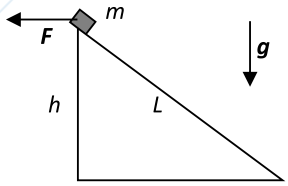
Corsi di Laurea Ing. EA+DI – PROVA SCRITTA – 08/01/2025

Nome e cognome: .... Matricola: ....

Al termine della prova dovete restituire questo foglio assieme al vostro elaborato. Se non esplicitamente indicato, in questi esercizi non sono riportati valori numerici: le grandezze note sono indicate da simboli (generalmente sottolineati) che vanno usati nelle soluzioni. ***Le risposte non adeguatamente giustificate o non discusse in modo convincente non saranno prese in considerazione.***

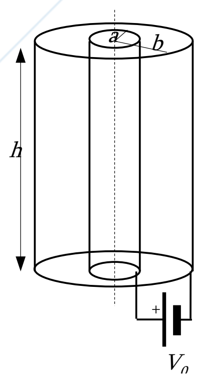
1. Una piccola cassa (da considerare puntiforme) di massa $\underline{m}$ è appoggiata su un piano inclinato liscio (con attrito trascurabile) di altezza $\underline{h}$ e lunghezza $\underline{L} = 5h/3$. Il piano inclinato è rigido, indeformabile e fisso nello spazio. La cassa si trova inizialmente ferma in equilibrio sulla sommità del piano inclinato (vedi figura) a causa della presenza di una forza esterna $\boldsymbol{F}$ di direzione orizzontale e verso come in figura, che ha modulo F_{eq} incognito. [usate g per indicare il modulo dell'accelerazione di gravità]



   a) Come si esprime, in queste condizioni di equilibrio, il modulo della reazione vincolare N che il piano inclinato esercita sulla cassa?
   b) A un dato istante, il modulo della forza $\boldsymbol{F}$ viene dimezzato rispetto al valore che consentiva l'equilibrio, cioè diventa $F = F_{eq}/2$. Di conseguenza, la cassa, inizialmente ferma, prende a muoversi sul piano inclinato. Supponendo che la forza $\boldsymbol{F}$ agisca costantemente sulla cassa, come si esprime in modulo la velocità v che essa acquista quando giunge alla base del piano inclinato?

Per prima cosa notiamo che, per la geometria del piano inclinato, l'angolo θ tra piano inclinato e orizzontale è tale che $sin\theta = h/L = 3/5$ e $cos\theta = (1-sin^2\theta)^{1/2} = 4/5$. La reazione vincolare garantisce che siano annullate le forze nella direzione ortogonale al piano inclinato. Scegliendo un asse orientato come la normale al piano inclinato e diretto verso l'"esterno" del piano stesso, deve essere $N = mgcos\theta + F_{eq}sin\theta = 4mg/5 + 3F_{eq}/5$. Per andare avanti bisogna determinare F_{eq} . Allo scopo imponiamo l'equilibrio nella direzione del piano inclinato: scegliendo un asse orientato come il piano inclinato e diretto verso il basso, deve essere $0 = mgsin\theta - F_{eq}cos\theta = 3mg/5 - 4F_{eq}/5$, da cui $F_{eq} = 3mg/4$. Di conseguenza si trova $N = mg(4/5 + 9/20) = 5mg/4$.
Quando il modulo della forza viene dimezzato, diventando $F = 3mg/8$, la cassa scende lungo il piano inclinato sotto l'azione congiunta del peso e della forza $\boldsymbol{F}$. Il problema è convenientemente risolto usando il bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K + \Delta U$. In questa equazione, $\Delta E_K = (m/2)v^2$, dove abbiamo tenuto conto che la cassa è inizialmente ferma, mentre $\Delta U = \Delta U_G = - mgh$, dove abbiamo tento conto che la cassa scende, cioè diminuisce la propria quota. Il lavoro della forza $\boldsymbol{F}$, che è costante e uniforme, si calcola attraverso il prodotto del suo modulo per la proiezione dello spostamento della cassa nella direzione (orizzontale) della forza. Questa proiezione è pari al cateto di base del piano inclinato, che vale, per Pitagora, $b = (L^2 - h^2)^{1/2} = 4h/3$, per cui $L_F = - 4Fh/3 = - 12mgh/24 = - mgh/2$, dove il segno negativo tiene conto del fatto che la forza è diretta in verso opposto rispetto alla proiezione dello spostamento. Mettendo tutto assieme si ha: $- mgh/2 = (m/2)v^2 - mgh$, ovvero $v^2/2 = gh/2$, da cui $v = (gh)^{1/2}$.

