una proprietà caratteristica del fluido stesso. Nel caso di propagazione in un *gas* – assunto perfetto per semplicità – la velocità del suono non dipende dalla pressione, in quanto il rapporto  $\frac{p}{\rho_0}$  - che compare nella (1.9.7) - è costante a

temperatura costante, in base alla legge di Boyle. Quindi la velocità di propagazione del suono in aria è sostanzialmente indipendente dalla pressione barometrica. Inoltre, siccome  $\frac{p}{\rho_0} = \frac{RT}{p.m.}$  (*p.m.*

è il peso molecolare), risulta che il rapporto tra le velocità  $v$  e  $v_0$ , rispettivamente alle temperature  $T$  e  $T_0$ , è pari alla radice quadrata delle temperature, per cui:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad (1.9.12)$$

Come riferimento  $T_0$  si può prendere la temperatura di 20 °C (si tenga però presente che nella (1.9.12) le temperature sono espresse in gradi Kelvin).

Nel caso di propagazione di un'onda in un *liquido* si usa la seguente formula, analoga a quella per i gas:

$$v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_0}} \quad (1.9.13)$$

ove  $\beta$  è il modulo di elasticità adiabatico e  $\rho_0$  la densità. Per quanto riguarda la dipendenza da pressione e temperatura, si ricorre spesso ad espressioni empiriche invece che a formule derivate da modelli, molto complicate.

Nei fluidi comunque si propagano solo onde longitudinali, mentre come detto in precedenza in un solido un'onda che si propaga può avere carattere trasversale ovvero longitudinale. La tabella seguente riporta la velocità del suono in alcuni mezzi:

Sostanza	Velocità (m/s)
Alluminio	5104
Rame	3650
Acciaio	5000 – 5900
Piombo	1220
Mattoni	3650
Granito	6000
Marmo	3800
Vetro	4000-5500
Gomma vulcanizzata	1800
Legno	3300-4600
Acqua	1500
Vapor d'acqua	404

### 1.10 L'effetto Doppler

I risultati finora ottenuti presuppongono che la sorgente (S) e l'osservatore-ricevitore (R) siano tra loro in quiete. Se fra essi vi è un moto relativo la frequenza del suono misurato da R è differente da quella emessa da S. In ciò consiste l'effetto Doppler.

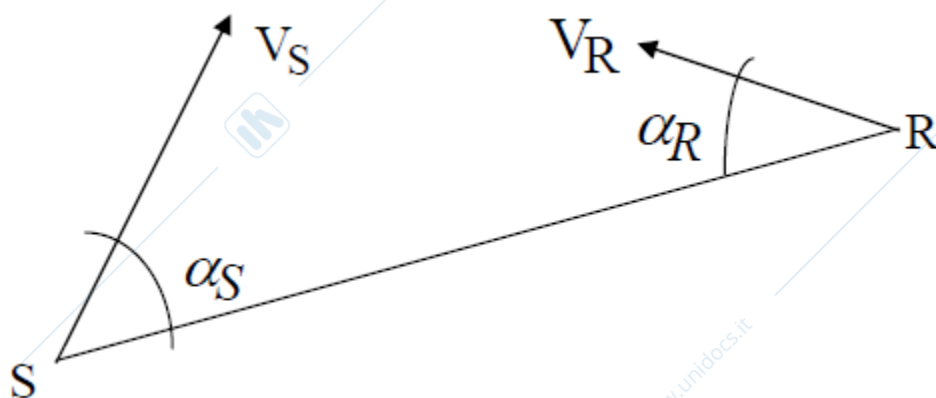


Figura 1.10.1

Indichiamo (figura 1.10.1) con  $V_S$  e con  $V_R$  rispettivamente le velocità della sorgente e del ricevitore rispetto al mezzo che fa da supporto alla perturbazione sonora. Sia  $V$  la velocità dell'onda sonora nel mezzo. Siano inoltre  $\alpha_S$  ed  $\alpha_R$  gli angoli tra la direzione delle velocità di S e di R rispetto alla congiungente S – R. All'istante  $t = 0$  la sorgente S – che si trova a distanza  $L$  da R – emette un treno di  $N$  onde di frequenza  $\nu$ ; il primo fronte d'onda raggiunge R all'istante  $t_1$  determinato dalla relazione:  $L = Vt_1 + (V_R \cos\alpha_R)t_1$  ossia:

$$t_1 = \frac{L}{V + V_R \cos\alpha_R} \quad (1.10.1)$$

All'istante  $T = \frac{N}{v}$  la sorgente S cessa di emettere onde sonore. L'ultimo fronte d'onda raggiunge R ad un istante  $t_2$ ; imponendo che la distanza S - R all'istante T venga percorsa in parte dall'onda sonora, in parte da R si ha:

$$L - (V_S \cos \alpha_S)T - (V_R \cos \alpha_R)T = V(t_2 - T) + (V_R \cos \alpha_R)(t_2 - T)$$

