Siccome la forza del 1° filo è uguale ed opposta alla forza del 2° filo posso scrivere: → $F_{12} = F_{21} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

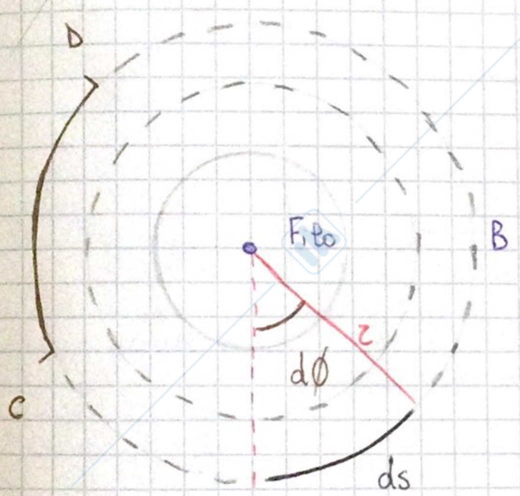
(2 fili dello stesso verso si attraggono)

- LEGGE DI AMPÈRE -

Ricordo la legge di Ampère-Laplace:

$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$ → Considero un filo rettilineo percorso da corrente i. Produce un campo magnetico dato sempre da BIOT-SAVART pari a:

$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{u}_t \times \hat{u}_n$



ds = elemento infinitesimo sul percorso di $\vec{B}$

Se considero il prodotto scalare

$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \underbrace{ds \cos\theta}_{d\phi}$

angolo spazzato, angolo di B su ds

$\frac{\mu_0 i}{2\pi} d\phi \Rightarrow$ Se considero un tratto finito (CD)

$$\int_C^D \vec{B} d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_C^D d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \phi$$

Mentre se considero tutta la linea chiusa:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 i}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2\pi}$$

La circuitazione del campo è sempre uguale a $\mu_0 i$ (Non conservativo)

i → concatenata

Come per Gauss se ho fili che generano un campo.
Il campo Magnetico:

$\bar{B}$ = somma dei campi nel sistema
Circuitazione = si considera solo la corrente interna al campo

↓

Legge di Ampère:

$$\oint \bar{B} d\bar{s} = \mu_0 i$$

Circuitazione del campo magnetico lungo un percorso chiuso è uguale alla somma algebrica delle correnti concatenate per μ_0 (B non conservativo)

IL CORNO BLU

– FORMA LOCALE DELLA LEGGE DI AMPÈRE –

Applico il teorema di STOKES:

La circuitazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una superficie Σ qualunque

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \int_{\Sigma} \bar{\nabla} \times \bar{B} \, \hat{u}_n \, d\Sigma$$

Abbiamo visto:

$$\oint \bar{B} d\bar{s} = \mu_0 i \longrightarrow \text{Ricordo } i = \int_{\Sigma} \bar{J} \hat{u}_n d\Sigma$$

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \bar{J} \cdot \hat{u}_n d\Sigma \quad \text{per stokes} \Rightarrow \int_{\Sigma} \underbrace{\bar{\nabla} \times \bar{B}}_{\mu_0 \bar{J}} \hat{u}_n d\Sigma = \underbrace{\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{J}}_{\text{forma locale della legge di Ampère}}$$

- PROPRIETÀ MAGNETICHE - DELLA MATERIA

In natura esistono dei materiali (ferromagnetici) che se sotto posti al campo diventano elettromagnetici

Considero un solenoide di lunghezza infinita per il quale so che il campo magnetico vale: $\underbrace{B_0}_{\text{Nel vuoto}} = \mu_0 i n$

Mentre se lo immergo in un mezzo automaticamente è ≠ vuoto quindi ho che:

$$\frac{B}{B_0} = K_m$$ ← permeabilità magnetica relativa del mezzo al vuoto

Il nuovo campo sarà: $B = K_m B_0 = \underbrace{K_m}\,i\,\underbrace{\mu_0 n} = \mu n i$ con $\underbrace{\mu = \mu_0 K_m}_{\text{permeabilità magnetica assoluta}}$

$$\bar{B} = \mu_0 K_m \bar{H} = \mu \bar{H} \Rightarrow \bar{H} = \frac{\bar{B}_0}{\mu_0}$$

Adesso vado a riscrivere tutte le eqn precedenti considerando il mezzo con μ omogeneo

- AMPÈRE LAPLACE: $\bar{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint \frac{ds \times \hat{u}_r}{r^2}$

- AMPÈRE: $\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \underbrace{\mu i}_{\text{concatenata}}$

Quindi avremo un nuovo campo:

$$\underbrace{\bar{B}_m = \bar{B} - \bar{B}_0}_{\text{campo varia in base alla presenza del mezzo}} = (K_m - 1)B_0 = \underbrace{\chi_m}_{\substack{K_m - 1 \\ \text{suscettività magnetica}}} \bar{B}_0$$

L-E-T-T-R-O-S-S-O

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$\bar{H}$ = Vettore di Magnetizzazione $= \chi_m \bar{H} = (K_m - 1)\bar{H}$

