www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

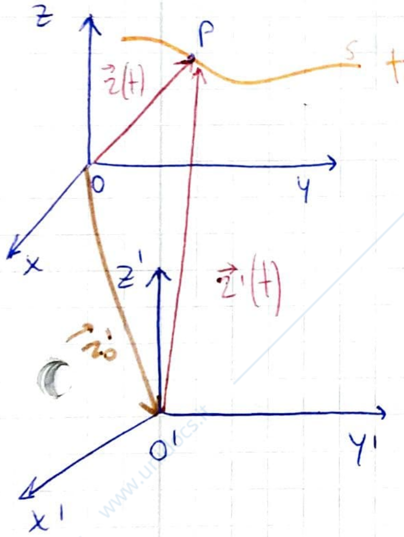
MOTI RELATIVI

le leggi della fisica <u>non dipendono</u> dalla scelta del sistema di riferimento.

non esistono [origine privilegiata
direzione privilegiata.

lo spazio è isotropo e omogeneo.

Come cambia la descrizione di un moto se cambio il sistema di riferimento?



$S \equiv (O, x, y, z)$

- $\vec{r}(t)$ descrive l'evoluzione della posizione di P nel tempo

S: <u>sistema di riferimento fisso</u>

$S' \equiv (O', x', y', z')$

- è un sistema che può avere qualunque tipo di moto, può traslare o ruotare. con $\vec{V}_{O'}$ rispetto a O.

S': <u>sistema di riferimento mobile</u>

Come passare da S a S'?

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ (posizione di P in S)

$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i}' + y'(t)\vec{j}' + z'(t)\vec{k}'$ (posizione di P in S')

$\vec{r}_{O'} = x_{O'}(t)\vec{i} + y_{O'}(t)\vec{j} + z_{O'}(t)\vec{k}$ (posizione di O' in S)

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_{O'}(t) + \vec{r}'(t)}$$ posizione in S partendo da S'

- dalla posizione possiamo passare alla $\vec{V}$.

$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \vec{v}(t)$ (di P in S)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

- $\dfrac{d\vec{z}_{O'}(t)}{dt} = \vec{V}_{O'}(t)$ (di O' in S)

- $\dfrac{d\vec{z}\,'}{dt}$ $\begin{cases} x'(t),\ y'(t),\ z'(t) \\ \vec{i}\,',\ \vec{j}\,',\ \vec{z}\,' \quad \text{(versori del 2° sistema)} \end{cases}$ entrambi variabili nel tempo

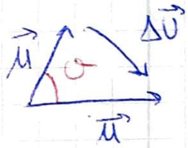
$$\frac{d}{dt}\left(x'(t)\,\underset{\vec{i}\,'(t)}{\vec{i}\,'} + y'(t)\,\underset{\vec{j}\,'(t)}{\vec{j}\,'} + z'(t)\,\underset{\vec{k}\,'(t)}{\vec{k}\,'}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{dx'(t)}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'(t)}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'(t)}{dt}\vec{k}\,'\right)}_{1} + \underbrace{\left(x'(t)\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'(t)\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'(t)\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right)}_{2}$$

velocità vettoriale di P vista da S'

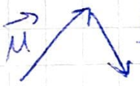
1) vettore in S': $\vec{V}\,' = V_x'\vec{i}\,' + V_y'\vec{j}\,' + V_z'\vec{k}\,'$ componenti della v nel sistema S'

2) derivata dei versori (un versore può solo ruotare, non variare in lunghezza)



$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\vec{u}_N = \vec{\omega}\,\vec{u}_N$$

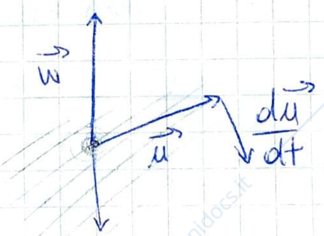
ω: velocità angolare; $\vec{u}_N$: versore normale