2. Avete un condensatore le cui armature sono due gusci cilindrici sottili, coassiali fra loro e fatti di materiale ottimo conduttore. I due gusci hanno la stessa altezza $\underline{h}$ e raggi pari rispettivamente a $\underline{a}$ e $\underline{b} = 3a$; lo spazio tra di loro è vuoto. Come rappresentato in figura, essi sono collegati a un generatore ideale di differenza di potenziale $\underline{V_0}$. [usate ε_0 per indicare la costante dielettrica del vuoto; osservate che le dimensioni del sistema sono tali da poter trascurare gli "effetti ai bordi"]



a) Dimostrate meglio che potete che la capacità del condensatore in questione si esprime come $C = 2\pi\varepsilon_0 h/ln(3)$. [può farvi comodo ricordare che, per una variabile generica ξ , si ha $\int(1/\xi)d\xi = ln(\xi)$, con *ln* logaritmo naturale]
b) Esprimete il lavoro L_{gen} compiuto dal generatore per caricare il condensatore.

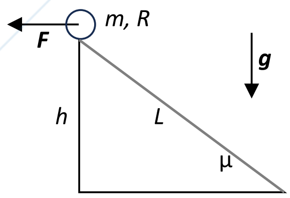
Occorre partire dalla definizione di capacità elettrica, $C = Q/\Delta V$, con Q carica presente sulle armature (prendiamo quella che ha carica positiva) e ΔV d.d.p. tra le armature. In condizioni stazionarie, sull'armatura di raggio a si accumula una carica Q (e, per induzione elettrostatica, una carica $-Q$ sarà presente sull'altra armatura). Nella regione di spazio tra le armature insiste un campo elettrico radiale (per la geometria del sistema) e diretto verso l'"esterno" il cui modulo E è funzione della (sola) distanza r dall'asse del sistema. L'espressione di $E(r)$ può essere trovata con il teorema di Gauss: scegliendo una scatola chiusa che ha la forma di un cilindro di raggio r generico, con $a < r < b$, coassiale con i gusci cilindrici del sistema, si ha che il campo elettrico attraversa solo la superficie laterale a causa della sua direzione radiale. Il flusso di campo elettrico che attraversa la scatola è allora è $\Phi_S(E) = 2\pi rhE$, con $2\pi rh = S$ superficie laterale della scatola. Il teorema di Gauss recita $\Phi_S(E) = Q_{int}/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0$, dove abbiamo correttamente notato che la carica Q_{int} interna alla scatola è proprio la Q che si trova sull'armatura interna. Quindi $E(r) = Q/(2\pi\varepsilon_0 rh)$. Per determinare la capacità dobbiamo legare il campo alla d.d.p. Infatti sappiamo che tra le due armature esiste una d.d.p. dovuta al generatore. Indicando con ΔV la d.d.p. tra guscio cilindrico esterno (che si trova a un potenziale più basso, essendo collegato al polo negativo del generatore) e interno, si ha $\Delta V = -V_0$. D'altra parte, tenendo conto che il campo è radiale e ha il verso specificato prima, deve anche essere $\Delta V = -\int_a^b E dr$. Mettendo nell'integrale l'espressione del campo appena trovata, si ha $\Delta V = -\int_a^b (Q/(2\pi\varepsilon_0 rh))dr = -(Q/(2\pi\varepsilon_0 h)) \int_a^b (1/r)dr = -(Q/(2\pi\varepsilon_0 h)) ln(b/a) = -(Q/(2\pi\varepsilon_0 h)) ln(3)$, dove abbiamo applicato la formulina di integrazione data nel testo, con $\xi = r$. Dato che, come già affermato, deve anche essere $\Delta V = -V_0$, si ottiene $Q = 2\pi\varepsilon_0 hV_0/ln(3)$. Quindi, $C = Q/V_0 = 2\pi\varepsilon_0 h/ln(3)$, come era da dimostrare.
Sulla base di semplici considerazioni di bilancio energetico, il lavoro L_{gen} deve essere pari all'energia elettrostatica U_E di configurazione del condensatore. Poiché è $U_E = CV_0^2/2$, si ha $L_{gen} = U_E = \pi\varepsilon_0 hV_0^2/ln(3)$.