$\bar{B} = \bar{B}_m + B = \chi_m \bar{B}_0 + B_0 = \mu_0(\bar{M} + H)$ → Le sostanze devono condurre (deve passare corrente)

SUDDIVIDO IN 3 GRANDI CLASSI I CONDUTTORI

DIAMAGNETICHE

$K_m < 1$ $\chi_m < 0$

$B < B_0$ M opposto a $\bar{H}$

(Ag, Cu, Au, Pb)

PARAMAGNETICHE

$K > 1$ $\chi > 0$

Fenomeni magnetici si sommano con le correnti equiverse

(Ti, Al, Mg)

FERROMAGNETICHE

Si realizza il ciclo di ISTERESI

↓

processo a cui si sottopone la sostanza ferromagnetica e attraverso un innalzamento del campo magnetico e del vettore H si arriva ad avere un magnete permanente

(Fe, Co, Ni, e leghe)

LEGGE DI GAUSS PER CAMPI MAGNETICI

Il flusso del campo magnetico attraverso la superficie $d\Sigma$:

$d\Phi(B) = \bar{B} \cdot \hat{U}_n d\Sigma$ → per una superficie finita

APERTA: $\Phi(\bar{B}) = \int_\Sigma \bar{B} \cdot \hat{U}_n d\Sigma$

CHIUSA: $\Phi(B) = \oint \bar{B} \cdot \hat{U}_n d\Sigma$

$\hat{U}_n$ → versore esterno alla superficie

Poichè le linee di flusso di $\vec{B}$ che entrano in una superficie devono uscire ho che:

$$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 0$$ → Legge di Gauss per il campo magnetico

quella locale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- CAMPI ELETTRICI E MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO -

Le sorgenti di campi elettrici e campi magnetici sono le cariche.

↓

Il campo elettrostatico è generato dalle cariche fisse ed è un campo conservativo

Il campo magnetico è generato dal moto delle cariche e non è conservativo

↓

Faraday scopre che se ho un campo magnetico variabile nel tempo esso genera un campo elettrico

→ Maxwell dimostra che se ho un campo elettrico genero un campo magnetico (no conservativo)

↓

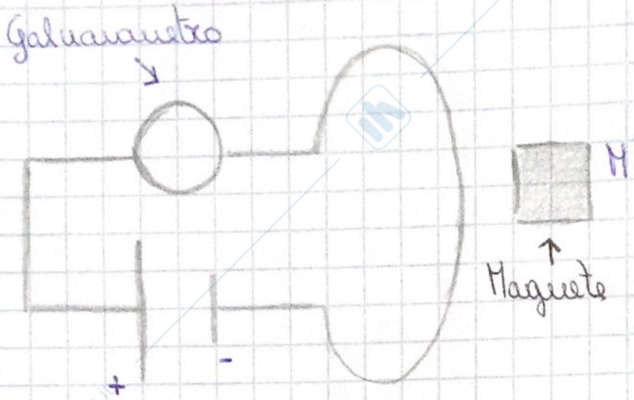
quindi campo elettrico e campo magnetico non possono esistere separatamente

1 FORZA ELETTROMOTRICE: $\mathcal{E}_0 = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$ | Valore non nullo $\neq 0$ non conservativo |

2 FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE Σ:

$$\Phi(\vec{B}) = \oint \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 0$$

- ESPERIMENTO DI FARADAY -



Facendo scorrere i all'interno della spira, e avvicinando il blocco alla spira si nota che il galvanometro aveva una scossa
(campo magnetico aumentava intensità sulla spira)
quando il magnete si muoveva si aveva una variazione di corrente e quando si fermava si ristabilizzava la situazione

Spira fissa e il magnete si muoveva si aveva una variazione di corrente, viceversa se la spira si muoveva e il magnete era fermo si aveva una variazione di corrente → Variazione di corrente = **corrente indotta**
(Moto relativo tra spira e magnete)

[Ricordo che per avere una corrente i è necessaria una forza elettromotrice]

Dal Moto relativo tra magnete e spira ha origine la forza elettromotrice **INDOTTA**

↓

Si può generare una forza elettromotrice in un circuito mediante un campo magnetico variabile nel tempo.
Questa forza elettromotrice indotta si manifesta in un intervallo di tempo breve. Si **annullerà** quando i e B diventano **costanti**

LEGGE DI FARADAY DELL'INDUZIONE

Se flusso del campo magnetico concatenato con un circuito varia nel tempo e si ha nel circuito una forza elettromotrice indotta

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$ (Faraday Neumann)

dato dall'opposto della derivata del flusso del campo magnetico nel tempo.

