

Lezione VII

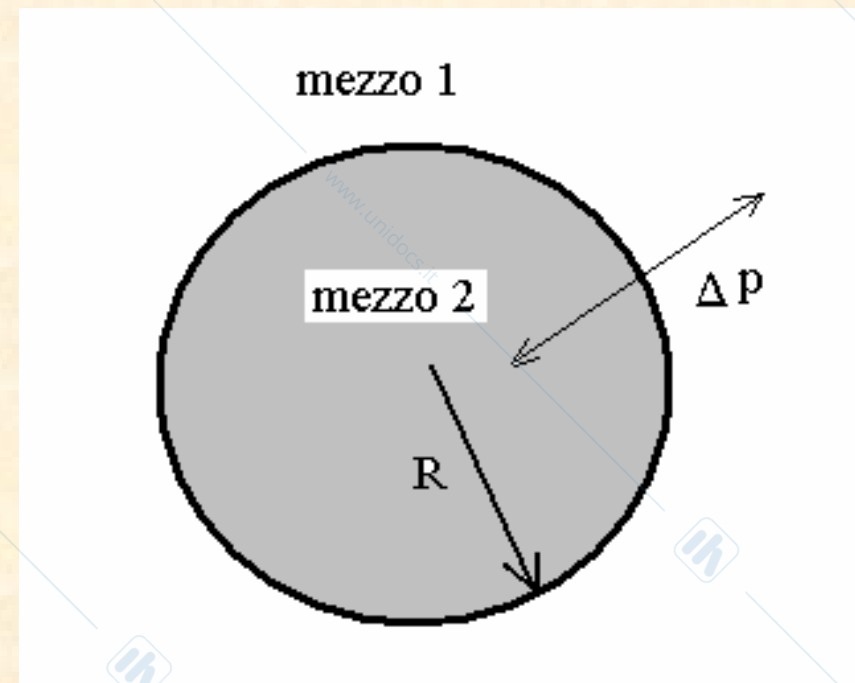
Equazione di Laplace per superfici sferiche

Si consideri una generica superficie di separazione di forma sferica tra due mezzi, che sia caratterizzata dalla tensione superficiale τ . La tensione superficiale tende a ridurre questa superficie ma ciò viene contrastato dalla pressione, p_i , al suo interno. La superficie (membrana) è in equilibrio se vale la seguente relazione:

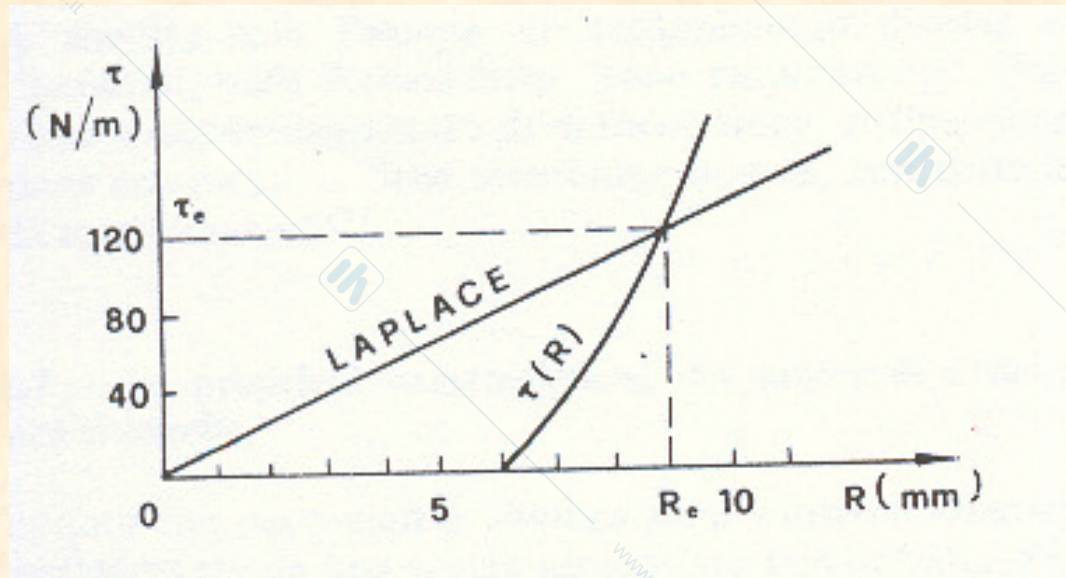
$$\Delta p = p_i - p_e = \frac{2\tau}{R}$$

Per superficie cilindriche (es: vasi sanguigni) la legge si modifica in

$$\Delta p = \frac{\tau}{R}$$

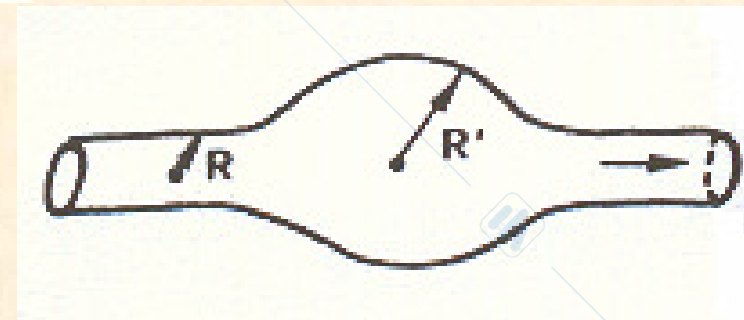


In generale il raggio di equilibrio di un vaso si determina richiedendo che valgano simultaneamente la **Legge di Laplace**, $\Delta p R = \tau$, e la legge costitutiva del vaso, $\tau = \tau(R)$.