Semplificando e usando la (1.10.1) risulta:

$$t_2 = t_1 + \frac{V - V_S \cos \alpha_S}{V + V_R \cos \alpha_R} T$$

Nell'intervallo di tempo  $(t_2 - t_1)$  R conta  $N$  fronti d'onda, per cui la frequenza misurata da R è:

$$\nu' = \frac{N}{t_2 - t_1} = \frac{V + V_R \cos \alpha_R}{V - V_S \cos \alpha_S} \frac{N}{T} = \frac{V + V_R \cos \alpha_R}{V - V_S \cos \alpha_S} \nu \quad (1.10.2)$$

Nel caso usuale in cui sia S che R si muovano lungo la congiungente S - R si ottiene:

$$\nu' = \frac{V + V_R}{V - V_S} \nu \quad (1.10.3)$$

Se solo S è in moto:

$$\nu' = \frac{1}{1 - \frac{V_S}{V}} \nu$$

Nel caso in cui  $\frac{V_S}{V} \ll 1$  si ha  $\nu' \cong \left(1 + \frac{V_S}{V}\right) \nu$ ; quindi R registra una frequenza  $\nu' > \nu$  se la sorgente si avvicina ad R, mentre la frequenza è più bassa se la sorgente si allontana ( $V_S < 0$ ).

Analogamente, se  $V_S = 0$  ed R è in moto:

$$\nu' = \left(1 + \frac{V_R}{V}\right) \nu$$

Di nuovo,  $\nu' > \nu$  se R si avvicina ad S, mentre  $\nu' < \nu$  se R si allontana da S.

Si noti che, in generale, la variazione di frequenza è differente, a parità di velocità relativa tra S ed R, a seconda che sia S ovvero R a muoversi.

Si noti infine che, se lo spostamento ha luogo in direzione ortogonale alla congiungente S - R, l'effetto Doppler è nullo. Questa considerazione non è più valida nel caso elettromagnetico.

Cosa succede se la sorgente si muove con una velocità di propagazione superiore a quella dell'onda nel mezzo? In un certo intervallo di tempo la sorgente avanza più del fronte d'onda. P.es. se nel

tempo  $t$  la sorgente si muove da A a B, (figura 1.10.2) il fronte d'onda si è mosso solo da A ad A' e A'':

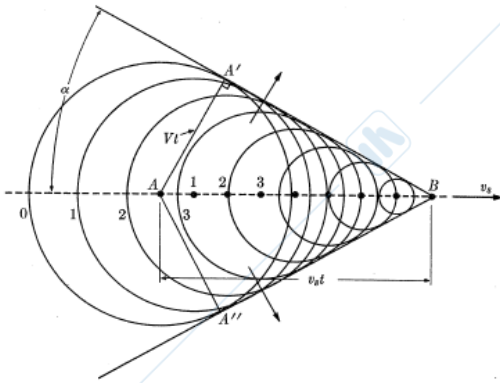


Figura 1.10.2

La superficie tangente a tutte le onde successive è un cono avente per asse la traiettoria della sorgente e la cui apertura è data da:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_s} \quad (1.10.4)$$

Il moto risultante è un'onda conica che si propaga come indicato dalle frecce in figura. E' detta onda di Mach o onda d'urto. Il suono impulsivo violento che si sente quando un aereo supersonico passa nelle vicinanze è appunto generato in questo modo. Queste onde si possono osservare facilmente quando una barca si muove più velocemente delle onde superficiali sull'acqua. Un effetto analogo (effetto Cerenkov) si ha quando una particella si muove in un mezzo, con una velocità maggiore di quella della luce *nel mezzo*. L'effetto è sfruttato per rivelare la particella e determinarne l'energia.

