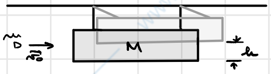
LEZIONE 3

10/03/2022

EX: << pendolo balistico >>

Abbiamo un blocco di legno di massa M appeso a due fili e da sx viene sparato un proiettile "m" con velocità v_0. Dopo l'urto il proiettile rimane incastrato nel pezzo di legno che oscillerà. (urto perfettamente anelastico)



? $\vec{v_0}$

Consideriamo cosa accade durante l'urto. Noi vorremo applicare la conservazione della quantità di moto al sistema contenente m e M.

$$\sum_i \vec{F}_{est} = \frac{d}{dt}\vec{P}_{TOT}$$

Le $\vec{F}_{est}$ che agiscono su: •M sono P_M e le tensioni, inizialmente essendo il tronco fermo le F_{EST} M = 0

↙ •m il P_m in teoria non è bilanciata da nessun'altra forza

Tuttavia l'urto è talmente intenso da poter tralasciare che le $\vec{F}_{EST} \neq 0$
(quindi approssimiamo ponendo comunque $\vec{F}_{EST} = 0$)

$$P_{TOT\,i} = P_{TOT\,f} \longrightarrow \underbrace{m v_0 + 0}_{\text{quantità di moto di } m+M \text{ iniziale}} = \underbrace{(m+M)\,v}_{\text{quantità di moto di } m+M \text{ finale}} \longrightarrow \boxed{v_0 = \frac{m+M}{m}\cdot v} \rightarrow$$

velocità che acquistano i corpi subito dopo l'urto
(M è ancora fermo nella pos. iniziale)

Posso impostare la conservazione di E poichè l'K appena acquisita dal corpo si trasforma in E potenziale

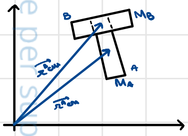
$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 + 0 = 0 + (m+M)gh \implies v = \sqrt{2gh}$$

Ora sostituiamo il valore di v nell'espressione di v_0 e troveremo la v_0 del proiettile

$$v_0 = \frac{m+M}{m}\cdot\sqrt{2gh}$$

▸ CENTRO di MASSA di un CORPO COMPOSTO:

EX: "martello"



Se noi consideriamo solo il manico il suo CdM sarebbe al centro, stessa cosa vale per il pezzo di metallo, anche se forato.
↓ in questo caso il CdM cade in un punto senza massa

possiamo scrivere il vettore somma del martello come:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\vec{r}^A_{cm}\cdot M_A + \vec{r}^B_{cm} M_B}{M_A + M_B} \quad ?$$

Ora considero il pezzo A, descrivo la sua posizione tramite un sistema di N punti materiali (cioè per un corpo discreto)

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad\qquad \vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\,dm$$

↓ espressione attraverso i mezzi continui

CdM : $\underbrace{1,2,\dots,N_0}_{A},\underbrace{N_0+1,\dots,N}_{B}$ i punti materiali fino a N_0 descrivono il pezzo Ⓐ, mentre da N_0+1 a N descrivono Ⓑ

quindi $\vec{r}^A_{cm} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N_0} m_i\vec{r}_i}{\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{M_A}} \rightarrow \vec{r}^A_{cm} = \dfrac{1}{M_A}\displaystyle\int_M \vec{r}\,dm$ e $\vec{r}^B_{cm} = \dfrac{\sum_{i=N_0+1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\underbrace{\sum_{i=N_0+1}^{N} m_i}_{M_B}} \rightarrow \vec{r}^B_{cm} = \dfrac{1}{M_B}\displaystyle\int_M \vec{r}\,dm$

quindi la posizione del CdM in generale sarà: $\vec{r}_{cm} = \dfrac{\vec{r}^A_{cm}\cdot M_A + \vec{r}^B_{cm} M_B}{M_A + M_B} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N_0} m_i\vec{r}_i + \sum_{i=N_0+1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M_A + M_B} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}_{M_A+M_B}}$