In particolare se il circuito ha una resistenza R

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\bar{B})}{dt}$$

Ricordo che la definizione di forza elettromotrice: $\mathcal{E} = \oint \bar{E} d\bar{s} \neq 0$ quindi:

$$\underbrace{\mathcal{E}_i = \oint \bar{E}_i \, d\bar{s} = \ominus \frac{d\Phi(\bar{B})}{dt}}_{\text{Legge di Lenz}}$$

SPIEGA IL SEGNO MENO

La f.e.m. indotta ha effetto $\mathcal{E}_i$ sempre tale da opporsi alla causa che ha generato il fenomeno
La variazione di flusso del campo magnetico concatenato con una linea chiusa da origine a un campo magnetico indotto non conservativo

Se nei circuiti casalinghi avvicino un magnete non succede niente perché i fili sono isolati

- ORIGINE DI E_i E DI $\mathcal{E}_i$ -

Faraday Neumann:

$$\mathcal{E}_i = \oint \bar{E}_i \cdot d\bar{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \bar{B}\cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

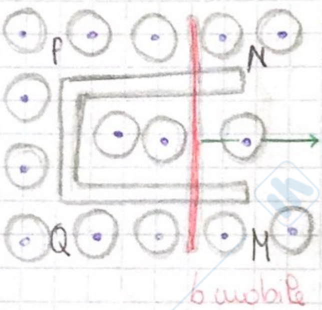
→ abbiamo trovato che E_i ha 2 possibili cause:

1 Moto di un conduttore in un sistema dove le sorgenti di $\bar{B}$ sono in quiete

2 Moto di un magnete nel tempo in un sistema dove il conduttore è in quiete

---

1) Considerare un circuito rettangolare (conduttore) immerso in $\bar{B}$ uniforme e con un lato b mobile



← campo magnetico fisso, si muove solo la barretta

Il rettangolo PNQM la sbarra MN si muove di MOTO TRASLATORIO con $\vec{v}$

quindi posso scrivere:

$$\bar{E}_i = \frac{\bar{F}}{-e} = \vec{v}\times\vec{B}$$

lo sostituisco in $\mathcal{E} = \oint \bar{E}\cdot d\bar{s}$ =

Sugli elettroni di conduzione presenti su una sbarra agisce la forza di Lorentz

$$= \int_{NMQP} (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\bar{s} = \mathcal{E}_i = \int_M^N (\vec{v}\times\vec{B})\, d\bar{s} = -vBb$$

---

2) Variazione del campo magnetico con campo elettrico fisso

Considero un circuito fisso e un campo magnetico variabile

$\vec{V}$ elettrico $= 0$ → Non c'è forza di Lorentz

Poiché però in generale c'è una variazione di corrente vale la seguente legge

$$\bar{F}_L = q(\bar{E} + \underbrace{\vec{v}\times\vec{B}}_{0}) = q\bar{E}$$

Supponiamo che in una regione dello spazio venga indotto un campo elettrico:

$$\mathcal{E}_i = \oint \bar{E}_i \, d\bar{s}$$

Concetto che dimostrando si usa nei SINCROTRONI (Accelerazione di particelle)

Considero $QM = NP = x$

Il flusso di B:

$$\Phi(B) = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = Bbx$$

quindi:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -Bb\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{dipende da esso}} = -Bbv$$

Conclusioni:

Se un conduttore si muove in un campo magnetico fisso al suo interno avranno separazioni di cariche dovute ad un campo elettromotore indotto (E_i) questo ha origine nella forza di Lorentz

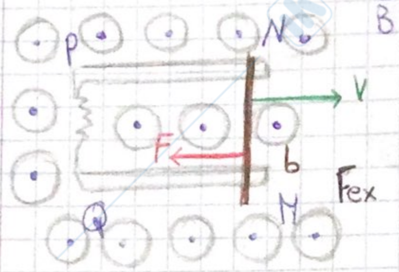
Se gli elementi del conduttore formano un circuito chiuso allora il circuito diventa sede di una f.e.m. indotta $\mathcal{E}_i$

E STATO BELLO

APPLICAZIONE LEGGE FARADAY

GENERATORE DI CORRENTE:

- R = resistenza esterna
- r = resistenza interna
- sbarretta mobile $MN = b$



Sulla sbarretta agisce una forza magnetica pari a:

$$\vec F = i\,\overline{MN}\times\vec B = \frac{\mathcal{E}_i b B}{R+r} =$$

formano un angolo di 90°

$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R+r}$ circolerà corrente

$$= (-)\frac{vB^2b^2}{r+R} \Rightarrow \underbrace{\mathcal{E}_i = -vBb}_{\text{forza elettromotrice indotta}}$$

Il campo magnetico da origine a i (corrente) genera una forza (-) resistente detta resistenza di attrito elettromagnetico, per vincere questa resistenza è necessario applicare una forza esterna per contrastare la forza resistente

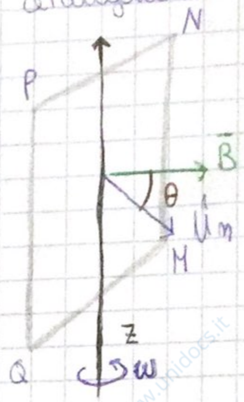
$$P = F_{att}\cdot V = \frac{vB^2b^2}{r+R}\cdot V = \underbrace{\frac{V^2B^2b^2}{r+R}}$$

(potenza)

potenza erogata proviene da un lavoro meccanico esterno

GENERATORE DI CORRENTE ALTERNATA:

Considero un campo magnetico uniforme, un asse z e una spira rettangolare



$\theta = 0 \Leftrightarrow \hat u_n /\!/ B$

$\omega = \text{cost}$

Calcolo il flusso del campo magnetico attraverso questa spira.