Se per una qualche ragione il punto di equilibrio si sposta verso raggi maggiori (aneurisma) allora si richiede al vaso un lavoro maggiore di espansione o di contrazione. Ciò può mettere a rischio la tenuta del vaso stesso.

I vasi venosi degli arti inferiori sono sottoposti a pressione maggiore a causa della forza di gravità. Questo porta ad un progressiva dilatazione dei vasi.



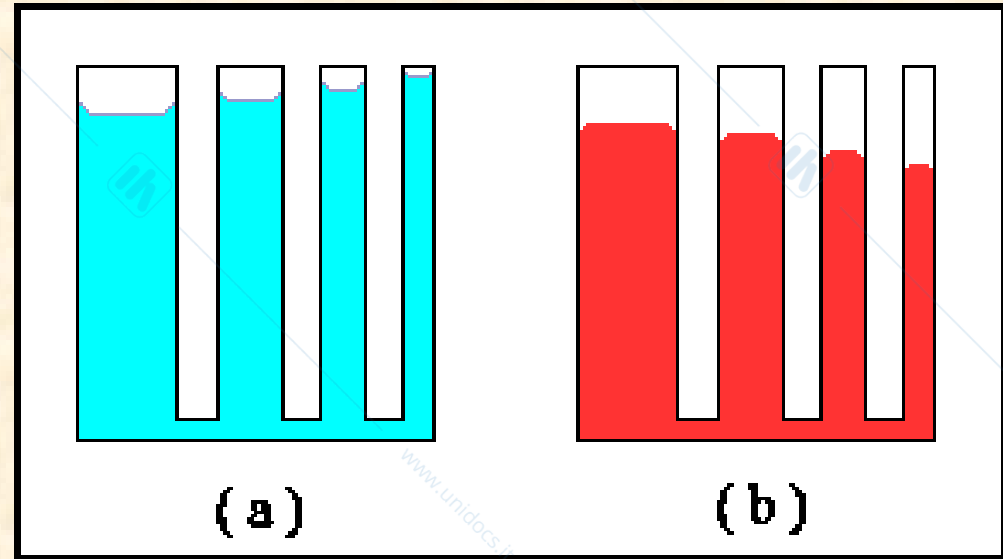
aneurisma

La capillarità e l'innalzamento capillare

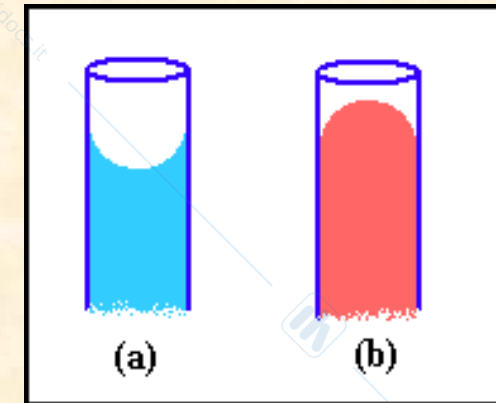
Tubi di sezione molto piccola (del diametro di qualche decimo di millimetro) sono detti **vasi capillari**: per questi non vale più il principio dei vasi comunicanti, ma la superficie si dispone secondo una sezione concava o convessa (menisco).

Nei tubi capillari l'innalzamento o la depressione del livello del liquido dipende dal tipo di

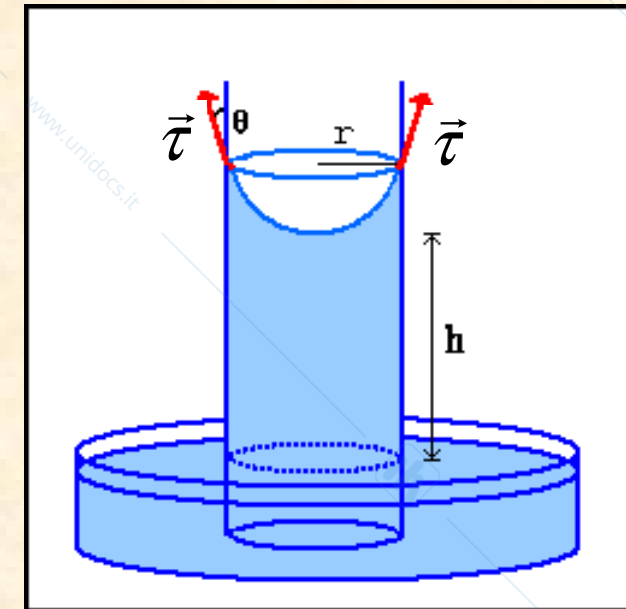
liquido (nel disegno (a) è il caso dell'acqua che tende a salire nei tubi e (b) quello del mercurio, che invece tende a scendere). Il fenomeno, detto **capillarità**, è spiegato dal fatto che in un liquido esistono **forze di coesione** che fanno sì che molecole simili si attraggano tra loro. Invece, la forza tra la molecola di un liquido e un'altra sostanza (come il vetro della parete di un recipiente che contenga il liquido stesso) è detta **forza di adesione**.