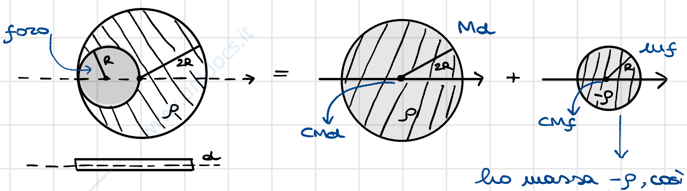
sì posso scrivere $\vec{r}_{cm} = \dfrac{\vec{r}^A_{cm}\cdot M_A + \vec{r}^B_{cm} M_B}{M_A + M_B}$

↓ posso fare la stessa cosa con ∫ e otterrò: $\vec{r}_{cm} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int_M \vec{r}\,dm$

LEZIONE 4:

14|03|2022

▷ Centro di Massa di un disco forato:



Il CdM passa lungo la metà dello spessore del disco.

In questo caso dobbiamo visualizzare l'oggetto come 2 oggetti differenti.

ho massa $-\rho$, così quando li sommo ottengo il foro, poichè a della massa tolgo altra massa

Io voglio trovare il CdM del disco con il foro.

Io conosco la posizione del CdM dei due oggetti separati, poichè noi sappiamo che lungo la retta si posiziona il CdM del disco forato, ma non conosciamo la sua posizione esatta.

Uso la def. di CdM di due corpi discreti: $X_{cm} = \dfrac{X_{cmd} \cdot M_D + X_{cmf} \cdot m_f}{\underbrace{M_D + m_f}_{M}}$

Ora basta esprimere le masse in funzione dei raggi

$M_D = \rho \pi 4 R^2 d$ e $m_f = -\rho \pi R^2 d$ $\Rightarrow X_{cm} = \dfrac{\overbrace{X_{cmD}}^{0 \to ?}(\rho \pi 4R^2 d) + X_{cmf}(-\rho \pi R^2 d)}{\rho \pi 4R^2 d - \rho \pi R^2 d} = \dfrac{\boxed{+R}\cancel{\rho}\cancel{\pi}\cancel{R^2}\cancel{d}}{\cancel{\rho}\cancel{\pi}4\cancel{R^2}\cancel{d} - \underbrace{\cancel{\rho}\cancel{\pi}\cancel{R^2}\cancel{d}}_{1}} = \dfrac{R}{3}$

posizione del cdMf
(-R) il - si elide

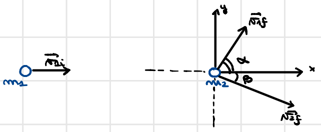
▷ URTI in 2 DIMENSIONI:

Si conserva la quantità di moto totale: $\vec{P}_i^{TOT} = \vec{P}_f^{TOT}$ eq. vettoriale

quando ho un URTO PERFETTAMENTE ELASTICO posso usare la conserv. di K: $K_i = K_f$ eq. scalare

posso scomporla nelle 3 componenti
$$\begin{cases} P_{xi}^{TOT} = P_{xf}^{TOT} \\ P_{yi}^{TOT} = P_{yf}^{TOT} \\ P_{zi}^{TOT} = P_{zf}^{TOT} \end{cases}$$

Ex: "urto di una particella contro un'altra ferma"



$\vec{v}_{1i} = 500\ m/s$ $m_1 = m_2$ $\alpha = 60°$
$\vec{v}_{2i} = 0\ m/s$

dopo l'urto avremo $\vec{v}_{1f}$

? v_{1f} ? v_{2f} e direzione (β) è diretta verso il basso poichè la quantità di moto si conserva rispetto all'asse y