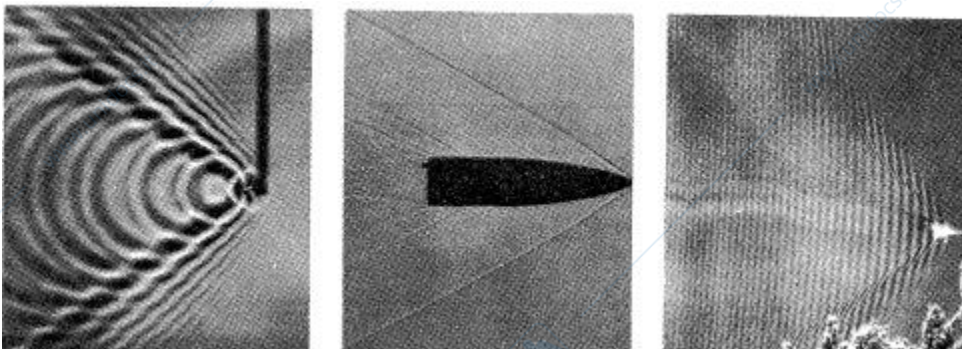


Figura 1.10.3

### 1.11 Intensità di un'onda

Abbiamo detto che un'onda non trasporta materia ma (anche) energia. In effetti, durante il moto ondoso gli atomi o molecole del mezzo sono posti in movimento, ma oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio. Consideriamo il caso di una barra soggetta ad onde elastiche longitudinali.

(fig 1.9.2.1, vedi sopra). In un particolare elemento che si sposta con velocità  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ , il lato destro 'tira' il lato sinistro con una forza  $F$ , mentre il sinistro tira il destro con una forza  $-F$ . La potenza che il lato sinistro trasmette al lato destro in quell'elemento è:

$$P = \frac{\partial W}{\partial t} = (-F) \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (1.11.1)$$

Questa potenza si trasmette quando la perturbazione si propaga. Supponiamo di avere un'onda sinusoidale:

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

Abbiamo:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

$$F = YA \frac{\partial \xi}{\partial x} = YAk \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

dove  $A$  è la sezione della barra. Considerando che  $\omega = kv$  e che  $v^2 = Y/\rho$  la potenza diviene:

$$P = vA[\rho \omega^2 \xi_0^2 \cos^2(kx - \omega t)] \quad (1.11.2)$$

termine fluttuante ma sempre positivo. Ricordando che il valore medio nel tempo del quadrato del coseno è  $1/2$ , abbiamo, per la potenza media:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} vA \rho \omega^2 \xi_0^2 \quad (1.11.3)$$

Notiamo che il termine:

$$e = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

è un'energia per unità di volume, cioè una densità di energia. La quantità 'energetica' più importante è comunque la potenza per unità di superficie, ovvero l'intensità:

$$I = \frac{1}{2} v \rho \omega^2 \xi_0^2 \quad (1.11.4)$$

Essa rappresenta l'energia che incide nell'unità di tempo su una superficie unitaria. Se infatti vogliamo misurare l'energia associata a un'onda, lo strumento capterà solo una porzione del fronte d'onda e quindi la potenza misurata sarà tanto maggiore quanto più grande è la superficie dello strumento esposta all'onda. Se vogliamo ottenere una quantità che sia indipendente dalla superficie, bisogna riferirsi a una superficie unitaria. Inoltre, in molte situazioni non siamo interessati all'energia scambiata istante per istante, ma piuttosto a un valore medio (in certi casi le oscillazioni hanno una frequenza talmente elevata, come in fenomeni elettromagnetici, che sarebbe impossibile seguirle continuamente nel tempo). Ecco perché ci riferiamo in genere a un'intensità media.

Notiamo la dipendenza dal quadrato della frequenza e dal quadrato dell'ampiezza. L'intensità si misura in  $W m^{-2}$ . In acustica è frequente un'altra unità di misura, che ora andiamo ad introdurre.

### 1.12 Percezione sonora e scala dei decibel

Supponiamo di generare un suono avente una determinata frequenza: 1000 Hz e di misurare l'intensità sonora con un opportuno strumento e nello stesso tempo di effettuare esperimenti di percezione sonora tramite individui giovani dotati di un sistema uditivo privo di difetti. Il suono verrà percepito a partire da un dato valore d'intensità, che risulta pari a  $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$ . Si parla di *soglia di udibilità*. Se aumentiamo l'intensità del suono con continuità esso verrà percepito come sempre più intenso fino a raggiungere una sensazione dolorosa: si dice che si raggiunge la *soglia del dolore*. Ciò avviene per un'intensità pari a  $I_D = 1 \text{ W m}^{-2}$ . Pertanto il nostro orecchio, in condizioni ottimali, a 1000 Hz, è in grado di coprire ben dodici ordini di grandezza di livelli sonori. E' opportuno in questi casi esprimere la grandezza (intensità) in una scala logaritmica, a partire da un livello di riferimento convenzionale. La scelta più naturale è di riferire le intensità a  $I_0$ , per cui la generica intensità viene espressa nella cosiddetta scala dei decibel:

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (1.12.1)$$

Tale scala non fornisce una misura assoluta dell'intensità, ma solo relativa. La soglia di udibilità è pari a 0 dB, mentre la soglia del dolore risulta pari a 120 dB. Un suono che superi un altro di 10 dB ha quindi una potenza 10 volte maggiore; 3 dB in più corrispondono a un raddoppio della potenza sonora.