B

Corsi di Laurea Ing. EA+DI – PROVA SCRITTA – 08/01/2025

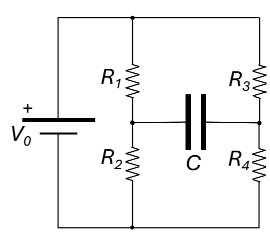
Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Al termine della prova dovete restituire questo foglio assieme al vostro elaborato. Se non esplicitamente indicato, in questi esercizi non sono riportati valori numerici: le grandezze note sono indicate da simboli (generalmente sottolineati) che vanno usati nelle soluzioni. ***Le risposte non adeguatamente giustificate o non discusse in modo convincente non saranno prese in considerazione.***



1. Un cilindro pieno e omogeneo di massa $\underline{m}$ e raggio $\underline{R}$ si trova su un piano inclinato scabro, con coefficiente di attrito $\underline{\mu}$. Il piano inclinato è rigido, indeformabile e fisso, ha altezza $\underline{h}$ e lunghezza $\underline{L} = 5h/3$. Il cilindro si trova inizialmente fermo e in equilibrio sulla sommità sul piano inclinato (vedi figura) a causa della presenza di una forza esterna $\boldsymbol{F}$ di direzione orizzontale e verso come in figura, di modulo F_{eq} incognito, che agisce sul suo asse. [usate g per indicare il modulo dell'accelerazione di gravità]
   a) Come si esprimono il modulo F_A della forza di attrito al contatto tra cilindro e piano inclinato e il modulo F_{eq} della forza che permette l'equilibrio?
   b) A un dato istante, il modulo della forza $\boldsymbol{F}$ viene dimezzato rispetto al valore che consentiva l'equilibrio, cioè diventa $F = F_{eq}/2$. Di conseguenza, il cilindro, inizialmente fermo, prende a muoversi di **rotolamento puro** lungo il piano inclinato. Supponendo che la forza $\boldsymbol{F}$ agisca costantemente sull'asse del cilindro, come si esprime in modulo la velocità v_{cm} che il suo centro di massa ha acquistato quando il cilindro giunge alla base del piano inclinato?

