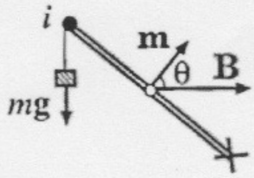
P.5.26.
Una spira quadrata di lato a può ruotare attorno al suo asse orizzontale ed è percorsa da una corrente i. Nella regione considerata è presente un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ uniforme, diretto orizzontalmente e perpendicolare all'asse di rotazione. Ad un estremo della spira è appesa una massa m. Si stabilisca il massimo valore della massa che la spira può sollevare in virtù della forza magnetica.[$a = 10$ cm, $i = 5$ A, $|\mathbf{B}| = 1$ T]



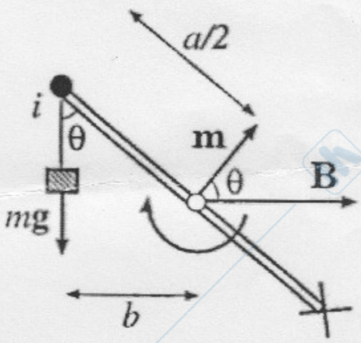
S.5.26.
La figura mostra la spira di lato; l'asse di rotazione è perpendicolare al piano del foglio; la corrente sul lato superiore della spira scorre verso il lettore, mentre ha verso opposto sul lato inferiore. Il momento meccanico $\mathfrak{M}$ agente sulla spira è dato dalla relazione:

$$\mathfrak{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \tag{1}$$

essendo $\mathbf{m}$ il momento di dipolo magnetico della spira. Per il principio di equivalenza di Ampere, si ha:

$$\mathbf{m} = i\, a^2\, \mathbf{n}, \tag{2}$$

dove la normale alla spira $\mathbf{n}$ è un versore perpendicolare al piano in cui la spira giace ed il cui verso coincide con quello di avanzamento di una vite destrorsa che ruoti nel verso di scorrimento della corrente nella spira. Riferendoci alla figura, il momento $\mathfrak{M}$ impone alla spira una rotazione in verso orario, in quanto è diretto perpendicolarmente al piano del foglio in verso entrante. Sostituendo la (2) nella (1), si ottiene:



$$|\mathfrak{M}| = Ba^2 i \sin\theta \tag{3}$$

essendo θ l'angolo che $\mathbf{B}$ forma con $\mathbf{m}$. Per poter sollevare la massa legata all'estremo della spira, è necessario che il momento meccanico indotto dalle forze magnetiche sia pari o superiore al momento meccanico esercitato sul sistema dalla forza peso; si noti che la forza gravitazionale agente sulla massa impone al sistema un verso di rotazione antiorario. Detto $\mathfrak{M}_p$ il momento esercitato dalla forza peso, si ha:

$$|\mathfrak{M}_p| = mgb, \tag{4}$$

dove b è il braccio della forza peso rispetto all'asse di rotazione della spira. Si noti che $b = (a/2)\sin\theta$, per cui imponendo

$$|\mathfrak{M}_p| \le |\mathfrak{M}|, \tag{5}$$

otteniamo dalla (3):

$$\frac{mga}{2}\sin\theta \le Ba^2 i \sin\theta, \tag{6}$$

da cui

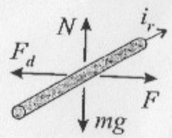
$$m \le \frac{2iBa}{g}. \tag{7}$$

Sostituendo nella (7) i valori numerici assegnati dal problema, si ottiene $m \le 0.10$ kg.