Ricaviamo ora un'espressione che lega l'intensità di un'onda sonora alla pressione sonora. Supponendo un'onda armonica:

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

e ricordando la 1.9.4 abbiamo, per la pressione sonora (cioè le variazioni di pressione rispetto al valore di equilibrio,  $p_0$ ):

$$p = -\beta \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\beta k \omega \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Da cui:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{2} v^2 \rho^2 \omega^2 \xi_0^2$$

Per l'intensità media, analogamente alla (1.11.1):

$$I = -p \frac{\partial \xi}{\partial t} = \beta \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{2} \beta k \omega \xi_0^2 = \frac{1}{2} v \rho \omega^2 \xi_0^2 = \frac{\langle p^2 \rangle}{\rho v} \quad (1.12.2)$$

Dalla (1.12.2) possiamo trovare i livelli di pressione (più correttamente: di variazioni di pressione) corrispondenti alla soglia di udibilità e alla soglia del dolore. Tenendo conto dei valori della densità dell'aria ( $1.29 \text{ kg m}^{-3}$ ) e della velocità del suono in aria ( $331 \text{ m s}^{-1}$ ), si trova:

$$p_{\min} = \sqrt{\langle p^2 \rangle} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa} \quad \text{per la soglia di udibilità}$$

$$p_{\max} = \sqrt{\langle p^2 \rangle} = 20.5 \text{ Pa} \quad \text{per la soglia del dolore}$$

Siccome gli strumenti di misura rispondono alla pressione piuttosto che all'intensità, si suole esprimere in decibel anche il livello di pressione sonora:

$$p_{dB} = 10 \log \frac{p^2}{p_{\min}^2} = 20 \log \frac{p}{p_{\min}} \quad (1.12.3)$$

Si noti che le scale (1.12.1) e (1.12.3) sono di fatto coincidenti. La tabella 1 fornisce esempi di livello sonoro relativi a diverse sorgenti.

**Tabella 1** – Intensità acustica di vari suoni

Sorgente	Livello (dB)
Limite di udibilità	0
Respiro	10
Bisbiglio	20
Rumore di fondo notturno in città	30
Ufficio silenzioso	50
Conversazione tra 2 persone a 1 m	55
Ristorante affollato	65
Traffico cittadino diurno	70-80
Martello pneumatico	90
Metropolitana	100
Complesso rock in locale chiuso	110
Soglia del dolore	120
Jet al decollo (a 50 m)	130
Galleria del vento	150
Decollo del missile Saturno (a 50 m)	190
Massimo rumore prodotto in laboratorio	210

Sebbene si prenda come riferimento per la scala dei decibel la soglia di udibilità a 1000 Hz, occorre precisare che il nostro orecchio ha una sensibilità differente al variare della frequenza: la soglia di udibilità si alza alle basse e alle alte frequenze, come si nota dalla figura 1.12.1.

Siamo in grado di percepire suoni su un intervallo di frequenze compreso tra 20 e 20000 Hz. Al di sotto dei 20 Hz (infrasuoni) percepiamo vibrazioni mentre sopra i 20 kHz abbiamo gli ultrasuoni, che trovano numerosi impieghi, per esempio nelle ecografie. Animali con una struttura auricolare simile alla nostra percepiscono suoni su campi di frequenze differenti. P.es. il pipistrello è in grado di percepire onde sonore nell'intervallo tra 1 e 100 kHz, mentre i delfini hanno una capacità più ampia: tra 200 Hz e 200 kHz.