Per prima cosa notiamo che, per la geometria del piano inclinato, l'angolo θ tra piano inclinato e orizzontale è tale che $\sin\theta = h/L = 3/5$ e $\cos\theta = (1-\sin^2\theta)^{1/2} = 4/5$. Quindi osserviamo che il cilindro è un corpo rigido esteso che può ruotare. Nelle condizioni di equilibrio del testo, la rotazione non c'è. Poiché l'unica forza tra quelle applicate al cilindro (peso, reazione vincolare, forza esterna, forza di attrito) che ha braccio nullo rispetto al centro di massa è l'attrito, se ne deduce che la forza di attrito è nulla. Infatti, se così non fosse ci sarebbe un momento di forze rispetto al centro di massa che metterebbe in rotazione il cilindro. A questo punto per determinare F_{eq} è sufficiente imporre l'equilibrio nella direzione non vincolata del moto, cioè la direzione del piano inclinato. Scegliendo un asse orientato come il piano inclinato e diretto verso il basso, deve essere $0 = mg\sin\theta - F_{eq}\cos\theta = 3mg/5 - 4F_{eq}/5$, da cui $F_{eq} = 3mg/4$.
Quando il modulo della forza viene dimezzato, diventando $F = 3mg/8$, il cilindro scende lungo il piano inclinato sotto l'azione congiunta del peso e della forza $\boldsymbol{F}$ muovendosi di rotolamento puro. Il problema è convenientemente risolto usando il bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K + \Delta U$. In questa equazione, $\Delta E_K = (m/2)v_{cm}^2 + (I/2)\omega^2 = (m/2)v_{cm}^2 + (m/(4R^2))v_{cm}^2/R^2 = 3mv_{cm}^2/4$, dove abbiamo tenuto conto che il cilindro è inizialmente fermo, che la sua energia cinetica è data dalla somma del contributo traslazionale e rotazionale, che il momento di inerzia di un cilindro pieno e omogeneo è $I = mR^2/2$, e infine che, per il rotolamento puro, $\omega = v_{cm}/R$. La variazione di energia potenziale è $\Delta U = \Delta U_G = - mgh$, dove abbiamo tento conto che il centro di massa del cilindro scende, cioè diminuisce la propria quota. Il lavoro della forza $\boldsymbol{F}$, che è costante e uniforme, si calcola attraverso il prodotto del suo modulo per la proiezione dello spostamento della cassa nella direzione (orizzontale) della forza. Questa proiezione è pari al cateto di base del piano inclinato, che vale, per Pitagora, $b = (L^2 - h^2)^{1/2} = 4h/3$, per cui $L_F = - 4Fh/3 = - mgh/2$, dove il segno negativo tiene conto del fatto che la forza è diretta in verso opposto rispetto alla proiezione dello spostamento. Mettendo tutto assieme si ha: $- mgh/2 = (3m/4)v_{cm}^2 - mgh$, ovvero $3v_{cm}^2/2 = gh$, da cui $v = (2gh/3)^{1/2}$.



2. Il circuito di figura consiste di quattro resistenze, $\underline{R_1} = \underline{R}$, $\underline{R_2} = 2\underline{R}$, $\underline{R_3} = 3\underline{R}$, $\underline{R_4} = \underline{R_2} = 2\underline{R}$ e di un condensatore di capacità $\underline{C}$. Il circuito, collegato

a un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 , ha raggiunto condizioni stazionarie, cioè il condensatore è carico.
a) Come si esprime l'intensità di corrente I erogata dal generatore?
b) Come si esprime la carica Q accumulata sul condensatore?

Poiché le condizioni sono stazionarie, il ramo che contiene il condensatore non è interessato da corrente. La corrente quindi passa nel parallelo dei due rami costituiti rispettivamente dalla serie $R_1+R_2 = 3R$ e dalla serie $R_3+R_4 = 5R$. La resistenza equivalente di questo parallelo è $R_{eq} = (1/(3R)+1/(5R))^{-1} = 15R/8$ e l'intensità di corrente erogata dal generatore è $I = V_0/R_{eq} = 8V_0/(15R)$. Per definizione di capacità, è $Q = C\Delta V$ con ΔV la differenza di potenziale ai capi del condensatore. Tale differenza di potenziale è la stessa che si trova tra i fili superiori (in figura) delle resistenze R_2 e R_4 . Dette I_A e I_B le intensità delle correnti che scorrono rispettivamente nel ramo costituito dalla serie R_1+R_2 e nel ramo costituito dalla serie R_3+R_4 , si ha $\Delta V = R_2I_A - R_4I_B = 2R(I_A - I_B)$, dove abbiamo sfruttato $R_2 = R_4 = 2R$. Le intensità di corrente I_A e I_B , che, come già affermato, scorrono nelle serie $R_1+R_2 = 3R$ e $R_3+R_4 = 5R$, si trovano da $I_A = V_0/(3R)$ e $I_B = V_0/(5R)$. Si ottiene quindi $\Delta V = 2RV_0(1/(3R) - 1/(5R)) = 4V_0/15$, per cui $Q = 4CV_0/15$.

