1. <u>Moti relativi</u>
   1.1. **Posizione di un punto**: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{r}'$, dove O è il centro del sistema di riferimento fisso, r è il raggio vettore che indica la posizione di P, O' è il centro del sistema di riferimento mobile con raggio vettore r'
   1.2. **Sistema mobile in moto traslatorio**: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_t$ $\quad\quad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_t$, dove $\boldsymbol{v}_t$ è la velocità di trascinamento, $\boldsymbol{a}_t$ è l'accelerazione di trascinamento, $\boldsymbol{v}'$ è la velocità relativa al sistema mobile e $\boldsymbol{a}'$ è l'accelerazione relativa al sistema mobile
   1.3. **Sistema mobile in moto rotatorio**: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'$ $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_c, \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'), \boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$, dove $\boldsymbol{v}_t$ è la velocità di trascinamento, $\boldsymbol{a}_t$ è l'accelerazione di trascinamento (centripeta), $\boldsymbol{v}'$ è la velocità relativa al sistema mobile, $\boldsymbol{a}'$ è l'accelerazione relativa al sistema mobile, $\boldsymbol{a}_c$ è l'accelerazione di Coriolis
   1.4. **Posizione relativa tra due punti**: $P_1P_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, dove la posizione di P_1 e P_2 sono individuate rispetto ad O dai raggi vettori r_1 e r_2
   1.5. **Velocità relativa tra due punti**: $\boldsymbol{v}_{1,2} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ velocità di P_2 rispetto a P_1
   1.6. **Accelerazione relativa tra due punti**: $\boldsymbol{a}_{1,2} = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$ accelerazione di P_2 rispetto a P_1
2. <u>Momento della forza</u>
   2.1. $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ $\quad\quad [Nm]$
3. <u>Momento angolare</u>
   3.1. È il momento del vettore quantità di moto
   3.2. $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ $\quad\quad \left[\frac{kg \cdot m^2}{s}\right]$
   3.3. Teorema del momento angolare $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{a} = 0 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}$
   3.4. Teorema del momento dell'impulso $\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{M}\, dt = \int_{t_0}^{t} (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) dt = \boldsymbol{r} \times \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}\, dt = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J} = \Delta \boldsymbol{L}$
4. <u>Sistemi di punti materiali</u>
   4.1. **Raggio vettore del centro di massa**: $\boldsymbol{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_i m_i}$
   4.2. **Velocità del centro di massa**: $\boldsymbol{v}_{CM} = \frac{d\boldsymbol{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\boldsymbol{P}}{m}$
   4.3. **Moto del centro di massa**: $\boldsymbol{F}^{(E)} = m\boldsymbol{a}_{CM} = m\frac{d\boldsymbol{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$ $\quad\quad \boldsymbol{F}^{(I)} = 0$
   4.4. **Teorema del momento angolare**: $\boldsymbol{M}^{(E)} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}$
   4.5. **Quantità di moto del sistema:** $\boldsymbol{P}' = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i{}' = 0$
   4.6. **Momento angolare del sistema**: $\boldsymbol{M}'^{(E)} = \frac{d\boldsymbol{L}'}{dt}$

4.7. **Primo teorema di Konig per il momento angolare**: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM} + \boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L}_{CM} + \boldsymbol{L}'$

4.8. **Secondo teorema di Konig**: $E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + E_k' = E_{k,CM} + E_k'$

5. **Corpo rigido**

5.1. **Moto di traslazione**:

$v = v_{CM}$

$E_k = \frac{1}{2}mv_{CM}^2$

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM}$

5.2. **Moto di rotazione**: rispetto a un asse fisso; le velocità in ogni punto sono diverse, mentre è uguale la velocità angolare

$I_z = \int_V R^2 \rho dV$

$L_z = I_z\omega$

$E_k = \frac{1}{2}I_z\omega^2$

$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{L}}{dt}, I_z\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I_z\boldsymbol{\alpha}$ solo se L è parallelo a ω

5.3. **Teorema di Huygens-Steiner e Konig**:

$I_Z = I_c + md^2$

$$E_k = \frac{1}{2}I_c\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2$$

6. **Urti**

6.1. **Quantità di moto in assenza di forze esterne**: si conserva

$\boldsymbol{P}_{in} = \boldsymbol{P}_{fin}$

$(m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_{CM} = m_1\boldsymbol{v}_{1,in} + m_2\boldsymbol{v}_{2,in} = m_1\boldsymbol{v}_{1,fin} + m_2\boldsymbol{v}_{2,fin}$

Cambiano le singole quantità di moto:

$\boldsymbol{P}_1 = m_1\boldsymbol{v}_{1,fin} - m_1\boldsymbol{v}_{1,in} = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_{2,1}dt$

$$\boldsymbol{P}_2 = m_2\boldsymbol{v}_{2,fin} - m_2\boldsymbol{v}_{2,in} = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_{1,2}dt$$

6.2. **Energia cinetica**: $\Delta E_m = \Delta E_k$ perché $\Delta E_p = 0$; a priori non si conserva

$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 + E_k'$ $\qquad$ $E_k' = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$

L'energia cinetica del centro di massa non varia se $\boldsymbol{P}_{in} = \boldsymbol{P}_{fin}$; quella che varia è E_k'

6.3. **Urto elastico**: si conservano quantità di moto ed energia cinetica

$\boldsymbol{P}_{in} = \boldsymbol{P}_{fin}$ $\qquad$ $E_{k,in} = E_{k,fin}$

$$\begin{cases} m_1\boldsymbol{v}_{1,in} + m_2\boldsymbol{v}_{2,in} = m_1\boldsymbol{v}_{1,fin} + m_2\boldsymbol{v}_{2,fin} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_{CM} \\ \frac{1}{2}m_1v_{1,in}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,in}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,fin}^2 \end{cases}$$

6.4. **Urto completamente anelastico**: i due punti restano attaccati durante l'urto formando un unico punto di massa $m_1 + m_2$

$$m_1\boldsymbol{v}_{1,in} + m_2\boldsymbol{v}_{2,in} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_{1,2} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{v}_{CM}$$

$$\boldsymbol{P}_1 = m_1\boldsymbol{v}_{CM} - m_1\boldsymbol{v}_{1,in}$$

$$\boldsymbol{P}_2 = m_2\boldsymbol{v}_{CM} - m_2\boldsymbol{v}_{2,in}$$

$$\boldsymbol{P}_1 = -\boldsymbol{P}_2$$

$$E_{k,in} = \frac{1}{2}m_1v_{1,in}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,in}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 + E'_{k,in}$$

$$E_{k,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 < E_{k,in}$$

6.5. **Urto anelastico**: si conserva la quantità di moto ma non l'energia cinetica

Coefficiente di restituzione: $e = -\frac{p_{1,fin}}{p_{1,in}} = -\frac{p_{2,fin}}{p_{2,in}} = -\frac{v_{1,fin}}{v_{1,in}} = -\frac{v_{2,fin}}{v_{2,in}}$

$$E_{k,in} = \frac{1}{2}m_1v_{1,in}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,in}^2$$

$$E_{k,fin} = \frac{1}{2}m_1v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2,fin}^2 = e^2E_{k,in}$$

$$\Delta E_k = \frac{E_{k,fin} - E_{k,in}}{E_{k,in}} = e^2 - 1$$