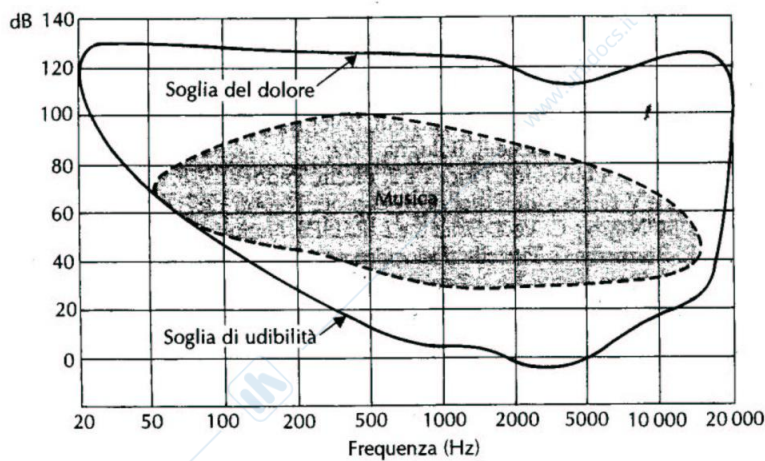


Figura 1.12.1

### 1.13 Impedenza

E' utile introdurre una grandezza legata alla risposta di un mezzo a una sollecitazione esterna. E' detta impedenza, in genere indicata con  $Z$ , e nel caso di un'onda è definita come il rapporto tra la forza agente sul sistema e la velocità del sistema:

$$Z = \frac{F}{\frac{\partial \xi}{\partial x}}$$

L'impedenza collega quindi l'azione esercitata sul sistema alla risposta del sistema. In genere è funzione della frequenza. Vediamo alcuni casi specifici, riprendendo gli esempi di onde meccaniche trattati in precedenza.

Nel caso di onde trasversali su una corda, l'espressione della forza è:

$$F = T \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

per cui  $Z = T \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial t}}$ , e ricordando che  $\xi = \xi(x \pm vt)$  abbiamo:

$$Z = \frac{T}{v} = \mu v = \sqrt{T\mu}$$

Nel caso delle onde longitudinali in una barra:

$$F = AY \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

per cui

$$Z = \frac{AY}{v} = A\rho v = A\sqrt{\rho Y}$$

Nel caso di onde sonore in un gas, come sollecitazione esterna si considera la pressione, cioè la forza per unità di superficie:

$$Z = \frac{p}{\frac{\partial \xi}{\partial t}} = \beta \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial t}} = \frac{\beta}{v} = \rho v = \sqrt{\beta \rho}$$

E' interessante esprimere l'intensità in funzione dell'impedenza, nei vari casi considerati. Se ci riferiamo all'impedenza caratteristica  $Z_0$ , o impedenza per unità di superficie, osserviamo che la (1.11.4) può scriversi:

$$I = \frac{1}{2} Z_0 \omega^2 \xi_0^2$$

### 1.14 Riflessione e trasmissione di onde elastiche.

In presenza di una superficie di separazione tra due mezzi meccanici, un'onda incidente generalmente produce un'onda riflessa, che si propaga nel primo mezzo in direzione opposta a quella incidente, e una trasmessa nel secondo mezzo. Vediamo quali condizioni occorre imporre alla superficie di discontinuità tra le varie onde generate e facciamo riferimento alle onde trasversali su una corda. Fissiamo la superficie di discontinuità in  $x = 0$ , consideriamo onde armoniche in rappresentazione complessa:

$$\xi_i = A_i \exp[i(k_i x - \omega_i t)]; \quad \xi_r = A_r \exp[i(-k_r x - \omega_r t)]; \quad \xi_t = A_t \exp[i(k_t x - \omega_t t)] \quad (1.14.1)$$

I pedici  $i$ ,  $r$ , e  $t$  indicano rispettivamente l'onda incidente, riflessa e trasmessa. Il segno negativo davanti al fattore  $kx$  nell'onda riflessa indica che l'onda è, per l'appunto, regressiva. Imponiamo che la funzione che descrive l'onda e la sua derivata prima rispetto a  $x$  siano continue per  $x = 0$ :

$$\xi_i + \xi_r = \xi_t ; \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi_r}{\partial x} = \frac{\partial \xi_t}{\partial x} \quad (1.14.2)$$

Il significato fisico della prima equazione è che la corda non si deve spezzare in  $x = 0$ . Per comprendere il significato fisico della seconda, ricordiamo che la forza trasversale agente su un punto della corda è data da  $T \frac{\partial \xi}{\partial x}$ . Se quindi il punto  $x = 0$  fosse sottoposto a una forza diversa da zero (data dalla differenza tra le due derivate a destra e a sinistra del punto), la sua accelerazione sarebbe infinita, dal momento che avrebbe una massa nulla; il che non avrebbe significato fisico. Sostituiamo quindi le (1.14.1) nella prima delle (1.14.2) e chiediamo che la relazione sia soddisfatta a tutti gli istanti (immaginiamo una perturbazione che incida continuamente sulla superficie) per  $x = 0$ :

$$A_i \exp[-i\omega_i t] + A_r \exp[-i\omega_r t] = A_t \exp[-i\omega_t t] \quad (1.14.3)$$