$$\Phi(\vec B) = \int_\Sigma \vec B\cdot\hat u_n\, d\Sigma = B\cos\theta\,\Sigma =$$

$$= B\Sigma\cos\underbrace{\omega t}$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$$\mathcal{E}_i = +\omega B\Sigma\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\omega B\Sigma\,\mathrm{sen}\,\omega t}{R}$$

Varia nel tempo

Verrà spesa una potenza

MISURE DI UN CAMPO MAGNETICO:

quando una spira con resistenza R viene immersa in un campo magnetico viene percorsa da i pari al rapporto

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$$

Resistenza della sfera stessa

Nell'intervallo di tempo Δt sulla spira viene indotta la carica

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt = \frac{\mathcal{E}}{R} =$$

$$-\frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$$= -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi(B)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{R}(\Phi_2 - \Phi_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}}$$

Legge di Felici utilizzata per misurare un campo magnetico

Considero una bobina con il flusso

che deve contrastare la resistenza di attrito elettromagnetica

$P = i\mathcal{E}_i = i^2R = \frac{(\omega\Sigma \operatorname{sen}\omega t)^2}{R^2} R$

↓

potenza per generare la forza elettromotrice

$\Phi = NB\Sigma$

↓

spira di una bobina

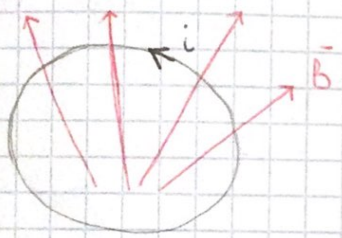
Quindi possiamo considerare il flusso all'istante

$\Phi_2 = 0$

(si prende la bobina e si allontana finchè il flusso non risulta = 0)

$q = \frac{NB\Sigma}{R} \Rightarrow B = \frac{qR}{N\Sigma}$

- AUTOINDUZIONE -



Circuito percorso da corrente che produce un campo magnetico $\bar{B}$

Per ampère-laplace:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\bar{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Il flusso di questo campo magnetico concatenato si chiama **ANTIFLUSSO**:

$$\Phi(\bar{B}) = \int \underbrace{\left(\oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\bar{s} \times \hat{u}_r}{r^2} \right)}_{\bar{B}} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

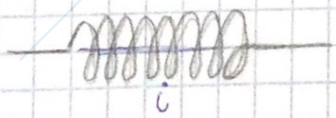
quindi si ha che il campo condotto e il flusso sono proporzionali alla corrente i

$\Phi = i\underbrace{L}_{\text{induttanza}}$

induttanza (coefficiente di induttanza dipende da ds cioè dalla forma del circuito e dipenderà anche dalle proprietà magnetiche del mezzo. Se i varia nel tempo potremo scrivere che:

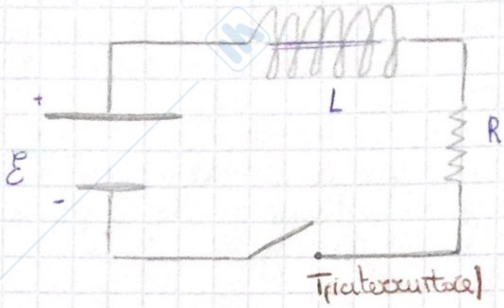
$$\underbrace{\mathcal{E}_L}_{\text{forza elettrica di autoinduzione}} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -L\frac{di}{dt} \quad \text{(indotta)}$$

forza elettrica di autoinduzione



- ENERGIA MAGNETICA -

Se in un circuito c'è f.e.m.
allora c'è lavoro.
Considero un circuito completo con R e L così fatto:



→ Il circuito erogherà una potenza:

$$\underbrace{P}_{} = \mathcal{E}i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} = \underbrace{Ri^2dt}_{} + \underbrace{Lidt}_{}$$

lavoro per far circolare corrente nel circuito, si trasforma in calore (effetto joule)

lavoro speso contro la f.e.m. di autoinduzione

$$\frac{dw}{dt} \rightarrow Pdt = \underbrace{\mathcal{E}idt}_{}$$

Lavoro compiuto dal generatore

quindi nell'intervallo di tempo in cui
l'interruttore T è chiuso la corrente passa
da 0 a i. Il generatore compie lavoro pari a:

$$W = \underbrace{\int_0^i Li\,di = \frac{1}{2}Li^2}_{}$$ per contrastare la f.e.m. di autoinduzione $\mathcal{E}_L$

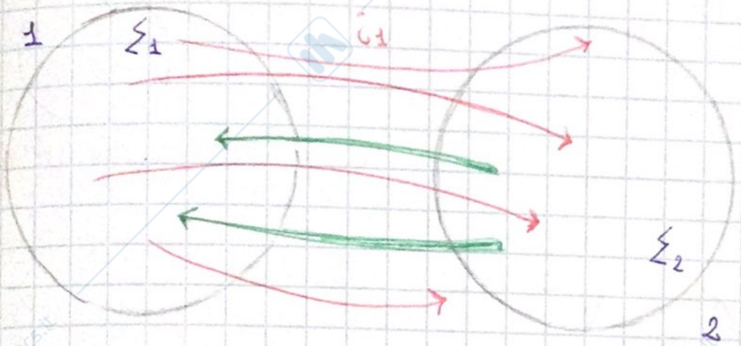
si definisce densità
di energia magnetica

$$U_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$ = direttamente proporzionale al campo magnetico
e inversamente proporzionale al mezzo che consideriamo

Quindi l'energia magnetica
dipende dal campo magnetico e
inversamente proporzionale al mezzo.