Si dice che un liquido *bagna* la superficie di un'altra sostanza quando le forze di adesione sono grandi rispetto a quelle di coesione (acqua): in questo caso, si ha risalita del fluido lungo un tubo capillare e la sua superficie è concava verso l'alto. Viceversa, quando dominano le forze di coesione (mercurio) il livello del fluido tende a decrescere e la sua superficie è convessa.



Se la superficie del liquido è concava verso l'alto la tensione superficiale alle pareti del tubo sarà diretta verso l'alto: la componente verticale di questa forza è quella che fa salire il liquido nel vaso finché essa non viene equilibrata dal peso del liquido. Il suo modulo è pari a $\tau \cos \theta$, dove l'angolo è quello indicato in figura ed è detto **angolo di contatto**. Poiché la linea di contatto è lunga $2 \pi r$ la forza verticale sarà pari a $2 \pi r \tau \cos \theta$.



Trascurando la lieve curvatura sulla superficie, il volume del liquido nel capillare è $\pi r^2 h$ ed uguagliando la forza diretta verso l'alto al peso del fluido si ha :

$$2 \pi r \tau \cos \theta = \delta g \pi r^2 h$$

che ci permette di trovare l'altezza h raggiunta dal liquido :

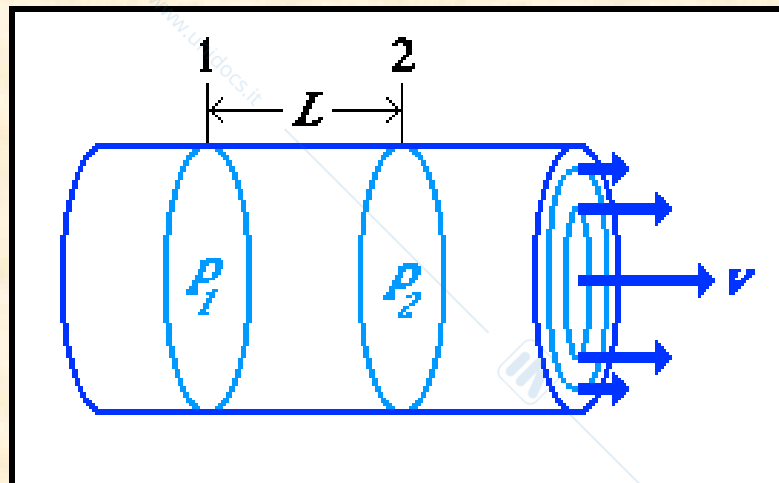
$$h = \frac{2 \tau \cos \vartheta}{\delta g r}$$

Legge di Jurin

Se $\theta = 90^\circ$, allora $h = 0$ ed il fluido non si innalza né si abbassa. Se θ è maggiore di 90° , $\cos \theta$ è negativo e così anche h : questo significa che il liquido si abbassa. Se θ è minore di 90° , $\cos \theta$ è positivo e così anche h : questo significa che il liquido si innalza. L'altezza h è proporzionale a τ , per cui più grande è il valore del coefficiente di tensione superficiale, maggiore è l'effetto della capillarità e, al contrario, dipendendo dall'inverso del raggio, l'effetto si accentua quando r è piccolo.

IL MOTO VISCOSO

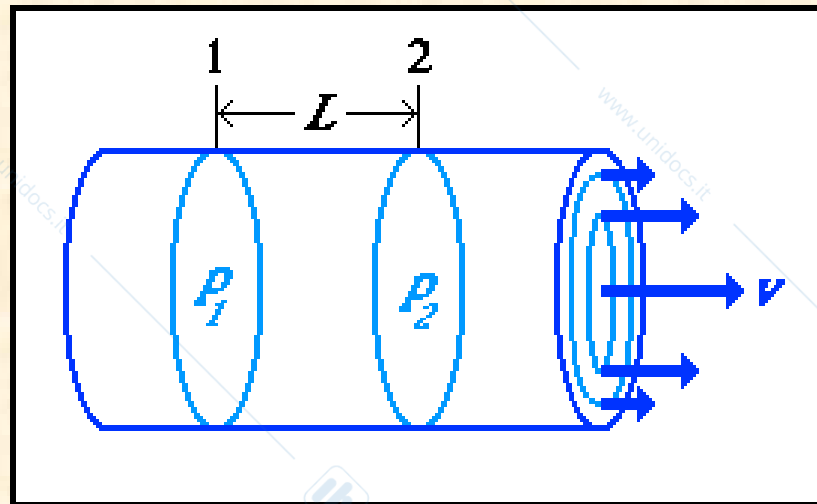
Sperimentalmente rileviamo che è necessaria una differenza di pressione per spingere un fluido attraverso un condotto orizzontale. Questo in contrasto con **l'equazione di Bernoulli**, che indica invece che per il moto stazionario di un fluido lungo un tubo di sezione costante la pressione si mantiene invariata lungo il tubo. La spiegazione di questa discrepanza sta nel fatto che nell'esperimento reale abbiamo a che fare con un fluido più o meno *viscoso* (nel ricavare l'equazione di Bernoulli avevamo supposto il fluido non viscoso). In questo caso, il tubo esercita una forza resistente sul fluido a contatto e a loro volta gli strati di fluido esercitano resistenza di attrito tra loro. La velocità del fluido non è costante per tutta la sezione del tubo: è massima al centro e nulla sul bordo.