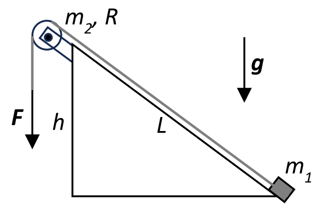
C

Corsi di Laurea Ing. EA+DI – PROVA SCRITTA – 08/01/2025

Nome e cognome: ……………………………………………………… Matricola: ……………

Al termine della prova dovete restituire questo foglio assieme al vostro elaborato. Se non esplicitamente indicato, in questi esercizi non sono riportati valori numerici: le grandezze note sono indicate da simboli (generalmente sottolineati) che vanno usati nelle soluzioni. ***Le risposte non adeguatamente giustificate o non discusse in modo convincente non saranno prese in considerazione.***

1. Una piccola cassa (da considerare puntiforme) di massa $\underline{m_1} = \underline{m}$ è appoggiata su un piano inclinato liscio (con attrito trascurabile) di altezza $\underline{h}$ e lunghezza $\underline{L} = 5h/3$. Il piano inclinato è rigido, indeformabile e fisso nello spazio. Alla cassa è vincolata una fune inestensibile e di massa trascurabile che è avvolta sulla superficie laterale di una puleggia, costituita da un cilindro pieno e omogeneo di massa $\underline{m_2} = \underline{m}$ e raggio R imperniato al suo centro su un supporto solidale al piano inclinato. Nel tratto tra cassa e puleggia, la fune è parallela al piano inclinato; inoltre essa non slitta sulla superficie esterna della puleggia. All'altro estremo della fune è applicata una forza $\boldsymbol{F}$ costante e uniforme diretta verticalmente verso il basso e di modulo $\underline{F} = 3mg$. Nelle condizioni dell'esperimento si osserva che la cassa risale lungo il piano inclinato. [usate g per indicare il modulo dell'accelerazione di gravità]

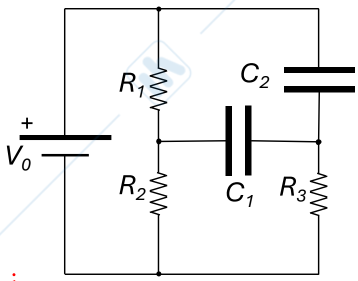


   a) Come si esprime il modulo dell'accelerazione a della cassa?
   b) Supponendo che la cassa si trovi inizialmente ferma alla base del piano inclinato, come in figura, come si esprime il modulo della sua velocità v nell'istante in cui essa raggiunge la sommità del piano inclinato?