- INDUZIONE MUTUA -

Si definisce il campo magnetico prodotto dal circuito 1 che attraversa il circuito 2



Considero:
Σ_2 una qualsiasi superficie su cui si appoggia il circuito 2

$$\underbrace{\Phi_{12}}_{\text{flusso del 1 circuito che finisce nel 2 circuito}} = \int_{\Sigma_2} \bar{B}_1 \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma$$

poiché $\bar{B}_1$ è proporzionale a i_1:

$$\Phi_{12} = \underbrace{M_{1,2}}_{\text{coefficiente}} i_1$$

questo campo se attraversa questo circuito farà scorrere corrente i_2

$$\Phi_{21} = \int_{\Sigma_1} \bar{B}_2 \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \underbrace{M_{2,1}}_{\text{coefficiente}} i_2$$

→ Si dimostra che questi 2 coefficienti di induzione

$M_{2,1} = M_{1,2}$

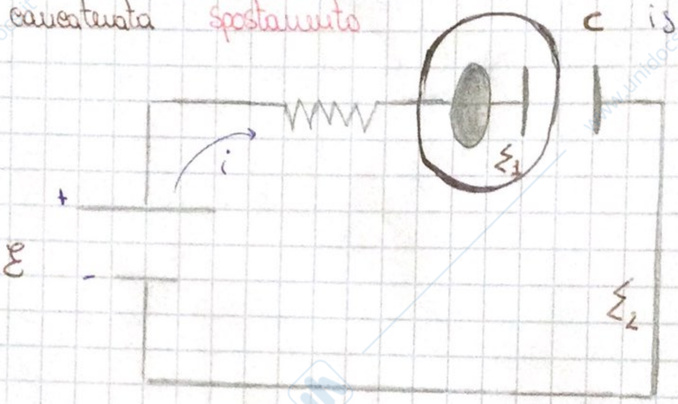
-LEGGE DI AMPÉRE-MEXWELL-

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \underbrace{i}_{\text{componente}}$ → Legge di Ampère

<u>Maxwell</u> dice che la corrente che noi consideriamo non è la corrente considerata ma è:

$\underbrace{i = \underbrace{i_e}_{\text{corrente concatenata}} + \underbrace{i_s}_{\text{corrente di spostamento}}}$ → all'interno di un condensatore c'è un campo elettrico:

$i_s = \varepsilon_0 \dfrac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$



$\underbrace{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i_e + i_s)}$ → Legge di Ampère-Maxwell vengono spiegati tutti i fenomeni elettromagnetici

Se nello spazio non esistono correnti di conduzione ma esistono solo variazioni di campo elettrico nel tempo allora la legge di Ampère-Maxwell diventa:

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_s$

↓

La legge di Ampère-Maxwell può essere descritta e definita in varie situazioni per esempio in presenza o assenza di cariche, nel vuoto o nel mezzo

- EQ.NI MAXWELL IN PRESENZA DI UNA CARICA NEL VUOTO -

1. $\oint \bar{E} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

Legge per $\bar{E}$ di Gauss campo elettrico (lega cariche al campo elettrico)

↓

sempre uguale se il campo è costante e se varia

2. $\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = -\frac{d\Phi(\bar{B})}{dt}$

Variazione di flusso del campo nel tempo produce un campo elettrico

3. $\oint \bar{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$

Legge di Gauss per campi magnetici (campo magnetico è solenoidale e non esistono cariche magnetiche)

4. $\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \mu_0 (i_e + i_s) = \mu_0 \left(i_e + \varepsilon_0 \frac{d\Phi \bar{E}}{dt}\right)$

Ci fa vedere quali sono le sorgenti del campo magnetico (corrente concatenata e variazione di flusso per il campo elettrico nel tempo)

- EQ.NI MAXWELL IN ASSENZA DI CARICHE E IN ASSENZA DI CORRENTI CONCATENATE (NEL VUOTO) -

1. $\oint \bar{E} \hat{u}_n d\Sigma = 0$

2. $\oint \bar{E} \cdot d\bar{s}$

3. $\oint \bar{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma = 0$

4. $\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\bar{E})}{dt}$

Eq.ni Maxwell in forma locale: $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

1. $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

↓ divergenza del campo elettrico

2. $\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

3. $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$

↓ divergenza del campo magnetico

4. $\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \left(J + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right)$

- EQ.NI MAXWELL IN PRESENZA DI UNA CARICA NEL VUOTO -

1. $\oint \bar{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

Legge per E di Gauss campo elettrico

(lega cariche al campo elettrico)