Un moto simile, dove si può immaginare tutto il fluido diviso in strati infinitesimi paralleli tra loro che scorrono l'uno sull'altro, ciascuno con velocità caratteristiche, si dice *laminare*.

Tale tipo di moto si produce con un determinato fluido per un determinato valore di sezione del tubo purché la velocità non superi un determinato valore critico $\vec{v}_0$, tanto più piccolo quanto maggiore è il raggio del tubo. In caso di superamento di tale valore critico la stratificazione regolare è distrutta dalla formazione di vortici che rimescolano il fluido e danno luogo a distribuzioni irregolari e continuamente variabili di velocità. Il risultato è che in media la velocità del fluido risulta la stessa per qualsiasi valore di distanza dalle pareti del condotto a parte quella dello strato immediatamente a contatto con queste ultime che è ancora nulla. Questo regime si dice *vorticoso o turbolento*.

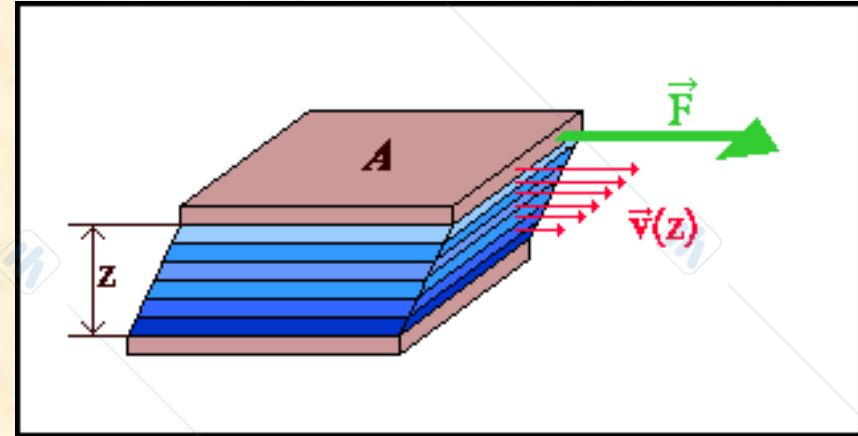
La differenza di pressione osservata tra due punti del condotto dipende dalla sua portata. Detta p_1 la pressione nel punto 1 e p_2 quella nel punto 2, si avrà che la differenza di pressione è direttamente proporzionale alla portata Q . In analogia alla legge di Ohm per la conduzione elettrica, si può allora definire la resistenza idraulica, R_I , come il fattore di proporzionalità che interviene in questa relazione. R_I rappresenta la resistenza al moto da parte del fluido.



$$\Delta p = p_1 - p_2 = R_I Q$$

IL COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ

Prendiamo un fluido confinato tra due lastre parallele di area A e distanti tra loro z . Teniamo ferma la lastra inferiore e facciamo scorrere quella superiore con una velocità costante $\vec{v}$ applicandovi una forza $\vec{F}$ per vincere la resistenza



del fluido al moto della lastra. Ogni strato esercita su quelli adiacenti ad esso una forza resistente cosicché la velocità del fluido vicino alla lastra alla quale è applicata la forza è $\vec{v}$ mentre è quasi nulla vicino alla lastra inferiore. Si definiscono **sforzo tangenziale** e **gradiente velocità** le quantità F/A e $\Delta v/z = v/z$.

Il **coefficiente di viscosità** η è

Un fluido si dice Newtoniano se η è una costante.

$$\eta = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta v}{z}} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{v}{z}} = \frac{F z}{A v}$$

$$[\eta] = \frac{Ns}{m^2} = P_a s$$

LA LEGGE DI POISEUILLE

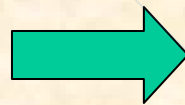
Il moto a velocità costante di un fluido *viscoso* ed *incomprimibile* in una tubatura di sezione costante è **laminare**: consiste cioè nello scivolamento relativo di un numero infinito di cilindri coassiali all'asse del tubo.

La variazione Δp di pressione tra due punti situati rispettivamente all'ingresso ed all'uscita del tubo è data dalla **legge di Poiseuille**, dove L è la lunghezza del tubo, r il suo raggio, η il coefficiente di viscosità del fluido e Q la portata del tubo.

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi r^4} Q$$

La legge di Poiseuille può essere interpretata come legge di proporzionalità tra la *causa*, Δp , che provoca il flusso e l'*effetto*, Q , che ne segue secondo una costante di proporzionalità che dipende dalle caratteristiche geometriche del condotto e dalla viscosità del fluido. Ricordando la definizione di resistenza idraulica, R_I , si ottiene:

$$\Delta p = R_I Q$$



$$R_I = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

Coefficienti di viscosità

Materiale	Temp. °C	Viscosità in $\text{N} \times \text{s} / \text{m}^2$
Aria	0	1.71×10^{-5}
	18	1.83×10^{-5}
	40	1.90×10^{-5}
Sangue intero	37	4.0×10^{-3}
Plasma sanguigno	37	1.5×10^{-3}
Glicerolo	20	1.49
Mercurio	20	1.5×10^{-3}
Acqua	0	1.79×10^{-3}
	20	1.0×10^{-3}
	37	6.91×10^{-4}
	100	2.82×10^{-4}
Olio lubrificante	16	1.13×10^{-1}
	38	3.4×10^{-2}
Etanolo	20	1.2×10^{-3}
Etere etilico	20	2.33×10^{-4}