La sola possibilità per eliminare il tempo dalla precedente è che  $\omega_i = \omega_r = \omega_t$ : pertanto, l'onda riflessa e quella trasmessa hanno la stessa frequenza dell'onda incidente. Questa è la prima importante conclusione che ricaviamo. Denotiamo semplicemente con  $\omega$  la pulsazione delle tre onde. Ricordando che  $\omega = kv$ , abbiamo inoltre che  $k_r = k_i$  in quanto le due onde si propagano nello stesso mezzo e quindi con la stessa velocità. Sostituendo le (1.14.1) nella seconda delle (1.14.2) abbiamo:

$$A_i k_i - A_r k_i = A_t k_t$$

che, messa a sistema con la (1.14.3), opportunamente semplificata, produce, dopo una semplice manipolazione algebrica:

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{k_i - k_t}{k_i + k_t} \quad (1.14.4a)$$

$$\frac{A_t}{A_i} = \frac{2k_i}{k_i + k_t} \quad (1.14.4b)$$

che possiamo anche esprimere in termini delle velocità delle onde nei mezzi 1 (onda incidente) e 2 (onda trasmessa):

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}; \quad \frac{A_t}{A_i} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \quad (1.14.5)$$

Ovvero, in termini di impedenze:

$$\frac{A_r}{A_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad \frac{A_t}{A_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (1.14.6)$$

Se  $v_2 > v_1$ , e quindi  $Z_2 < Z_1$ , ossia la seconda corda è più 'leggera' (meno densa) della prima, le ampiezze delle onde riflessa e incidente hanno lo stesso segno, ossia sono in fase. Nel caso opposto, l'onda riflessa ha segno opposto rispetto all'onda incidente: ciò equivale a inserire, nell'espressione complessa che la caratterizza, un fattore di fase pari a  $\pi$ . Notiamo che invece l'onda trasmessa è sempre in fase con quella incidente.

Studiamo, facendo riferimento alle espressioni in termini di impedenze, alcuni casi particolari:

i)  $Z_1 = Z_2$ . L'ampiezza dell'onda riflessa è zero: l'onda è totalmente trasmessa, manca l'onda riflessa. In genere, se vogliamo trasferire integralmente l'onda da un mezzo ad un altro, occorre 'accordare' le impedenze. P.es. se vogliamo evitare il più possibile la riflessione del suono in un ambiente, lo tappezziamo di pannelli acustici. Questi in genere sono costituiti da un materiale poroso, in modo che la sua impedenza acustica sia quanto più possibile vicina a quella dell'aria: più lo riempiamo d'aria, meno l'onda sarà riflessa (il discorso in realtà è più complicato, in quanto la capacità di riflessione dipende dalla frequenza dell'onda incidente. I pannelli fonoassorbenti funzionano bene in genere solo a frequenze medio alte, da circa 1000 Hz in su, a meno di avere pannelli molto spessi).

Una situazione analoga si ha nel caso di onde elettromagnetiche: l'impedenza dell'aria o dei tessuti viventi, alle alte frequenze non presenta differenze significative e i raggi X penetrano senza riflettersi nei tessuti e possono venire rivelati tramite una lastra fotografica posta dopo il paziente: il diverso assorbimento da parte dei tessuti 'molliti' ed ossei permette di osservare il tessuto scheletrico.

ii)  $Z_2 \gg Z_1$ . Qui è l'onda trasmessa che manca, l'onda è totalmente riflessa e sfasata rispetto a quella incidente. E' il caso del suono che si propaga in una cattedrale, dalle pareti di granito: l'assorbimento è molto basso e il suono viene riflesso parecchie volte prima di diminuire significativamente d'intensità. Si ha un'elevata riverberazione, con scarsa intelligibilità della parola.

iii)  $Z_1 \gg Z_2$ . In questo caso l'onda riflessa ha ampiezza circa pari a quella incidente, mentre quella riflessa ha ampiezza doppia. Se questo vi sembra in contrasto con la conservazione dell'energia, calcoliamo i rapporti tra le intensità (coefficienti di riflessione e di trasmissione):

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{Z_1 A_r^2}{Z_2 A_i^2} = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2; \quad T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_2 A_t^2}{Z_1 A_i^2} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

e risulta  $R + T = 1$ .