↓

sempre uguale se il campo è costante e se varia

2. $\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = -\frac{d\Phi(\bar{B})}{dt}$

Variazione di flusso del campo nel tempo produce un campo elettrico

3. $\oint \bar{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 0$

Legge di Gauss per campi magnetici

(campo magnetico è solenoidale e non esistono cariche magnetiche)

4. $\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \mu_0 (i_e + i_s)$

$= \mu_0 \left(i_e + \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\bar{E})}{dt} \right)$

Ci fa vedere quali sono le sorgenti del campo magnetico

(corrente concatenata e variazione di flusso per il campo elettrico nel tempo)

- EQ.NI MAXWELL IN ASSENZA DI CARICHE E IN ASSENZA DI CORRENTI CONCATENATE (NEL VUOTO) -

1. $\oint \bar{E} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 0$

2. $\oint \bar{E} \cdot d\bar{s}$

3. $\oint \bar{B} \cdot \hat{u}_n \, d\Sigma = 0$

4. $\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\bar{E})}{dt}$

Eq.ni Maxwell in forma locale: $\quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$

1. $\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

↓ divergenza del campo elettrico

2. $\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

3. $\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0$

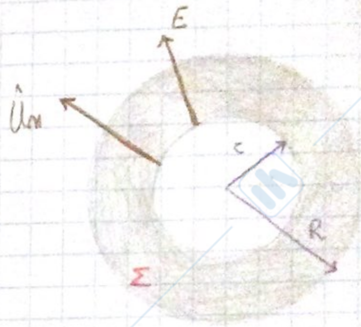
↓ divergenza del campo magnetico

4. $\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \left(\bar{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right)$

ESEMPI...

- **CAMPO GENERATO DA UNA SFERA UNIFORMEMENTE CARICA**

Una carica q distribuita con densità spaziale ρ uniforme nel volume di una sfera di raggio R. Calcolare $\vec{E}$ elettrostatico nei punti interni e esterni alla sfera

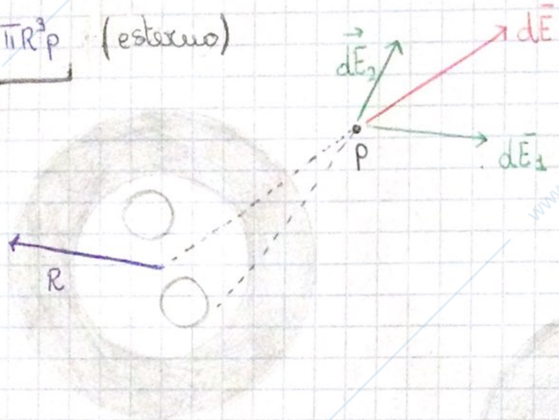


SOLUZIONE:

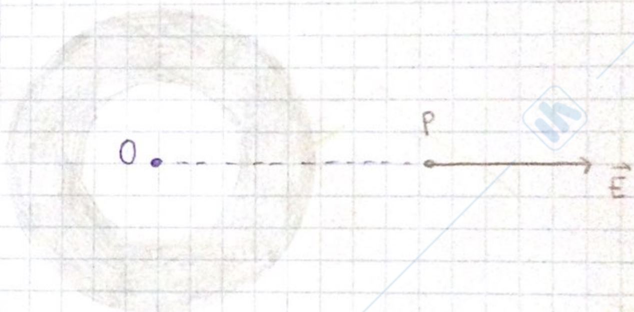
Per $r \geq R$ il campo all'esterno di una sfera uniformente carica vale:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{u}_r \quad \text{con}$$

$$\underbrace{q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}_{\text{area della sfera}} \quad (\text{esterno})$$

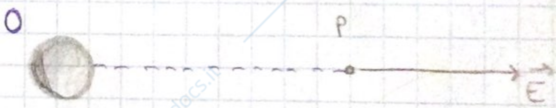


é come se la carica fosse concentrata nel centro della sfera:



All'interno $(r<R)$ esiste ora una carica distribuita uniformemente e il campo $\vec{E}$ non é più nullo.

Il flusso attraverso una superficie sferica di raggio r si scrive:



$$\Phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E = \frac{q'}{\varepsilon_0}$$ → carica contenuta all'interno della superficie Σ'

↓

$$(\text{interno}) \quad q' = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q r^3}{R^3}$$

Ne segue che il modulo di $\vec{E}$ a distanza $r<R$ dal centro vale:

$$|E| = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \underbrace{\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}_{} \rightarrow \text{interno}$$

In conclusione il campo cresce linearmente dal valore zero assunto nel centro della sfera al valore $\frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ assunto sulla superficie della sfera, all'esterno esso decresce

con il quadrato della distanza dal centro.
Per $r=R$ il campo è continuo (è discontinuo $\frac{dE}{dr}$)