IL MOTO VORTICOSO

Il moto di un fluido viscoso e incompressibile può avere due regimi diversi in uno stesso condotto: il regime laminare, nel quale gli strati cilindrici coassiali hanno velocità crescente da zero per lo strato aderente alle pareti del tubo al valore massimo corrispondente all'asse; il regime vorticoso o turbolento, in cui gli strati liquidi acquistano velocità quasi uguale alla massima a breve distanza dalle pareti e inoltre si formano vortici visibili all'interno del liquido.

Gli sforzi di taglio tra strati adiacenti di fluido, nel flusso laminare, sono causati in parte dalle forze molecolari di coesione e in parte da scambi di quantità di moto dovuti al passaggio (per diffusione) di molecole tra strati a differenti velocità. Nel flusso turbolento, invece, gli sforzi di taglio sono causati dallo scambio di quantità di moto associato ad intere porzioni di fluido che si spostano.

IL NUMERO DI REYNOLDS

Si osserva sperimentalmente che *un flusso laminare, al variare di certe condizioni, può diventare turbolento.*

Osborne Reynolds, attorno al 1883, studiò sperimentalmente e teoricamente la natura di queste condizioni. Attraverso esperimenti nei quali un flusso d'acqua di velocità regolabile era reso osservabile iniettandovi dei coloranti, egli ricavò l'espressione di un parametro adimensionale che caratterizza il tipo di moto del fluido.

$$N_R = \frac{\delta v D}{\eta}$$

Questo parametro, detto numero di Reynolds, dipende dalla velocità media del fluido rispetto al solido con cui viene a contatto, v , dalla sua densità, δ , dal suo coefficiente di viscosità, η , e da una grandezza caratteristica del solido, D (per una tubatura cilindrica, ad esempio, quest'ultima può essere identificata con il diametro).

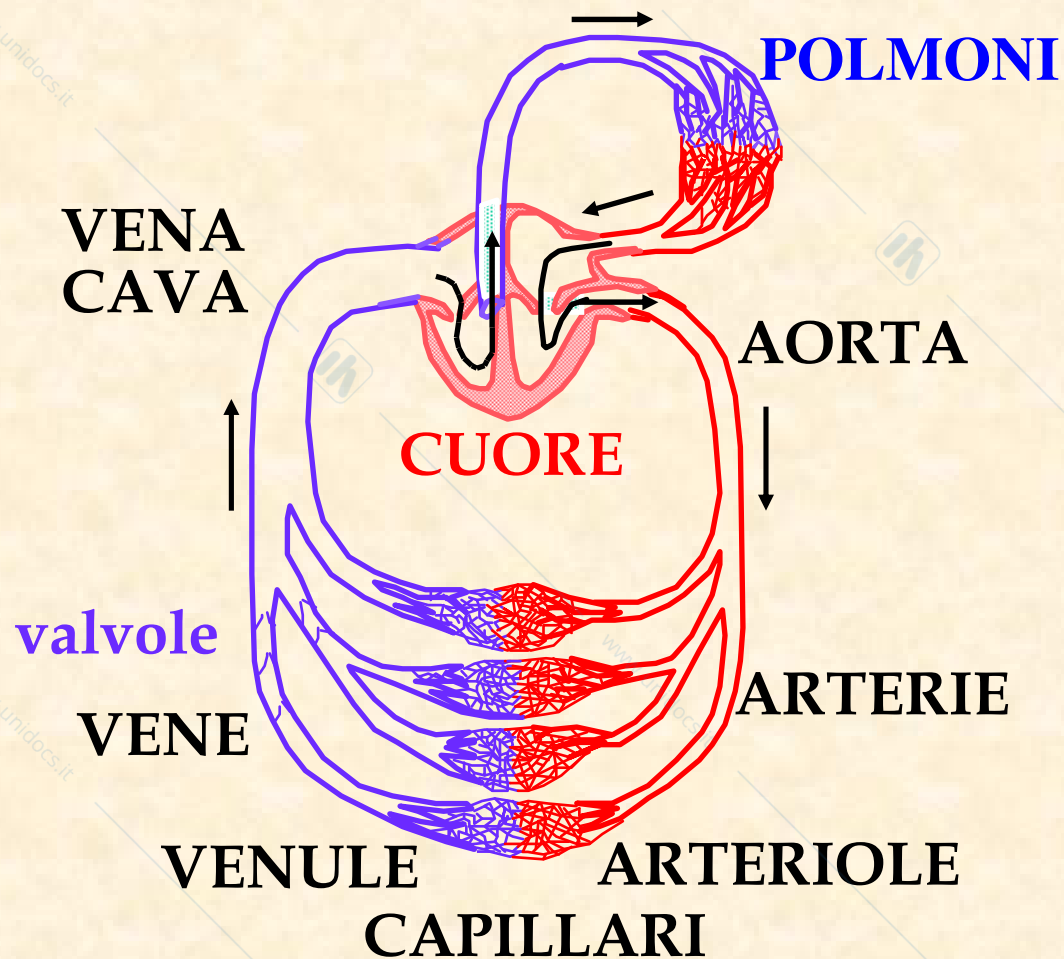
È stato dimostrato sperimentalmente che, per tubature rettilinee di sezione circolare, il flusso della corrente fluida è laminare per valori di N_R inferiori a 2000, e turbolento per valori superiori.

MECCANICA DELLA CIRCOLAZIONE

L'apparato cardio-circolatorio dell'Uomo è doppio e completo.

- I due distinti circuiti sono posti in parallelo. Il volume di sangue che viene pompato attraverso un circuito deve essere uguale a quello pompato attraverso l'altro $\Rightarrow$ la *gittata* del cuore di destra deve essere esattamente uguale a quella del cuore di sinistra.
- Tutti i distretti circolatori del circolo sistemico sono disposti in parallelo. A parità di altri fattori quindi un aumentato afflusso di sangue ad un determinato distretto circolatorio andrà a detrimento della quantità di sangue che giunge a tutti gli altri.

SISTEMA CIRCOLATORIO



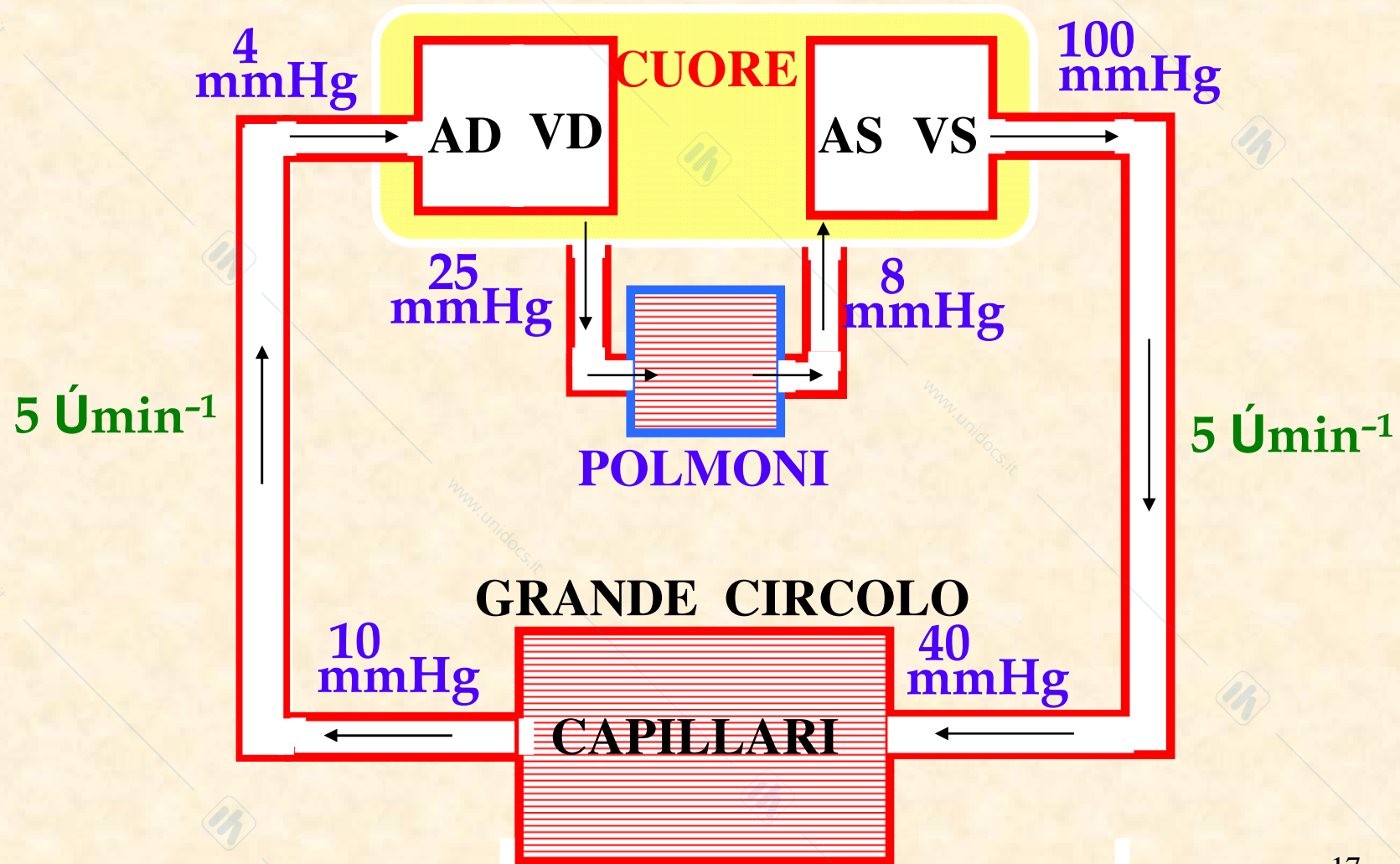
☀ **pressione media**
(nel tempo)

☀ **velocità media**
(nel tempo)

AORTA
ARTERIE
ARTERIOLE
CAPILLARI
VENULE
VENE
VENA CAVA

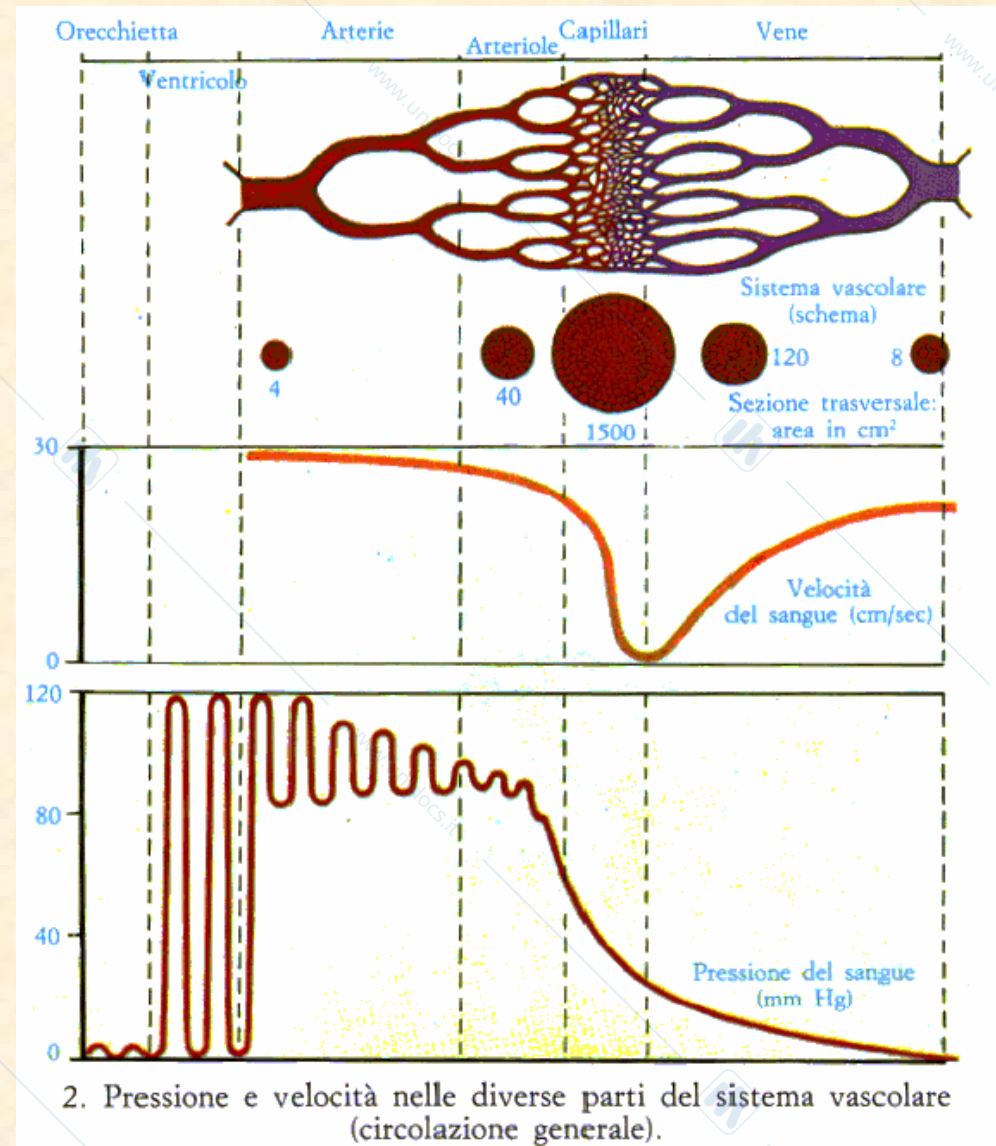
SISTEMA CIRCOLATORIO

schema del circuito chiuso :



La sezione trasversa totale del letto vasale nel circolo sistemico è minima a livello dell'aorta, cresce con il progressivo ramificarsi delle arterie fino alle arteriole, per divenire poi massima nei capillari. Nella parte venosa del circolo la sezione trasversa si riduce progressivamente per il confluire delle vene finché, a livello delle vene cave, essa è solo circa 4 volte maggiore di quella dell'aorta.