$$F_{est} = |i|aB = \frac{abk}{R}akt = \frac{a^2bk^2}{R}t \quad . \tag{5}$$

S.7.11.
La situazione a regime si ottiene quando la forza **F** che spinge l'asta verso destra, dovuta alla corrente che circola nel lato mobile in presenza di un campo magnetico, è esattamente bilanciata dalla forza d'attrito dinamico $\mathbf{F}_d$. A regime l'asta si muove con velocità costante v_r e quindi la risultante delle forze applicate all'asta (vedi figura) deve essere nulla:

$$\begin{cases} F - F_d = 0 \\ N - mg = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} F = F_d \\ N = mg \end{matrix} \tag{1}$$



dove

$$\mathbf{F} = i_r \mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{2}$$

che in modulo è pari a

$$F = i_r lB \quad , \tag{3}$$

mentre

$$F_d = \mu_d N = \mu_d mg \tag{4}$$

e quindi la prima equazione diventa:

$$i_r lB = \mu_d mg \tag{5}$$

da cui si ottiene la corrente a regime

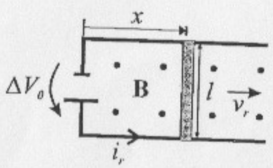
$$i_r = \frac{\mu_d mg}{lB} = 7.85 \text{ A} \quad . \tag{6}$$

Per calcolare la velocità a regime v_r bisogna considerare la legge di Ohm generalizzata, in cui includere sia la forza elettromotrice ΔV_0 dovuta al generatore di tensione, che quella indotta f a causa del movimento dell'asta:

$$\Delta V_0 + f = Ri_r \tag{7}$$

dove

$$f = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Blv_r \quad . \tag{8}$$



Nell'equazione precedente si è considerato il versore **n** equiverso a **B** in modo tale che il segno della corrente i_r, secondo la convenzione discussa in S.7.3, sia in accordo con il verso riportato in figura. Il segno negativo nel calcolo di f indica che la forza elettromotrice indotta nel circuito ha verso opposto rispetto a ΔV_0.

Sostituendo l'equazione (8) nella (7) si può calcolare la velocità di regime come:

$$v_r = \frac{\Delta V_0 - i_r R}{lB} \quad , \tag{9}$$

dove i_r è la corrente a regime determinata nell'equazione (6). La velocita a regime diventa, quindi:

$$v_r = \frac{\Delta V_0 lB - R\mu_d mg}{(lB)^2} = 0.46 \text{ m/s} \quad . \tag{10}$$

Osservazioni:
(i) La velocità a regime poteva anche essere determinata a partire da considerazioni energetiche. Infatti, a regime la potenza erogata dal generatore

$$\mathcal{P} = \Delta V_0 i_r \tag{11}$$

è completamente dissipata dalla resistenza R per effetto Joule e dalla forza di attrito dinamico tra l'asta mobile ed il circuito. Partendo da queste considerazioni, si può scrivere il seguente bilancio:

$$\Delta V_0 i_r = Ri_r^2 + \mu_d mgv_r \tag{12}$$

da cui si ottiene

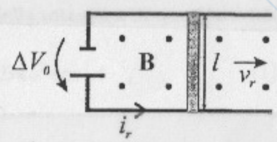
$$v_r = \frac{\Delta V_0 - Ri_r}{\mu_d mg} i_r \quad . \tag{13}$$

e sostituendo la (6) si arriva alla stessa formula finale

$$v_r = \frac{\Delta V_0 lB - R\mu_d mg}{(lB)^2} \quad ; \tag{14}$$

(ii) Il meccanismo analizzato in questo esercizio potrebbe essere utilizzato come rudimentale nastro trasportatore. È, infatti, un esempio di motore elettrico in cui l'energia erogata dal generatore viene trasformata in lavoro meccanico per spostare l'asta metallica con velocità costante contro le forze d'attrito. È interessante osservare che, a regime, la velocità varia proporzionalmente alla differenza di potenziale ΔV_0 ai capi del generatore di tensione e può essere così regolata arbitrariamente.

7.11.
Un'asta metallica, lunga $l = 50$ cm e di massa $m = 2$ kg, scorre su due conduttori paralleli ed orizzontali con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.4$. Un generatore di tensione mantiene una differenza di potenziale $\Delta V_0 = 24$ V costante tra i due conduttori e chiude il circuito. Il tutto è immerso in un campo magnetico **B**, uniforme e costante, diretto come in figura ($B = 2$ T). Se il circuito ha una resistenza elettrica complessiva $R = 3\ \Omega$, si determinino:
(i) la corrente di regime i_r nel circuito;
(ii) la velocità di regime v_r dell'asta.

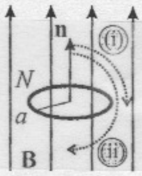


P.7.6.

Una bobina, composta da N spire circolari di raggio a, si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico $\mathbf{B}$ uniforme e costante. La bobina è inizialmente disposta con l'asse parallelo alla direzione del campo. Sapendo che la resistenza della bobina è pari a R, si determini la carica complessiva che attraversa la bobina a fronte di una rotazione della stessa di:

(i) 90°;

(ii) 180°.



S.7.6.

Per determinare la carica complessiva che attraversa la bobina si può integrare nel tempo la corrente indotta a fronte della variazione di flusso causata dalla rotazione.
Partendo dalla legge di Faraday e dalla legge di Ohm si ricava la corrente indotta come:

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \quad . \tag{1}$$

Chiamando t_i e t_f gli istanti iniziale e finale della rotazione della spira, possiamo calcolare la carica che ha attraversato una sezione della spira:

$$Q = \int_{t_i}^{t_f} i\,dt = -\frac{1}{R}\int_{t_i}^{t_f} d\Phi(\mathbf{B}) = -\frac{1}{R}[\Phi_f(\mathbf{B}) - \Phi_i(\mathbf{B})] \quad , \tag{2}$$

dove $\Phi_f(\mathbf{B})$ è il flusso finale e $\Phi_i(\mathbf{B})$ è il flusso iniziale.
L'equazione ottenuta:

$$Q = -\frac{1}{R}[\Phi_f(\mathbf{B}) - \Phi_i(\mathbf{B})] \tag{3}$$

è anche nota come *legge di Felici* ed evidenzia come la carica totale che attraversa la bobina non dipenda dalla legge temporale con cui varia il flusso, ma solo dai suoi valori iniziale e finale.
Il flusso iniziale, nel presente problema, è pari a

$$\Phi_i(\mathbf{B}) = N\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS = NB\pi a^2 \tag{4}$$

in quanto $\mathbf{B}$ è uniforme ed inizialmente parallelo ed equiverso ad $\mathbf{n}$.
Distinguiamo ora i due casi proposti:
(i) il flusso finale è

$$\Phi_f(\mathbf{B}) = 0 \tag{5}$$

in quanto $\mathbf{B}$ è ortogonale ad $\mathbf{n}$. Quindi,

$$Q = \frac{\Phi_i(\mathbf{B})}{R} = \frac{NB\pi a^2}{R} \quad . \tag{6}$$

(ii) Il flusso finale è

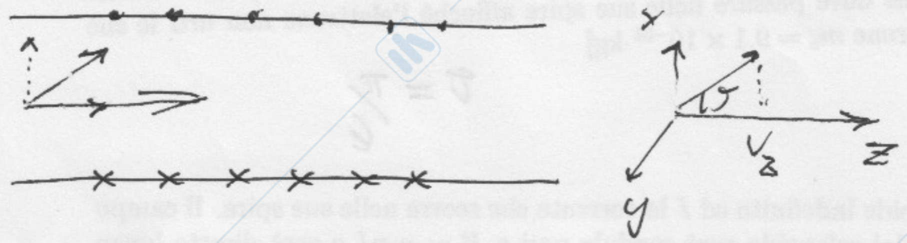
$$\Phi_f(\mathbf{B}) = N\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,dS = -NB\pi a^2 \tag{7}$$

in quanto $\mathbf{B}$ ed $\mathbf{n}$ sono paralleli ma opposti ed il loro prodotto scalare è negativo. Di conseguenza,

$$Q = -\frac{1}{R}(-NB\pi a^2 - NB\pi a^2) = \frac{2NB\pi a^2}{R} \quad . \tag{8}$$

Le Eqs (6) e (8) permettono la misura di B attraverso una misura della carica Q

Consideriamo una particella carica che entra in un solenoide con una velocità che forma un angolo θ con l'asse del solenoide ovvero con il campo



Assumiamo che la carica sia sottoposta solo alla forza di Lorentz. Se z è l'asse del campo allora la forza di Lorentz è diretta nel piano xy ~~componente della velocità~~. Scegliamo l'asse x in modo ~~abbiamo~~ che coincida con la direzione di v_{0x}.

$R_z = 0$

$R_x = 0$

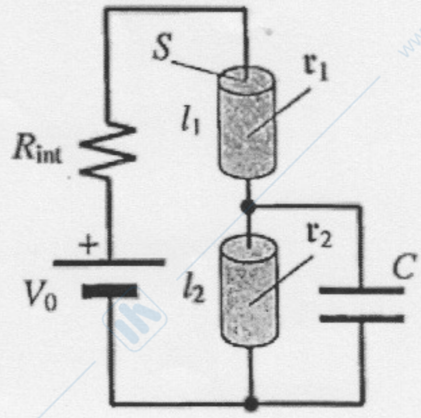
$R_y = \frac{q v B \sin\theta}{m}$ accelerazione

Il moto è rettilineo unif. in direzione z e circolare unif nel piano xy

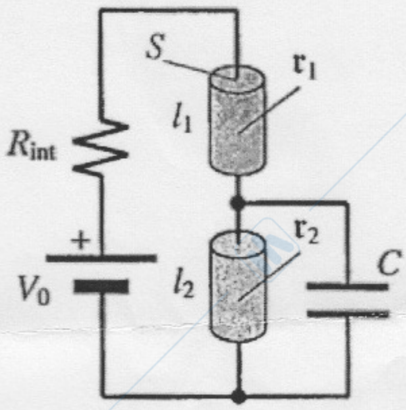
↳ la carica percorre una spirale tanto più "allungata" quanto più θ è vicino a zero (se $\theta = 0$ $v \parallel B$ e la carica non subisce effetti)

$$\frac{m v_\perp^2}{R} = q v_\perp B \qquad R = \frac{m v_\perp}{qB} = \frac{m v \sin\theta}{qB}$$

P.4.16.
Un generatore di differenza di potenziale $V_0 = 12$ V con resistenza interna $R_{int} = 1\,\Omega$ è collegato al circuito mostrato in figura. I due conduttori cilindrici del circuito hanno sezione $S = 1$ mm^2, lunghezza $l_1 = 1.4$ cm e $l_2 = 2.5$ cm, e resistività $\mathfrak{r}_1 = 2.5 \times 10^{-2}\,\Omega$ cm e $\mathfrak{r}_2 = 2.2 \times 10^{-2}\,\Omega$ cm, rispettivamente; il condensatore ha capacità $C = 100$ nF. Si calcolino, in condizioni stazionarie, la differenza di potenziale ai capi di ciascun resistore e la carica immagazzinata nel condensatore.



S.4.16.
Calcoliamo anzitutto le resistenze dei due conduttori cilindrici, che valgono rispettivamente:



$$R_1 = \frac{\mathfrak{r}_1 l_1}{S}, \tag{1}$$
$$R_2 = \frac{\mathfrak{r}_2 l_2}{S}. \tag{2}$$

Osserviamo poi che, in condizioni stazionarie, non c'è corrente che attraversa il condensatore, il quale si comporta come un circuito aperto. Per questo motivo l'intensità I della corrente che fluisce nei due conduttori cilindrici è la stessa, come se fossero connessi in serie. Per calcolarla è sufficiente dividere la differenza di potenziale V_0 per la resistenza totale:

$$I = \frac{V_0}{R_{int} + R_1 + R_2} = \frac{S V_0}{S R_{int} + \mathfrak{r}_1 l_1 + \mathfrak{r}_2 l_2}. \tag{3}$$

La differenza di potenziale ai capi di ciascuno dei due conduttori cilindrici si calcola applicando la legge di Ohm, cioè moltiplicando la corrente I per la rispettiva resistenza:

$$V_1 = R_1 I = \frac{\mathfrak{r}_1 l_1}{S R_{int} + \mathfrak{r}_1 l_1 + \mathfrak{r}_2 l_2} V_0 = 4.2 \text{ V}, \tag{4}$$
$$V_2 = R_2 I = \frac{\mathfrak{r}_2 l_2}{S R_{int} + \mathfrak{r}_1 l_1 + \mathfrak{r}_2 l_2} V_0 = 6.6 \text{ V}. \tag{5}$$

La differenza di potenziale V_2 è la stessa che troviamo ai capi del condensatore. In base alla definizione di capacità $C = Q/\Delta V$, dove ΔV indica la differenza di potenziale ai capi del condensatore, la carica immagazzinata in esso vale:

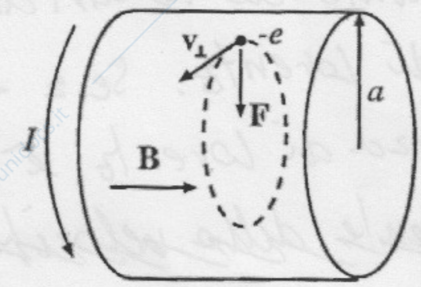
$$Q = C V_2 = \frac{\mathfrak{r}_2 l_2}{S R_{int} + \mathfrak{r}_1 l_1 + \mathfrak{r}_2 l_2} C V_0 = 6.6 \times 10^{-7} \text{ C}. \tag{6}$$

P.5.19.
Un solenoide rettilineo indefinito è costituito da $n = 10^3$ spire per metro di lunghezza. Al suo interno un elettrone si muove, sotto l'influenza della forza di Lorenz, con velocità $v = 10^7$ m/s. Sapendo che il solenoide ha un raggio di 5 cm, si stabilisca la minima intensità di corrente che deve passare nelle sue spire affinché l'elettrone non urti le sue pareti.[Massa dell'elettrone $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg]

$\theta = \pi/6$

S.5.19.
Sia a il raggio del solenoide indefinito ed I la corrente che scorre nelle sue spire. Il campo magnetico B generato dal solenoide avrà modulo pari a $B = \mu_0 n I$ e sarà diretto lungo l'asse. La forza agente sull'elettrone sarà pari a:

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \qquad (1)$$



con $\mathbf{v}$ velocità dell'elettrone ed $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C carica elementare; questa forza costringerà l'elettrone ad un'orbita di tipo elicoidale lungo l'asse del solenoide. Come già visto nel primo esercizio di questo capitolo, il raggio R della traiettoria elicoidale si può calcolare dalla (1) imponendo che la forza magnetica agisca da forza centripeta:

$$|\mathbf{F}| = ev_\perp B = m_e \frac{v_\perp^2}{R}, \qquad (2)$$

dove $v_\perp = v \sin\theta$ è la proiezione della velocità della particella in direzione perpendicolare al campo magnetico, v è il modulo della velocità e θ è l'angolo che questa forma con B. Dalla (2) otteniamo:

$$R = \frac{m_e v \sin\theta}{eB}. \qquad (3)$$

Dalla precedente espressione risulta che, a parità di energia cinetica e dunque di modulo della velocità degli elettroni, il massimo raggio della traiettoria si ha per $\theta = \pi/2$; in questo caso il moto è circolare uniforme ed avviene nel piano perpendicolare a B. Per stabilire quale valore debba assumere il campo magnetico al fine di evitare che gli elettroni collidano con le pareti del solenoide, assumiamo come caso limite quello in cui il raggio massimo della traiettoria elettronica sia pari a quello del solenoide:

$B = \mu_0 I n$

$$R_{max} = \frac{m_e v}{eB} = a. \qquad (4)$$

Dalla (4) otteniamo, inserendo l'espressione del campo magnetico in funzione della corrente I:

$$I = \frac{m_e v}{\mu_0 e n a}. \qquad (5)$$

Utilizzando nella (5) i valori numerici assegnati dal problema, otteniamo infine che la minima corrente necessaria a contenere gli elettroni nel solenoide è pari ad $I = 0.9$ A.

$$\frac{m v \sin\theta}{q \mu_0 I n} = a \qquad I = \frac{m v \sin\theta}{\mu_0 n q a} \simeq 0.45\,A$$