Per prima cosa notiamo che, per la geometria del piano inclinato, l'angolo θ tra piano inclinato e orizzontale è tale che $\sin\theta = h/L = 3/5$ e $\cos\theta = (1-\sin^2\theta)^{1/2} = 4/5$. Quindi osserviamo che nel problema ci sono due oggetti che si muovono, la cassa, che trasla lungo il piano inclinato, e la puleggia, che ruota attorno al suo asse. Occorre quindi scrivere due equazioni del moto. Usando un asse parallelo al piano inclinato e orientato verso l'alto, l'accelerazione della cassa si scrive $a = T_1/m - g\sin\theta = T_1/m - 3g/5$. Indicando come positivo il verso di rotazione antiorario della puleggia e considerando che i momenti delle forze che ne provocano la rotazione sono dovuti alla tensione di modulo T_1 sulla destra di figura (tende a far ruotare la puleggia in senso orario e quindi compare con segno negativo) e alla tensione di modulo pari a quello della forza F applicata alla fune sulla sinistra, e che i bracci delle tensioni sono entrambi pari a R , l'accelerazione angolare della puleggia si scrive $\alpha = (F-T_1)R/I = 2(3mg-T_1)R/(mR^2)$, dove abbiamo esplicitato il momento di inerzia del cilindro pieno e omogeneo. Nelle due equazioni scritte ci sono tre incognite: a , α , T_1 , per cui occorre un'ulteriore equazione. Questa è data dalla condizione di non slittamento della fune sulla superficie della puleggia, che implica $\alpha = a/R$. Possiamo quindi riscrivere l'equazione del moto rotazionale della puleggia come $ma = 6mg - 2T_1$. Dall'equazione del moto della cassa troviamo $T_1 = ma + 3mg/5$, che, sostituita nell'equazione del moto rotazionale della puleggia, porta a; $ma = 6mg - 2ma - 6mg/5$, ovvero $3ma = 24mg/5$, da cui $a = 8g/5$.
Il calcolo della velocità è convenientemente risolto usando il bilancio energetico: $L_F = \Delta E_K + \Delta U$. In questa equazione, $\Delta E_K = (m/2)v^2 + (I/2)\omega^2 = (m/2)v^2 + (m/(4R^2))v^2/R^2 = 3mv^2/4$, dove abbiamo tenuto conto che cassa e puleggia sono inizialmente fermi, che l'energia cinetica complessiva è data dalla somma di quella traslazionale della cassa e rotazionale della puleggia, che il momento di inerzia di un cilindro pieno e omogeneo è $I = mR^2/2$, e infine che, per la condizione di non slittamento della fune sulla puleggia è $\omega = v/R$. La variazione di energia potenziale è $\Delta U = \Delta U_G = mgh$, dove abbiamo tento conto che la cassa sale, cioè aumenta la propria quota. Il lavoro della forza $\boldsymbol{F}$, che è costante e uniforme, si calcola attraverso il prodotto del suo modulo per lo spostamento del punto di

applicazione, che è pari a $L = 5h/3$, per cui $L_F = 5Fh/3 = 5mgh$. Mettendo tutto assieme si ha: $-5mgh = (3m/4)v^2 + mgh$, ovvero $3v^2/4 = 4gh$, da cui $v = (16gh/3)^{1/2}$.

2. Il circuito di figura consiste di tre resistenze, $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$, e due condensatori di capacità $C_1 = C$ e $C_2 = 2C$. Il circuito, collegato a un generatore ideale di differenza di potenziale V_0 , ha raggiunto condizioni stazionarie, cioè i condensatori sono carichi.
   a) Come si esprime l'intensità di corrente I erogata dal generatore?
   b) Come si esprimono le cariche Q_1 e Q_2 accumulate sui condensatori di capacità C_1 e C_2 ?



Poiché le condizioni sono stazionarie, i rami che contengono i condensatori non sono interessati da passaggio di corrente. La corrente quindi passa nella serie $R_1+R_2 = 3R$ e l'intensità di corrente erogata dal generatore è $I = V_0/3R$.
Per definizione di capacità, è $Q = C\Delta V$ con ΔV la differenza di potenziale ai capi del condensatore considerato. Poiché la resistenza R_3 non è interessata da passaggio di corrente (la corrente non passa attraverso nessuno dei due condensatori), l'armatura di destra (in figura) di C_1 si trova allo stesso potenziale del polo negativo del generatore. L'armatura di sinistra si trova invece allo stesso potenziale del filo in alto (in figura) di R_2 . Dunque $\Delta V_{C1} = \Delta V_{R2} = R_2 I = 2V_0/3$ e $Q_1 = 2CV_0/3$. Per quanto riguarda C_2 , l'armatura inferiore (in figura) è allo stesso potenziale del polo negativo del generatore, mentre quella superiore (in figura) è allo stesso potenziale del polo positivo dello stesso generatore. Dunque $\Delta V_{C1} = V_0$ e $Q_2 = 2CV_0$.