### 1.15 Onde stazionarie

Supponiamo di avere due onde elastiche che si propagano nella stessa direzione ma in versi opposti. Per fissare le idee, consideriamo il caso di due onde su una corda, con estremi fissi. Supponiamo che le due onde abbiano la stessa ampiezza, oltre che la stessa frequenza:

$$\xi_1 = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\xi_2 = \xi_0 \sin(kx + \omega t)$$

L'onda risultante:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] = 2\xi_0 \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (1.15.1)$$

Questa funzione *non* può rappresentare un'onda che si propaga, in quanto variabile spaziale e temporale sono separate. In altri termini, l'argomento della funzione  $\xi(x, t)$  *non* è del tipo  $(x \pm vt)$ . La funzione  $\xi$  si presenta come il prodotto di due funzioni, una dipendente solo da  $x$ , l'altra dipendente solo da  $t$ . Se consideriamo un punto particolare, esso compie oscillazioni sinusoidali con la frequenza delle onde componenti; tuttavia, l'ampiezza di oscillazione dipende dalla scelta del punto. In particolare, per

$$kx = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

l'ampiezza di oscillazione è massima: i valori di  $x$  per i quali si verifica tale situazione si chiamano *ventri*. Nei punti in cui:

$$kx = n\pi$$

l'ampiezza d'oscillazione è sempre nulla: sono i *nod*i. Un ventre di oscillazione ed il nodo adiacente sono separati da una distanza  $\Delta x$  data da:

$$k\Delta x = \frac{\pi}{2}$$

cioè (si ricordi che  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ):

$$\Delta x = \frac{\lambda}{4}$$

Due nodi (o due ventri) successivi sono separati da una distanza pari a  $\frac{\lambda}{2}$ .

Si osservi che, dopo che onde stazionarie si sono stabilite in una regione, *non vi è trasferimento di energia* da un punto all'altro. Il fatto è evidente se si tiene presente che attraverso i nodi non può fluire energia, essendo punti fermi. Se si vuole una dimostrazione formale, occorre costruire la potenza associata all'onda stazionaria:

$$P = (p - p_0)Su = -\beta S \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

sostituirci le derivate:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 2\xi_0 k \cos kx \cos \omega t;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -2\xi_0 \omega \sin kx \sin \omega t$$

ottenendo:

$$P = 4\xi_0^2 \beta S k \omega \sin kx \cos kx \sin \omega t \cos \omega t$$

e osservare che, essendo una funzione dispari di  $t$ , il suo valor medio su un periodo è nullo.

Per ottenere onde stazionarie si può pizzicare una corda tesa in un punto generando delle onde che, in un breve transitorio, si propagano finendo alle estremità fissate della corda. Qui devono riflettersi invertendo la fase: la corda diviene sede di onde progressive e regressive che si combinano producendo onde stazionarie, dette anche *modi normali* di vibrazione della corda. Le loro caratteristiche dipendono dalla lunghezza  $L$  della corda: se richiediamo che alle due estremità lo spostamento dell'onda (1.15.1) sia nullo, abbiamo le seguenti condizioni:

$$\xi|_{x=0} = 0; \quad \xi|_{x=L} = 0$$

La prima è automaticamente soddisfatta, in quanto  $\sin(0) = 0$ ; la seconda impone  $\sin(kL) = 0$  e quindi:

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi$$

cioè:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \tag{1.15.2}$$

con  $n$  intero positivo. Pertanto, le lunghezze d'onda dei modi normali (e quindi le frequenze:

$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{vn}{2L}$ ) non possono essere scelte ad arbitrio, ma sono legate alla lunghezza della corda:

$$\lambda = 2L, L, \frac{2}{3}L, \frac{L}{2}, \dots$$

I modi sono cioè *quantizzati*. Il modo avente la massima lunghezza d'onda ha i nodi negli estremi stessi (fondamentale o prima armonica); il secondo modo (seconda armonica) ha un nodo a metà della corda, il terzo modo ha due nodi, e così via. In figura 1.15.1 sono rappresentate le prime 5 armoniche di un'onda stazionaria su una corda di lunghezza  $L$  con estremi fissi, e la 20° armonica.

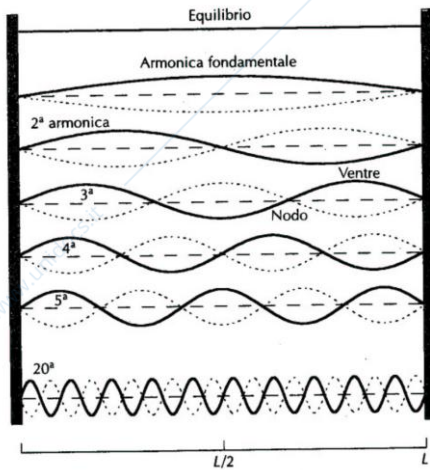


Figura 1.15.1

L'onda generale che si instaura su una corda ad estremi fissi è una combinazione lineare di modi normali. In altri termini, se pizzichiamo una corda generiamo una combinazione di onde stazionarie. Lo stesso discorso vale nel caso di un tubo chiuso alle estremità. Si deve notare che onde stazionarie si possono generare anche se uno solo degli estremi è fisso; in questo caso le condizioni da imporre sono:

$$\xi|_{x=0} = 0 ; \quad \left. \frac{d\xi}{dx} \right|_{x=L} = 0$$

che implicano una differente condizione sulle lunghezze d'onda ammissibili. Infatti, la prima condizione richiede un nodo in  $x = 0$ , mentre la seconda richiede un ventre in  $x = L$ . Derivando la (1.1.5.1), questo implica che:

$$kL = (2m + 1)\pi/2$$

ossia:

$$\lambda = \frac{4L}{2m + 1}$$

con  $m = 0, 1, \dots$  In termini di frequenza:

$$f = v \frac{2m+1}{4L} \quad (1.15.3)$$

La quantizzazione delle frequenze permane anche in questo caso. Questo è il caso di molti strumenti a fiato.

Il suono generato da uno strumento è una combinazione di onde stazionarie. Una corda in tensione nello spazio che stia vibrando trasmette la vibrazione alle molecole d'aria circostanti generando suoni di ampiezza molto piccola: non è dunque una sorgente efficiente. Per aumentare l'efficienza degli strumenti musicali ad arco si tendono quindi le corde vicino a delle cavità che, risuonando, possono rinforzare le vibrazioni prodotte nell'aria direttamente dalle corde. Infatti in questo caso si tratta di eccitare qualche modo proprio della cavità, dando luogo a una vera e propria risonanza: il suono ne esce fortemente amplificato. Ciò è ottenuto munendo la cavità di aperture disposte opportunamente e sagomate. Si possono dare alla cavità forme diverse: l'esperienza dimostra che la frequenza fondamentale della cavità cresce con l'area della superficie, decresce con il suo volume e non dipende praticamente dalla forma.

Pur suonando la stessa nota (la stessa fondamentale) strumenti diversi sono caratterizzati da un diverso *timbro*: il do di un violino è chiaramente riconoscibile dalla stessa nota suonata da un pianoforte. Ciò è dovuto al fatto che per ogni strumento la combinazione di armoniche che si riferiscono alla stessa fondamentale è specifica dello strumento.

Si può arrivare al concetto di onda stazionaria anche attraverso un procedimento matematico, che considera soluzioni particolari dell'equazione di d'Alembert, a variabili separabili. In altri termini, si cercano soluzioni del tipo:

$$\xi(x, t) = f(x)g(t)$$

Sostituendo nella (1.2.1) si ottiene:

$$g(t) \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{v^2} f(x) \frac{d^2 g}{dt^2} = 0$$

ovvero:

$$\frac{v^2}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} \quad (1.15.4)$$

Il primo membro dipende solo da  $x$ , il secondo solo dal tempo. E' chiaro che l'uguaglianza può sussistere solo se entrambi sono uguali a una costante; se chiamiamo  $-\omega^2$  questa costante abbiamo le due equazioni:

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \omega^2 g = 0 \quad (1.15.5)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0 \quad (1.15.6)$$

dove si è posto:  $\omega^2 = k^2 v^2$ . Le soluzioni delle (1.15.5) e (1.15.6) sono le funzioni armoniche, del tipo seno o coseno di  $kx$  ovvero di  $\omega t$ . Si può dimostrare che la soluzione generale assume la forma seguente:

$$\xi = A \cos(kx) \cos(\omega t + \alpha) + B \sin(kx) \sin(\omega t + \beta)$$

Si noti che se  $B = \pm A$  si ottiene un'onda viaggiante:  $A\cos(kx \pm \omega t + \varphi)$ . E' possibile quindi seguire un percorso, duale a quello che abbiamo seguito, in cui invece di combinare due (opportune) onde viaggianti, di ampiezza uguale, per ottenere un'onda stazionaria si parte da due (opportune) onde stazionarie di uguale ampiezza per ottenere onde viaggianti. In generale, possiamo costruire la soluzione generale dell'equazione di D'Alembert o combinando linearmente onde viaggianti, con scelta opportuna delle ampiezze (come abbiamo visto nell'analisi di Fourier), oppure utilizzando onde stazionarie. Queste ultime, al pari delle onde armoniche viaggianti, formano un sistema ortogonale completo, e il loro utilizzo è particolarmente comodo in problemi in cui siano date delle condizioni al contorno.