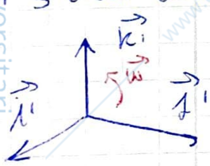
$\vartheta \to 0$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}$$

prodotto vettoriale



Nel nostro caso la $\vec{w}$ è la velocità angolare di rotazione degli assi di S: (i 3 assi sono solidali tra di loro)



$$\left.\begin{aligned} d\vec{i}\,'/dt &= \vec{w} \times \vec{i}\,' \\ d\vec{j}\,'/dt &= \vec{w} \times \vec{j}\,' \\ d\vec{k}\,'/dt &= \vec{w} \times \vec{k}\,' \end{aligned}\right] \to 2$$

$$2 \to \Big(x'(t)\cdot \underbrace{\vec{w}\times\vec{i}\,'}_{\frac{d\vec{i}\,'}{dt}} + y'(t)\cdot\vec{w}\times\vec{j}\,' + z'(t)\cdot\vec{w}\times\vec{k}\,'\Big) =$$

$x', y', z'(t)$ sono le componenti di z'

$$= \left(\vec{w}\times x'\vec{i}\,' + \vec{w}\times y'\vec{j}\,' + \vec{w}\times z'\vec{k}\,'\right) = \left(\vec{w}\times\vec{z}\,'\right)$$

$$\vec{V} = \underbrace{\vec{V}\,'}_{1} + \vec{V}_{O'} + \underbrace{\vec{w}\times\vec{z}\,'}_{2}$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$\vec{V}$ nel sistema S : - $\vec{V}'$ di P nel sistema S'

- $\vec{V}_{o'}$ di O' nel sistema S

- $\vec{\omega} \times \vec{z}'$ il sistema S' ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto ad S.

$$\underset{\text{in } S}{\vec{V}} = \underset{\text{in } S'}{\vec{V}'} + \underbrace{\vec{V}_t}_{\text{velocità di trascinamento}}$$

$\vec{V}_t = \vec{V}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{z}'$ → vien fuori solo dal moto di S'.

$\boxed{\text{da } S \rightarrow S'}$

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_t$$

teorema della velocità relative

$\boxed{\text{osservazione}}$ se $\vec{\omega} = 0$ → trascinamento traslatorio

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_{o'}$$

$$\vec{V}_t = \vec{V}_{o'}$$

se $\vec{V}_{o'} = 0$ (OO' = costante)

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{z}'$$

$$\vec{V}_t = \vec{\omega} \times \vec{z}'$$

così come abbiamo visto per la $\vec{V}$, possiamo vedere lo stesso per la $\vec{a}$.

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{z}'$$
A B C

deriviamo $\left(\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}\right)$

$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}$ accelerazione di P in S.

(A) $\frac{d\vec{V}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V'_{x'}\vec{i}' + V'_{y'}\vec{j}' + V'_{z'}\vec{k}'\right) = \underbrace{\left(\frac{dV_{x'}}{dt}\vec{i}' + \frac{dV'_{y'}}{dt}\vec{j}' + \frac{dV'_{z'}}{dt}\vec{k}'\right)}_{1} +$

$+ \underbrace{\left(V'_{x'}\frac{d\vec{i}'}{dt} + V'_{y'}\frac{d\vec{j}'}{dt} + V'_{z'}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)}_{2}$

1 Accelerazione di P in S' = $\vec{a}'$

$\frac{dV'_{x'}}{dt} = a'_{x'}$ $\frac{dV'_{y'}}{dt} = a'_{y'}$ $\frac{dV'_{z'}}{dt} = a'_{z'}$ $\boxed{\vec{a}' = a'_{x'}\vec{i}' + a'_{y'}\vec{j}' + a'_{z'}\vec{k}'}$

2 derivate di un versore

$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}'$ ... lo stesso per $\vec{j}'$ e $\vec{k}'$.

2 $= \left(V'_{x'} \cdot \vec{\omega} \times \vec{i}' + V'_{y'} \cdot \vec{\omega} \times \vec{j}' + V'_{z'} \cdot \vec{\omega} \times \vec{k}'\right) = \vec{\omega} \times \vec{V}'$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

(B) $\frac{d\vec{V}_{0}'}{dt} = \vec{a}_0$ accelerazione di O' in S

vedi prima i calcoli

(C) $\frac{d(\vec{w} \times \vec{z}')}{dt} = \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{z}' + \vec{w} \times \frac{d\vec{z}'}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{z}' + \vec{w} \times \frac{d\vec{z}'}{dt} =$

accelerazione angolare del sistema S'

$= \vec{\alpha} \times \vec{z}' + \vec{w} \times (\vec{v}' + \vec{w} \times \vec{z}') =$