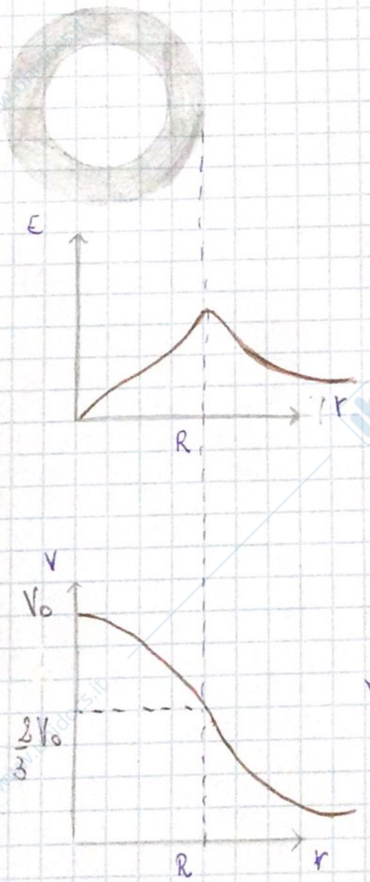
Il potenziale all'interno della sfera è dato da $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ e in particolare:

$V(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$ sulla superficie della sfera

- All'interno:

$$V(R)-V(r) = -\int_r^R \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,dr = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2-r^2) \Rightarrow V(r) = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

- Nel centro $V(0) = \frac{\rho R^3}{2\varepsilon_0} = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{3}{2}V(R)$



$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Supponendo che un nucleo atomico possa essere assimilato a una distribuzione sferica continua di carica, di valore complessivo Ze, il campo sulla superficie è dato da:

$E = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 R_m^2}$

$R_m \simeq 10^{-15}$ m risulta:

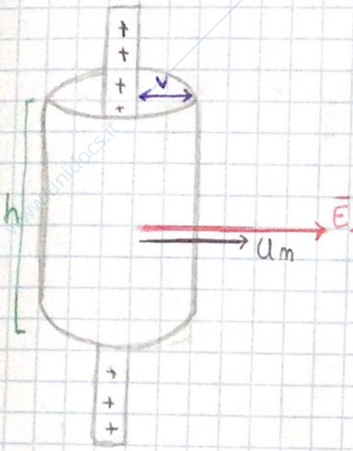
$E \simeq 1{,}5Z\cdot 10^{21}\ \frac{V}{m}$ valore che dà un'idea dei campi molto intensi che esistono a livello microscopico

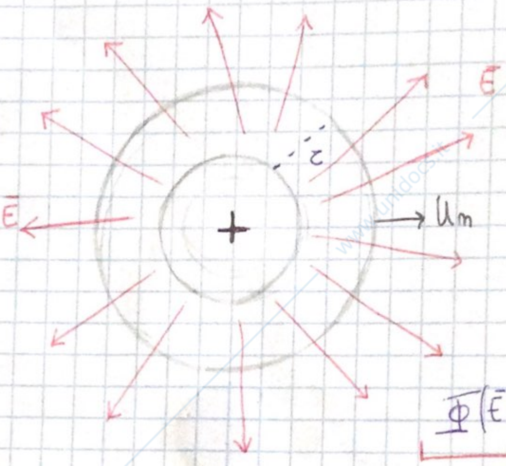
- CAMPO ELETTROSTATICO DI UN CILINDRO UNIFORMEMENTE CARICO

Una distribuzione spaziale continua e uniforme di carica,
ha forma cilindrica di raggio R, la lunghezza del cilindro
è molto grande rispetto a R.
Calcolare il campo $\vec{E}$ da essa prodotto, all'esterno del cilindro
stesso.

SOLUZIONE:

Abbiamo $\vec{E} \perp$ all'asse.
Per applicare la legge di Gauss $\left(\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot u_n \, d\Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0}\right)$ consideriamo una scatola cilindrica
Σ, di raggio $r > R$ e altezza h.





$\underbrace{\Phi(\vec{E}) = 0}_{}$ attraverso la base di Σ perché il campo è // alla base quindi $\perp u_n$

$\underbrace{\Phi(\vec{E}) = E\Sigma = 2\pi r h E = \frac{q}{\varepsilon_0}}_{}$ attraverso la superficie laterale, coincide con $\Phi(E)$ totale attraverso Σ

La carica contenuta entro Σ è:

$q = \int \rho \, d\tau = \rho \pi R^2 h = \lambda h \rightarrow$ volume

$\rho \pi R^2 = \frac{q}{h}$ le cariche contenute in un cilindro di raggio R e h unitarie

Quindi:

$\Phi(\vec{E}) = 2\pi r h E = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$ $\quad \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$

Se r_1 e r_2 raggi di 2 superfici cilindriche con $r_2 > r_1$:

$V(r_2) - V(r_1) = -\int_{r_1}^{r_2} E \, dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$

rispetto al bordo con $r \geq R$:

$V(r) - V(R) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R}$

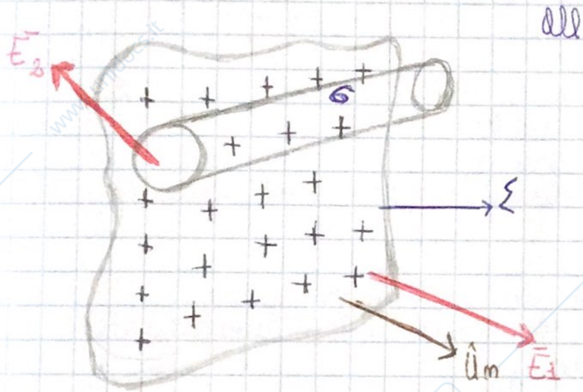
I risultati trovati valgono anche per un sottile filo rettilineo molto lungo, su cui è
depositata una carica q distribuita con densità uniforme λ