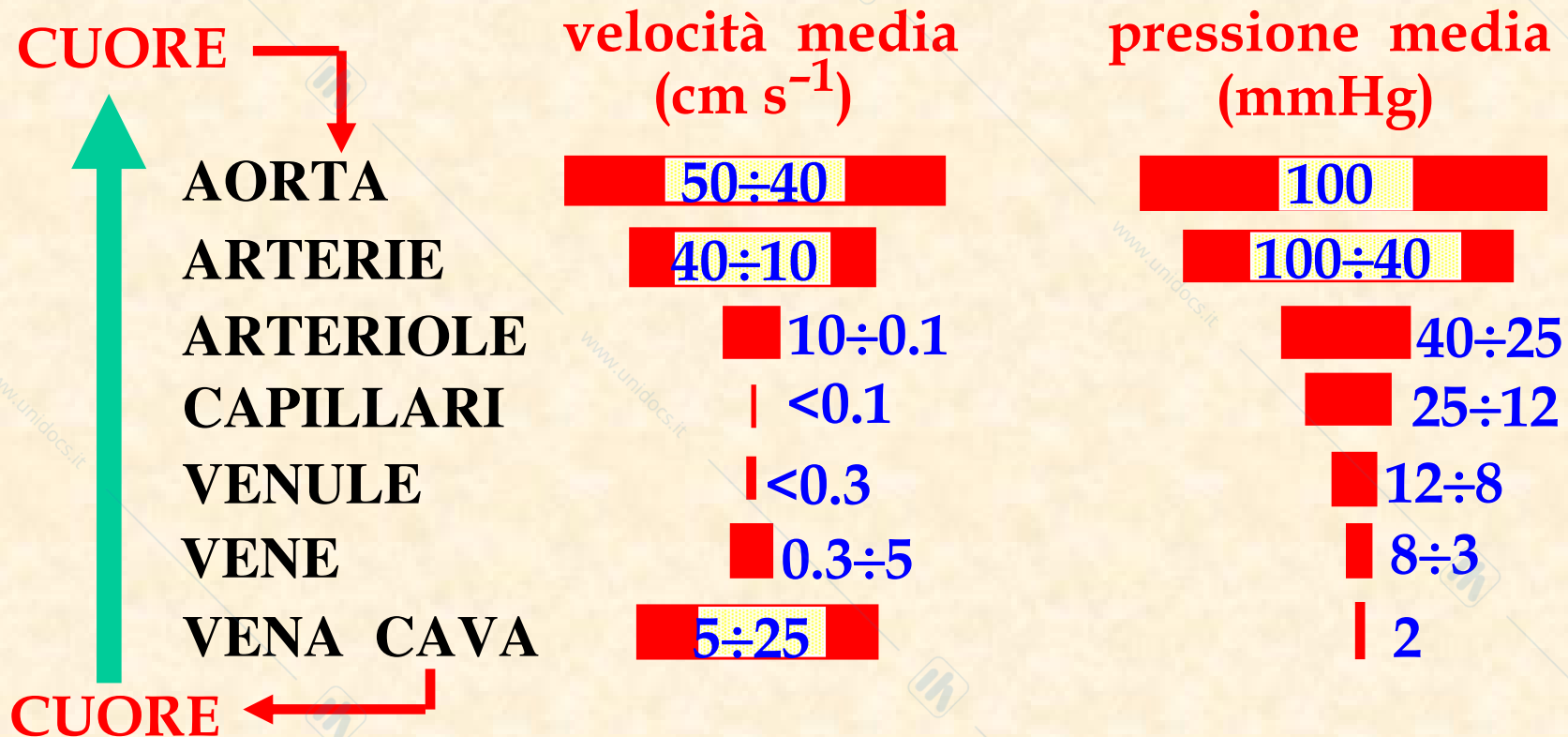
La velocità è maggiore dove la sezione trasversa totale del letto vasale è minore, e viceversa.



SISTEMA CIRCOLATORIO

☀ pressione media(nel tempo)

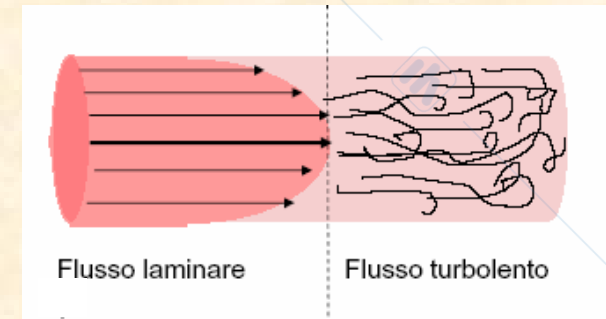
☀ velocità media (nel tempo)



LA MISURA DELLA PRESSIONE ARTERIOSA

Il sangue costituisce una sospensione di corpuscoli in un liquido: quindi è un liquido eterogeneo e non Newtoniano. In generale, il sangue scorre nel sistema circolatorio con moto laminare, e la turbolenza si verifica solo in alcuni casi particolari (nelle valvole cardiache, a causa di un esercizio fisico, a valle di una stenosi, nell'anemia, etc.). Il moto turbolento nel sangue favorisce la formazione di trombi.

Il moto turbolento, essendo rumoroso, può essere rilevato mediante auscultazione con un fonendoscopio.



Lo sfigmomanometro

Il passaggio da moto laminare a turbolento è alla base del funzionamento dello sfigmomanometro, strumento usato per misurare la pressione arteriosa. Un manicotto in gomma viene avvolto attorno ad un braccio del paziente. Immettendo gradualmente aria nel manicotto, viene compressa l'arteria brachiale. Alla diminuzione della sezione corrisponde un aumento della velocità del sangue fino a che viene raggiunta la velocità critica per passare da moto laminare a turbolento. In tali condizioni il fonendoscopio rivela un rumore caratteristico. Aumentando la pressione esterna la circolazione si interrompe e il rumore scompare.

Si lascia allora diminuire la pressione esercitata dal manicotto sfiatando l'aria contenuta in esso. Il valore della pressione, letta sul manometro collegato, a cui riprende la circolazione e ricompare il rumore dovuto al moto turbolento, corrisponde alla pressione massima arteriosa (sistolica), mentre la pressione a cui scompare successivamente il rumore, perché il sangue è tornato al moto laminare, si assume come pressione minima arteriosa (diastolica).