$= \vec{\alpha} \times \vec{z}' + \vec{w} \times \vec{v}' + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{z}')$. OSS. $\underset{=0}{(\vec{w} \times \vec{w})} \times \vec{z}' \neq \underset{\neq 0}{\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{z}')}$

quindi $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{w} \times \vec{v} + \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{z}' + \vec{w} \times \vec{v} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{z}') =$

$= \vec{a}' + \vec{a}_{0'} + 2\vec{w} \times \vec{v} + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{z})$

$\vec{a}_T = \vec{a}_{0'} + \vec{\alpha} \times \vec{z} + \vec{w}(\vec{w} \times \vec{z}')$ è l'accelerazione di trascinamento

$\vec{a}_{0'}$ accelerazione di O' rispetto ad O. (S)

$\vec{a}'$ accelerazione di P rispetto ad O' (S')

$\vec{\alpha} \times \vec{z}' = \frac{d\vec{w}}{dt} \times \vec{z}'$ accelerazione tangenziale dovuta alla rotazione di S'. $(a = \alpha z)$

$\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{z}')$ $\left[w^2 \cdot z' = \frac{v^2}{z'^2} \cdot z' = \frac{v^2}{z'} \text{ accelerazione centripeta} \right]$

accelerazione centripeta dovuta alla rotazione di S'.

$\vec{a}_c = 2\vec{w} \times \vec{v}'$ accelerazione di Coriolis

$\boxed{\text{OSS}}$
- $\vec{w} = 0$
  $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{0'}$ trascinamento traslatorio.
- $\vec{V}_{0'} = 0$ $\vec{a}_{0'} = 0$ $OO' = \text{cost}$
  $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{z}') + \vec{\alpha} + \vec{z}' + 2\vec{w} + \vec{v}'$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

DINAMICA SISTEMI di PUNTI MATERIALI

Finora abbiamo considerato un solo punto materiale alla volta.

n punti materiali

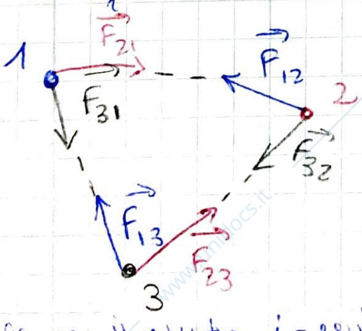
Forze interne → tra i punti materiali.
Forze esterne → provengono dall'ambiente.

La suddivisione ↑ dipende dall'osservatore (punto di vista)

Sull' i-esimo punto agiscono 2 forze (risultanti).

$$\vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_i^{(I)}}_{\substack{\text{risultante delle forze}\\ \text{interne che}\\ \text{agiscono su } i}} + \underbrace{\vec{F}_i^{(E)}}_{\substack{\text{risultante delle}\\ \text{forze esterne che}\\ \text{agiscono su } i}}$$

Vediamo la $\vec{F}_i^{(I)}$ tenendo a mente il III principio (reazione).



$\vec{F}_{13}$ la forza che 1 esercita su 3

$\vec{F}_{31}$ è la forza con cui 3 "reagisce" su 1

$\vec{F}_{31} = -\vec{F}_{13}$

In generale per il punto i-esimo (i) e il punto j-esimo (j)

$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (III principio)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se faccio la somma su j ottengo la forza interna che agisce su (i)

$$\vec{F}_i^{(I)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \vec{F}_{ji}$$ (punto j-esimo esercitata su i)

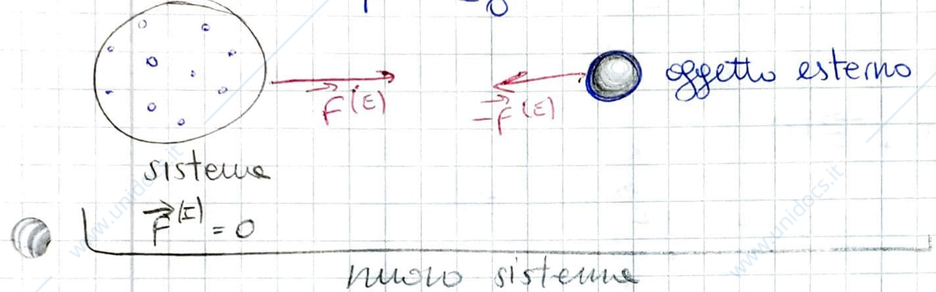
Se poi sommiamo su tutti gli (i) ottengo la somma delle forze interne del sistema.