CAMPO DI UN PIANO INDEFINITO UNIFORMEMENTE CARICO

Calcolare $\bar{E}$ generato da una q distribuita con densità superficiale σ su un piano indefinito

SOLUZIONE:

Abbiamo $\bar{E} \perp$ al piano. Ha versi opposti dalle 2 parti (sempre uscente o sempre entrante). Come superficie a cui applicare la legge di Gauss sceglieremo una scatola cilindrica con le basi di area Σ, parallele al piano, così che il flusso attraverso le basi è $2E\Sigma$ mentre quello attraverso la superficie laterale è nullo.



All'interno della scatola c'è la carica $q = \sigma\Sigma$ quindi:

$$\Phi(E) = 2E\Sigma = \frac{\sigma\Sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Vettorialmente detto x un asse $\perp$ al piano:

$$\bar{E}_1 = \bar{E}(x>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_x \, ; \quad \bar{E}_2 = \bar{E}(x<0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_x$$

nel passaggio attraverso la superficie carica $\bar{E}$ è discontinuo:

$$\bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_x - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} u_x\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{u}_x$$

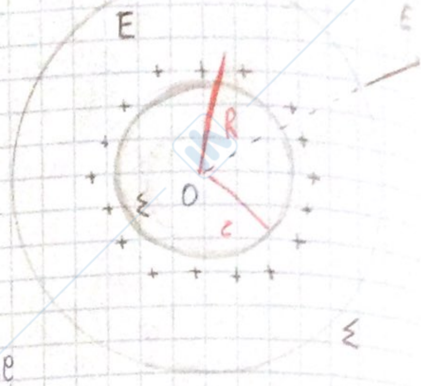
Essendo 2 punti: x_1 e x_2 con $x_2 > x_1$:

$$V(x_2) - V(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} E\,dx = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1)$$

Il risultato dipende solo da x e mostra che le superfici equipotenziali sono piani paralleli al piano carico

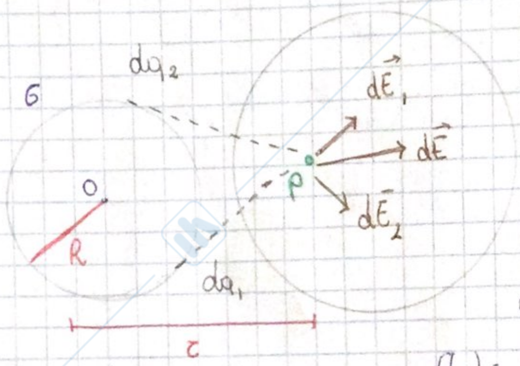
• CAMPO ELETTROSTATICO DI UNA DISTRIBUZIONE SFERICA SUPERFICIALE DI CARICA

Una carica q è distribuita con densità superficiale costante σ su una superficie sferica di raggio R. Calcolare il campo elettrostatico E nei punti all'interno e all'esterno della superficie.



SOLUZIONE:

Comincio con il calcolare il campo elettrostatico $\vec{E}$ all'esterno. Nel punto P distante $r>R$ dal centro E è radiale, in quanto è dovuto alla somma di contributi a due a due simmetrici, uguali in modulo la cui risultante è radiale. Se così non fosse verrebbe a dire che σ non è uniforme.
In qualsiasi altro punto che ha la stessa distanza di P dal centro, la situazione è la stessa. Ciò significa che il campo ha modulo costante su una superficie sferica di raggio r e ortogonale a questa e ha verso uscente o entrante a seconda del segno della carica:



Abbiamo messo in evidenza che il modulo può dipendere solo da r.
$r>R$:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint E(r)\,\hat{u}_r \cdot \hat{u}_n\, d\Sigma = E(r)\oint d\Sigma =$$

$$E(r)\,4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

con $q = 4\pi R^2 \sigma$ ho che:

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} \; ; \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{u}_r$$

(Il campo all'esterno di una distribuzione superficiale è uguale a quello di una carica puntiforme di eguale valore posta nel centro della superficie sferica)
a parità di carica, esso non dipende dal raggio della distribuzione

All'interno valgono le stesse ragioni di simmetria per cui il campo dovrebbe essere radiale e il flusso attraverso una qualsiasi superficie sferica Σ di raggio r' dovrebbe valere EΣ'

(All'interno non c'è carica, il flusso attraverso Σ' è nullo quindi $E=0$)

Notiamo che per r tendente a R dall'interno, il campo elettrostatico è sempre nullo mentre per r tendente a R dall'esterno il campo:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Il potenziale si calcola per $r \geq R$, partendo dal campo elettrostatico $\left(E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$ per $r=R$, $V=V_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ è un valore costante in tutti i punti all'interno