$\sum \vec{F}_{EST} = 0$

Ora consideriamo la conservazione della quantità di moto

$$\begin{cases} x: \cancel{m} v_{1i} = \cancel{m} v_{1f} \cdot \cos\alpha + \cancel{m} v_{2f} \cos\beta \\ y: 0 = \cancel{m} v_{1f} \operatorname{sen}\alpha - \cancel{m} v_{2f} \operatorname{sen}\beta \\ \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} v_{1i}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} v_{1f}^2 + \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} v_{2f}^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{1i} = v_{1f}\cos\alpha + v_{2f}\cos\beta \\ 0 = v_{1f}\operatorname{sen}\alpha - v_{2f}\operatorname{sen}\beta \\ v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{2f}\cos\beta = v_{1i} - v_{1f}\cos\alpha \\ v_{2f}\operatorname{sen}\beta = v_{1f}\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

elevo al quadrato le prime due eq e poi le sommo

$$\begin{cases} v_{2f}^2\cos^2\beta = v_{1i}^2 - v_{1f}^2\cos^2\alpha \\ v_{2f}^2\operatorname{sen}^2\beta = v_{1f}^2\operatorname{sen}^2\alpha \end{cases} \rightarrow v_{2f}^2(\overbrace{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}^{1}) = (v_{1i} - v_{1f}\cos\alpha)^2 + (v_{1f}\operatorname{sen}\alpha)^2$$

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 + \underline{v_{1f}^2\cos^2\alpha} - 2v_{1i}v_{1f}\cos\alpha + \underline{v_{1f}^2\operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\alpha$$

→ riprendo l'eq. dell'energia cinetica (K) e sostituisco

$$\Rightarrow \cancel{v_{2f}^2} = v_{1f}^2 + \cancel{v_{2f}^2} + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\alpha$$

$$2v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f}\cos\alpha = 0$$

$$2v_{1f}(v_{1f} - v_{1i}\cos\alpha) = 0$$

$v_{1f} = 0$ → dobbiamo scartarla poichè vorrebbe dire che la particella 2 viaggerà lungo x (URTO FRONTALE) e la particella 1 si fermerebbe

$v_{1f} = \frac{1}{2} v_{1i}\cos\alpha = 250\ m/s$

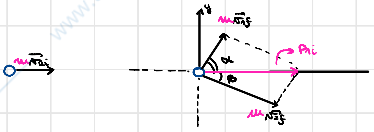
$\Rightarrow v_{2f} = \sqrt{v_{1i}^2 - v_{1f}^2} = 433\ m/s$

Ora troviamo β: $v_{2f}\operatorname{sen}\beta = v_{1f}\operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \dfrac{v_{1f}}{v_{2f}}\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow \alpha = 30°$

Se consideriamo $\alpha+\beta$ otteniamo un angolo di 90°, questo deriva dal fatto che l'urto sia elastico (energia cinetica si conserva) inoltre le 2 masse sono identitiche.

Abbiamo : $\vec{P_{1i}} = \vec{P_{1f}} + \vec{P_{2f}}$

$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2$ → avendo tutti gli oggetti la stessa massa posso rappresentare la situazione in questo modo

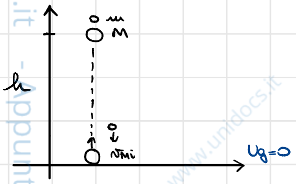


Quindi P_{1i} lo posso anche trovare tramite la regola del parallelogramma avente come lati mv_{1f} e mv_{2f} (io so che $P_{1i}=mv_{1i}$, $P_{2f}=mv_{2f}$, $P_{1f}=mv_{1f}$)

! Ogni qualvolta ho un urto elastico tra oggetti con la stessa massa su un piano, i 2 oggetti dopo l'urto si muoveranno in direzioni ⊥ tra di loro

LEZIONE 5

16/03/2022



$h = 1\,m$ $M=0{,}63\,kg$

1) ?m quando $v_{Mf}=0$

2) ?h_m max =

le palle vengono lasciate cadere insieme (no attrito aria), il primo urto è quello della palla M sul suolo

le due velocità finali quando arriveranno a terra sono le stesse

$$U_i^g + k_i = U_f^g + k_f \rightarrow \cancel{M}gh + 0 = 0 + \frac{1}{2}\cancel{M}v^2 \Rightarrow |v| = \sqrt{2gh}$$

vale sia per m che M velocità che ha la palla quando arrivano al suolo

Nel momento in cui rimbalzerà sul suolo il |v| sarà invariato, cambierà la direzione

$$v_{Mi} = \sqrt{2gh} \qquad v_{mi} = -\sqrt{2gh} \rightarrow v_{Mf} = \left(\frac{M-m}{m+M}\right)v_{Mi} + \left(\frac{2m}{m+M}\right)v_{mi}$$

$$= \left(\frac{M-m}{m+M}\right)\sqrt{2gh} - \left(\frac{2m}{m+M}\right)\sqrt{2gh}$$

$$= \frac{\sqrt{2gh}}{m+M}(M-m-2m) \Longrightarrow v_{Mf} = \frac{\sqrt{2gh}}{m+M}(M-3m)$$

Noi non siamo nella situazione ottimale per applicare la conservazione della quantità di moto ↓
posso usare questo principio solo per predire cosa accadrà nell'urto

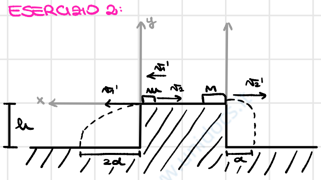
$$v_{mf} = \left(\frac{2M}{m+M}\right)v_{Mi} + \left(\frac{m-M}{m+M}\right)v_{mi}$$

$$= \frac{\sqrt{2gh}}{m+M}(2M-m+M)$$

$$= \frac{\sqrt{2gh}}{4m}(9m-m) = \frac{\sqrt{2gh}}{\cancel{4m}}\cdot\overset{2}{\cancel{8m}} = 2\sqrt{2gh} \Longrightarrow v_{mf} = 2\sqrt{2gh}$$

Considero $k_f = U_f^g \rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}\,4(\cancel{2g}h) = \cancel{mg}\,h_m^{max} \Rightarrow h_m^{max} = 4h$

ESERCIZIO 2:



non è presente attrito

$v_{Mi} = 0$ $v_{mi} = v_1$ $m = 0,20\,kg$?M

In seguito all'urto m torna indietro e cadrà a terra
M sarà spinto verso dx e cadrà

Studiamo separatamente i due corpi. Per quanto riguarda cosa succede DOPO L'URTO per il corpo M abbiamo il moto di un proiettile.

$$M \begin{cases} x = v_2' t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad m \begin{cases} x = v_1' t \\ y = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$M \begin{cases} x(t_c) = v_2 t_c = d \\ y(t_c) = h - \frac{1}{2} g t_c^2 = 0 \end{cases} \qquad m \begin{cases} x(t_c) = v_1' t_c = 2d \\ y(t_c) = h - \frac{1}{2} g t_c^2 = 0 \end{cases}$$

posso esplicitare il t_c e eguagliarlo

$$M: t_c = \frac{d}{v_2'} \qquad m: t_c = \frac{2d}{v_1'} \Longrightarrow \frac{\cancel{d}}{v_2'} = \frac{2\cancel{d}}{v_1'} \rightarrow v_1' = 2v_2'$$

→ sto considerando il modulo

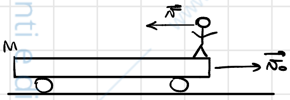
$$v_1' = -2v_2'$$

non muovo SdR unico per m e M ?

$$\begin{cases} v_1' = \frac{m-M}{m+M} v_1 \\ v_2' = \frac{2m}{m+M} v_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2v_2' = \frac{m-M}{m+M} v_1 \\ v_2' = \frac{2m}{m+M} v_1 \end{cases} \Longrightarrow -2 = \frac{m-M}{2m} \rightarrow -4m = m-M$$

$$M = 5m$$

ES 3: Su un binario c'è un carrello (M) e su c'è una persona (m). L'omino inizia a correre verso sx con velocità $\vec{v}_M$ e il carrello si muove con v_0



$P_m = 915N$ $\vec{v}_0 = 18,2\,m/s$

$P_M = 2415N$ $\vec{v} = 4,00\,m/s$

? v_0' (come varia la velocità del carrello)

Possiamo sfruttare la conservazione della quantità di moto considerando come sistema il carrello + persona poichè $\sum \vec{F}_{est} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{tot} = cost.$

Quindi $(m+M)\,v_0 = M v_0' + m(v_0' - v)$

prima che l'uomo inizi a correre

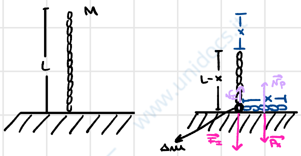
Ricaviamo le masse $M = \frac{P_M}{g} = 246\,kg$ $m = \frac{P_m}{g} = 93,4\,kg$

ora riscriviamo e esplicitiamo $(m+M)\,v_0 = (m+M)\,v_0' - mv \rightarrow v_0' = v_0 + \frac{mv}{(m+M)} = 19,3\,m/s$

LEZIONE 6

17/03/2022

EX: << catena in caduta libera >> (la catena è una distribuzione continua di massa



Per comodità la disegno distesa

? la spinta esercitata dal tavolo verso la catena in un generico istante quando la catena è caduta di un tratto x.
↓
= leggere il peso della catena se viene lasciata cadere su una bilancia

la Forza che imprimerà il tavolo alla catena sarà dovuta a 2 contributo: uno si oppone alla Forza peso della catena sul tavolo, l'altro sarà dovuto all'urto del pezzo di catena caduto

$\vec{F} = \vec{P_x} + \vec{F_I}$ e definiamo $\lambda = \frac{M}{L}$

Così definiamo $\vec{P_x} = \lambda x \vec{g} = \frac{M}{L}\vec{g}x$

Tuttavia a noi interessano le reazioni vincolari N_p e N_I, se consideriamo come tratto $\Delta m = \lambda \Delta x$ nell' urtare questa massa subirà una forza $\vec{N_I}$ dal piano che provocherà una variazione della quantità di moto.

$\Rightarrow \vec{N_I} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\vec{P_f} - \vec{P_i}}{\Delta t} = \frac{-\vec{P_i}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m \vec{v_i}}{\Delta t}$ (tempo che l'urto ha per compiersi)

$N_I = \frac{\Delta m v_i}{\Delta t}$ (v_i è determinata dall'altezza a cui è partito) → quindi avrò $\Delta m g \cdot x = \frac{1}{2}\Delta m v_i^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gx}$ e sostituisco $\Delta m = \lambda \Delta x$

$= \frac{\lambda \Delta x v_i}{\Delta t} = \frac{M v_i}{L} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$ → per un CORPO FINITO

$(\lambda = \frac{M}{L})$

Per un CORPO INFINITO: $\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \left(\frac{M}{L} v_i \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}\right) = \frac{M}{L} v_i \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{M}{L} \cdot v_i^2 = 2\frac{M}{L} \cdot gx$

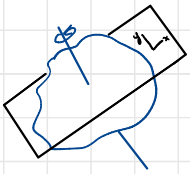
eq. differenziale

Verso l'alto avremo anche una spinta $N_p = -P_x$ e quindi la spinta totale sarà:

$\vec{N} = \vec{N_P} + \vec{N_I} \Rightarrow N = \frac{M}{L}gx + 2\frac{M}{L}gx = 3\frac{M}{L}gx$

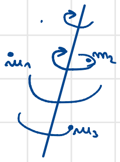
CINEMATICA ROTAZIONALE:

Prendiamo un oggetto rigido di forma irregolare (le singole parti che costituiscono il corpo mantengono sempre la loro posizione relativa). Supponiamo che l'oggetto ruoti in senso antiorario lungo un'asse di rotazione.



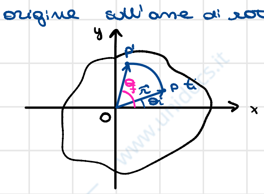
corpo rigido esteso con distribuzione continua di massa
↓
se vogliamo descrivere il suo moto rotazionale usiamo un sistema di riferimento costituito da un piano che taglia ⊥ l'asse di simmetria

Possiamo disegnare anche un corpo discreto



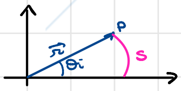
Il raggio ha una traiettoria circolare e dipenderà dalla distanza del punto dall'asse di rotazione

Chiamo i due assi che individuano il piano x, y e inserisco un sistema di riferimento (x,y) con origine sull'asse di rotazione (che passerà per l'Origine e sarà ⊥ al piano)



Ogni punto P sarà individuato dal raggio-vettore $\vec{r}$ e percorrerà una traiettoria circolare trovandosi in P'.

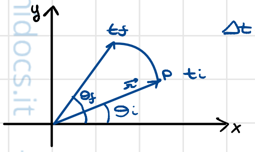
Se nell'istante ti l'oggetto si trova in P, formerà un angolo θ_i con $\vec{r}$ e l'asse delle x.
In un istante successivo formerà θ_f poiché l'oggetto è ruotato



Immaginiamo che l'oggetto sia partito dall'asse x, dopo un certo ti si trova in P. L'oggetto avrà percorso un tratto di curva s

$S = r\theta$ → in radianti

! il corpo sia RIGIDO e l'asse sia fermo !



$\Delta t = t_f - t_i$

Ora consideriamo un corpo esteso e facciamo un parallelismo tra le definizioni negli ambiti (considerando il caso monodimensionale)

TRASLAZIONALE	ROTAZIONALE
• $x(t)$ vettore posizione	• $\theta(t)$ (in rad) vettore posizione
• $\Delta x = x(t_f) - x(t_i) = x_f - x_i$	• $\Delta\theta = \theta(t_f) - \theta(t_i) = \theta_f - \theta_i$ (in rad)
• $\overline{v} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t}$ velocità media	• $\overline{\omega} = \frac{\theta_f - \theta_i}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ $[rad/s]$ velocità ANGOLARE media
• $v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ velocità istantanea	• $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)$ $[rad/s]$ velocità angolare istantanea
• $\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ acc. media	• $\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ $[rad/s^2]$ acc. angolare media
• $a = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)$ acc. istantanea	• $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right)$ $[rad/s^2)$ acc. angolare ist.

! $\overline{\omega} > 0, \overline{\alpha} > 0$ quando compiamo un moto antiorario .

Invece a ω, α viene associato un vettore con:
- MODULO: rispettivamente ω e α
- DIREZIONE: quella dell'asse di rotazione
- VERSO: dato dalla regola della mano dx
  ↓
  la mano seguirà il verso della rotazione, il pollice indica la direzione del vettore

LEZIONE 7:

21/03/2022

È possibile riproporre quanto visto per la cinematica traslazionale alla cinematica rotazionale andando semplicemente a sostituire le grandezze equivalenti

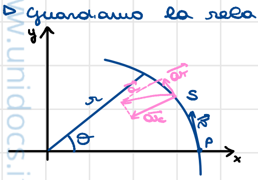
$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \quad e \quad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt}}$$

▷ Poniamo $t_i = 0$, $t_f = t$ $\quad \theta_i = \theta_0$, $\theta_f = \theta$ $\quad \omega_i = \omega_0$, $\omega_f = \omega$ e prendiamo il moto di un corpo in cui $\alpha = \text{costante}$ ‼

e otteniamo:
- $\omega = \omega_0 + \alpha t$
- $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
- $\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$

Sono tutti casi che abbiamo già visto per il moto traslazionale, basta cambiare le grandezze.

▷ Guardiamo la relazione tra la grandezza angolare che descrive l'oggetto e la velocità lineare del singolo punto.



$S = r \cdot \theta$

il vettore $\vec{v}$ sarà sempre tangente alla traiettoria

per calcolare il modulo farò la derivata della traiettoria

$$|\vec{v}| = v_T = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$

$\Rightarrow v_T = r\omega$

In generale, per un moto curvilineo, l'acc. ha 2 componenti

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

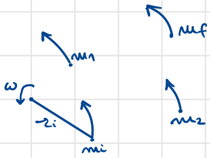
$\Rightarrow a_T = r\alpha$

$\Rightarrow a_c = r\omega^2$

↘ 4 relazioni che legano le grandezze tangenziali a quelle rotazionali

MOMENTO D'INERZIA

Prendiamo un sistema discreto di N punti materiali e supponiamo che ruoti a un asse di rotazione ⊥ al foglio con una velocità ω



Essendo un corpo rigido i punti ruoteranno mantenendo sempre la stessa distanza. Ognuno dei punti percorrerà una traiettoria circolare intorno all'asse, il cui raggio dipenderà dalla distanza del singolo punto materiale.

Calcolare l'K vuol dire calcolare la K di ogni punto materiale e sommarle

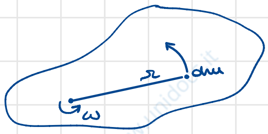
$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$ è utile sostituire $v_i = r_i \omega$ $\Rightarrow K_i = \frac{1}{2} m_i (r_i \omega)^2$

$$\Rightarrow K_{TOT} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \underset{\text{è costante}}{\boxed{\omega^2}} = \omega^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i r_i^2}_{Ⓘ}$$

Ⓘ MOMENTO di INERZIA

$$\Rightarrow K_{TOT} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Facciamo una trattazione analoga su un corpo esteso continuo

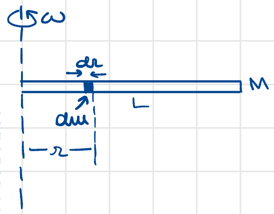


$$dk = \frac{1}{2}dm\,v^2 = \frac{1}{2}dm\,r^2\,\omega^2$$

$$\Rightarrow k_{TOT} = \int_M \frac{1}{2}r^2\omega^2\,dm = \frac{1}{2}\omega^2\underbrace{\int_M r^2\,dm}_{I}$$

$$\Rightarrow \boxed{k_{TOT} = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

EX: Consideriamo una bacchetta molto sottile di lunghezza L, che può ruotare attorno ad un asse di simmetria posto all'estremità



Noi vogliamo sapere quanto vale il momento d'inerzia della bacchetta. (Spessore è trascurabile)

$$I = \int_M r^2\,dm$$

la bacchetta ha una distribuzione di massa lineare e costante:

$$\lambda = \frac{M}{L} \rightarrow dm = \lambda dr$$

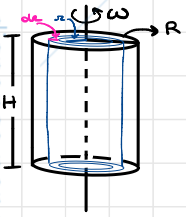
$$\Rightarrow I = \int_0^L r^2\lambda\,\underline{dr} = \lambda\int_0^L r^2 dr = \lambda\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \lambda\left(\frac{L^3}{3} - \frac{0}{3}\right) = \lambda\frac{L^3}{3} = \frac{M}{\cancel{L}}\frac{L^{\cancel{3}2}}{3} = M\frac{L^2}{3}$$

passo da un integrale di massa a uno di posizione

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{3}ML^2}$$

dimensionalmente I è sempre uguale ad una massa per una lunghezza²

EX: << I di un cilindro che ruota attorno al proprio asse >>



(oggetto deve essere simmetrico)

Dobbiamo scegliere bene la parte da considerare come massa infinitesima

↓

tubo di raggio r e spessore dr, di densità uniforme ρ

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 H} \longrightarrow dm = \rho dV = \rho H 2\pi r\,dr$$

$$\Rightarrow I = \int_0^R r^2\rho H 2\pi r\,\underline{dr} = 2\pi\rho H\int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho H\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = 2\pi\rho H\left(\frac{R^4}{\cancel{4}_2} - 0\right) = \frac{1}{2}R^4\pi\rho H$$

Ora sostituisco il valore di ρ nell'espressione di I: $I = \frac{M}{\cancel{\pi R^2 H}}\cdot\cancel{\pi H}\cdot\frac{R^{\cancel{4}2}}{2} = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}MR^2}$

!! Guardare tabella momenti d'inerzia degli oggetti dal libro e aggiungere al formulario