$$\vec{F}^{(I)} = \sum_{i=1}^{M} \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{F}_{ji} = 0 \ *$$

$$* \ \cancel{\vec{F}_{12}} + \cancel{\vec{F}_{13}} + \dots + \cancel{\vec{F}_{21}} + \dots + \cancel{\vec{F}_{31}} \dots$$

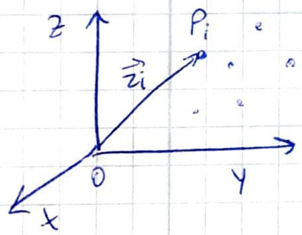
Per un sistema di punti la risultante delle forze interne $= 0$

$$\vec{F}^{(I)} = 0$$



In questo nuovo sistema $\vec{F}^{(E)}$ diventa interna e si bilancia perfettamente con $-\vec{F}^{(E)}$

CENTRO di MASSA



- ogni punto lo individuo con

$\vec{r}_i = \vec{OP}_i$

$\vec{v}_i$, $\vec{a}_i$, m_i

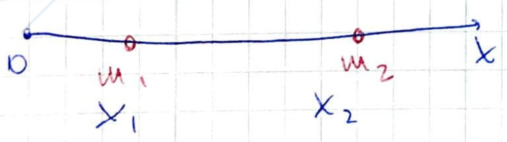
$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$

possiamo costruire un NUOVO PUNTO (geometrico, non reale/materiale) che chiamiamo centro di massa.

Individuato da

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots m_n}$$

sistema a 1 dimensione



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$ → "punto medio pesato".

- se $m_1 = m_2$ → x_{CM} è il punto medio

Scompongo $\vec{r}_{CM}$

$$\begin{cases} x_{CM} = \sum_i m_i x_i / \sum_i m_i \\ y_{CM} = \sum_i m_i y_i / \sum_i m_i \\ z_{CM} = \sum_i m_i z_i / \sum_i m_i \end{cases}$$

velocità CM

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d \vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \right) = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\vec{P}}{M} \quad (1)$$

$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$

$\sum m_i v_i = \sum P_i$ (quantità di moto totale)

M (massa totale)

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\vec{P}}{M} \longrightarrow \vec{P} = M \cdot \vec{V}_{CM} \quad (\vec{p} = m\vec{v})$$

Il sistema di punti ha una quantità di moto che è pari a quella di un punto materiale che:

- ha $\vec{v} = \vec{v}_{CM}$
- ha massa M somma di tutte le masse

Accelerazione CM

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum m_i} = \boxed{\frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}} \; ?$$

Prendiamo il punto (1)

$$m \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}$$

Faccio la somma $\sum_i m \vec{a}_i = \cancel{\sum_i \vec{F}_i^{(I)}}_{=0} + \sum_i \vec{F}_i^{(E)} = \vec{F}^{(E)}$

$\vec{F}^{(E)}$ è la risultante delle forze esterne che agiscono sul sistema.

$\boxed{\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(E)}/M}$ Teorema del moto del centro di massa (2)

$\vec{F}^{(E)} = M \cdot \vec{a}_{CM}$ (II principio per un punto materiale)

$$(1) + (2) = \vec{F}^{(E)} = M \cdot \vec{a}_{CM} = M \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \frac{d(M\vec{V}_{CM})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

CM è punto geometrico che equivale a un punto materiale.

$$\vec{P} = \sum \vec{P}_i = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{F}^{(E)}}{M}$$

---

conservazione della q. di moto

Se nel sistema $\vec{F}^{(E)} = 0$

$$\vec{a}_{CM} = 0 \longrightarrow \vec{V}_{CM} = \text{costante} \longrightarrow \vec{P} = \text{COSTANTE}$$

differenza rispetto al punto materiale è che consideriamo le f. esterne.

Possiamo scomporlo lungo gli assi. (x, y, z)

$$\vec{F}_x^{(E)} = 0 \longrightarrow \vec{P}_x = \text{COSTANTE} \quad (x)$$

OSS. Se prendiamo due punti isolati (su cui non agiscono forze)

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{COSTANTE}$$

$$\rightarrow \vec{F}^{(E)} = 0$$

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

Se vado a derivare (vedere evoluzione temporale)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right) = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$] le forze che si esercitano tra punti isolati sono uguali ed opposte.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari