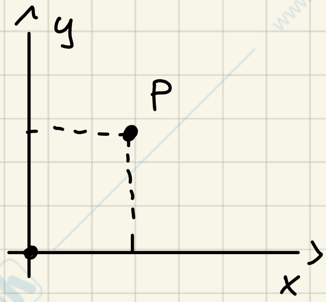
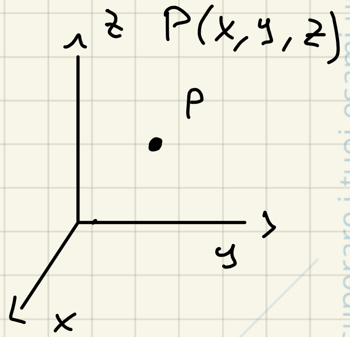
CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI

COORDINATE LAGRANGIANE E GRADO DI LIBERTÁ (CENNI)

Il punto nel piano puó essere individuato univocamente attraverso le proprie componenti cartesiane, per tanto le componenti cartesiane vengono dette coordinate lagrangiane mentre il grado di libertà del punto materiale é 2.



Se ad esempio consideriamo un punto nello spazio le componenti (x, y, z) costituiscono una terna di coordinate lagrangiane e diremo che il grado di libertá del punto é 3



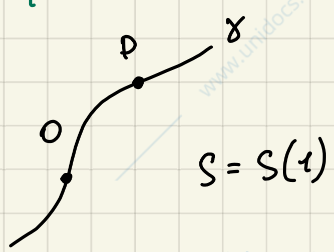
Definizione: Si intendono per coordinate lagrangiane i parametri indipendenti tra di loro capaci di descrivere univocamente il moto del sistema.

Si intende per grado di libertá il numero delle coordinate langrangiane

OSSERVAZIONE

Considerato un punto nel piano sappiamo che le coordinate cartesiane sono in corrispondenza biunivoca con le coordinate polari, infatti le coordinate lagrangiane possono essere espresse mediante piú rappresentazioni quindi non sono univoche.

Esempio Sia γ una curva e P un punto che si muove su di essa



Il grado di libertá é pari ad 1 dato che possiamo individuare la posizione di P possiamo servirci dell'ascissa curvilinea

Moti Rigidi

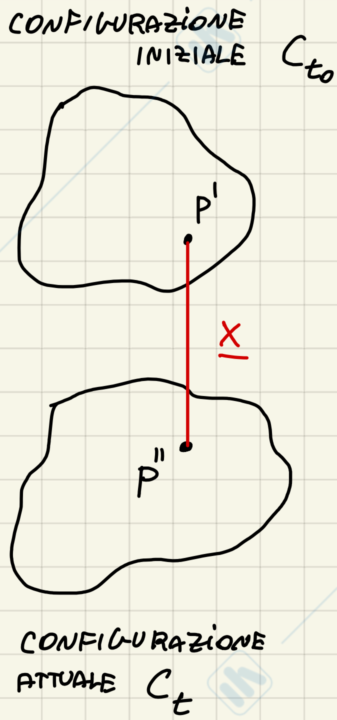
Configurazione

Si intende per configurazione la regione dello spazio occupata dal corpo in un certo istante.
La configurazione relativa all'istante iniziale è detta configurazione di riferimento e generalmente si identifica con C_{t_0} inoltre quella relativa al generico istante t è detta configurazione iniziale C_t

Configurazione iniziale —> C_{t_0} —> Riferita al tempo t_0
Configurazione attuale —> C_t —> Riferita al tempo t

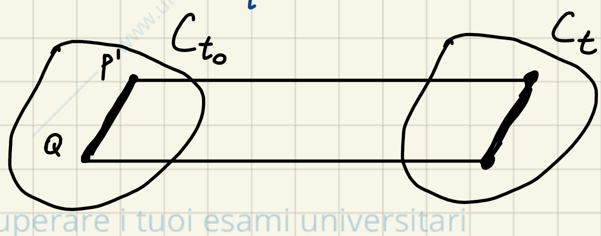
Spostamento Finito

Consideriamo una configurazione iniziale e un punto P che nella configurazione iniziale occupi P' e che in quella attuale occupi P''.
Il vettore $\underline{x} = P'' - P'$ definisce lo SPOSTAMENTO FINITO del punto materiale.
Inoltre lo spostamento di tutto il sistema C dalla configurazione iniziale alla configurazione attuale definisce l'insieme degli spostamenti di tutti i punti del sistema (L'insieme degli spostamenti di tutti i punti)



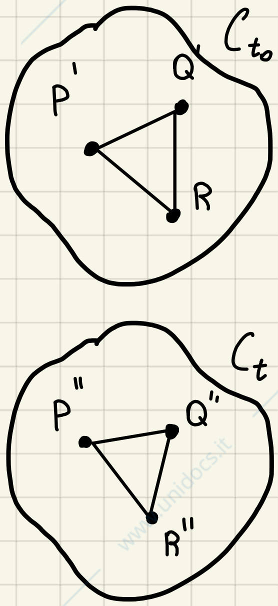
Definizione — Lo spostamento del sistema C si definisce rigido se si conservano le distanze di tutti i punti del sistema durante lo spostamento

Durante lo spostamento le distanze devono rimanere inalterate



Definizione — Un corpo si definisce rigido se può compiere unicamente spostamenti rigidi.

Definizione — Un moto si definisce rigido se nell'intervallo di tempo nel quale avviene tale moto si mantengono invariate le distanze di tutti i punti del sistema. Ciò comporta che si mantengono inalterate sia le distanze che gli angoli



La configurazione può anche ruotare basta che si mantengano inalterate le distanze e gli angoli dei punti stessi.

OSS: Il concetto e la condizione di rigidità in meccanica classica assume significato assoluto in quanto la misura della distanza è indipendente dall'osservatore è isotropa e omogenea

* Se un corpo è rigido per un osservatore allora è rigido per tutti gli osservatori

Propietá Dei Moti Rigidi

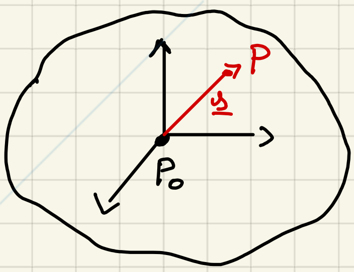
Esistenza Della Terna Solidale

Le condizioni di rigidità implicano che se e solo se un moto é rigido esiste una terna rispetto alla quale il corpo é in quiete ossia esiste una terna rispetto alla quale le coordinate dei punti del sistema rimangono costanti durante tutto il moto

Cenni Di Dimostrazione

Hp: Il moto é rigido => Le distanze tra tutti i punti del sistema e gli angoli tra di loro si mantengono costanti durante tutto il moto.

Si possono quindi fissare 4 punti in modo tale da individuare una terna, durante tutto il moto i punti del sistema rispetto alla terna individuata manterrano orientamento costante cosiché rispetto a tale terna i punti del sistema sono in quiete



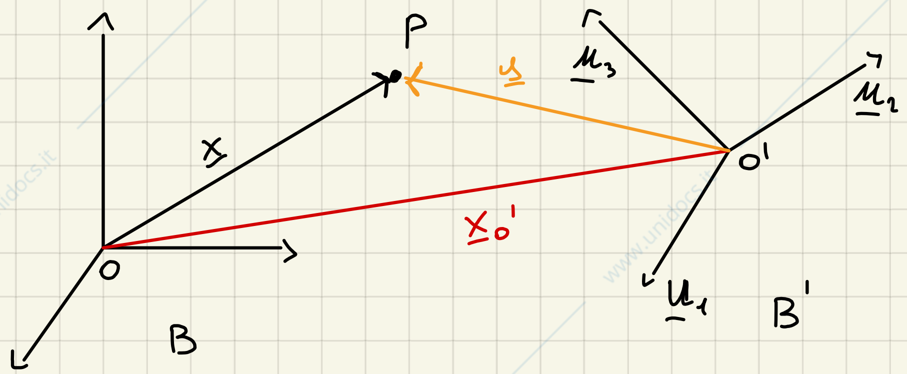
P_0, P_1, P_2, P_3 appartenenti al sistema

Cosiché la terna solidale può individuare tutti i punti del sistema tramite vettori costanti che verranno dette ETICHETTE

EQUAZIONE GENERALE DEI MOTI RIGIDI

Consideriamo un moto rigido scegliamo un osservatore fisso e poi scegliamo una terna solidale (terna mobile), Scelto u punto P che si muove di moto rigido, andiamo a considerare le leggi della meccanica classica riguardo tempo e distanze

$\underline{y}$ = Etichetta



$P - O = \underline{x}$ $\qquad P - O = \underline{x}$ $\qquad P - O = (P - O') + (O' - O)$

FORMULA DEL CAMBIAMENTO DI BASE

$$\underline{x} = x_{o'} + A^T \underline{y}$$

$$(1) \quad \boxed{\underline{x}(t) = x_{o'}(t) + A^T(t)\ \underline{y}}$$

INTRODUCENDO IL TEMPO

$\underline{y}$ È L'ETICHETTA ED È COSTANTE (non dipende dal tempo) PERCHÉ $T_{o'} \equiv (O', u_1, u_2, u_3)$ È UNA TERNA SOLIDALE

EQUAZIONE GENERALE DEI MOTI RIGIDI

L'equazione (1) esplicita la posizioni del punto rispetto ad O

Dalla (1) si evidenziano il numero dei parametri indipendenti mediante i quali si può determinare il moto del sistema.
Per individuare tali parametri:

1) Posizione dell'origine della terna solidale rispetto alla terna solidale (x_o') si determina con tre parametri

"Individuando il punto O' rispetto alla terna O"

PARAMETRI DA USARE

$$(1) \quad \underline{x}(t) = \underset{(3)}{\underline{x}_{o'}} + \underset{(3)}{A^T(t)}\, \underline{y}$$

Dalla (1) si evidenziano il numero dei parametri indipendenti mediante i quali si può determinare il moto del sistema.

Per individuare tali parametri:

1) Posizione dell'origine della terna solidale rispetto alla terna solidale (x_o') si determina con tre parametri "Individuando il punto O' rispetto alla terna O"

2) Determinare i parametri indipendenti presenti nella matrice A. La matrice A presenta 9 parametri tuttavia essendo una matrice ortonormale deve soddisfare le 6 equazioni di ortonormalità, pertanto solo 3 parametri restano liberi. Possiamo quindi dire che la matrice dipende solo da 3 parametri indipendenti

3) Ricordiamo che il vettore $\underline{y}$ è l'etichetta pertanto rimane costante nel tempo e quindi non crea problemi

Possiamo quindi dire che il grado di libertà in un moto rigido libero nello spazio è 6.

Formule del Poison

Indicati con $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$ i versori della terna solidale è possibile dimostrare che in ogni moto rigido esiste una ed una sola applicazione vettoriale che indicheremo con $\underline{\omega} = \omega(t)$ e chiameremo Velocità angolare per la quale si ha:

INDIPENTE DALLA TERNA SOLIDALE

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{u}_1}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{u}_1 \\[2ex] \dfrac{d\underline{u}_2}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{u}_2 \\[2ex] \dfrac{d\underline{u}_3}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{u}_3 \end{cases}$$

OSS:

(1) $\underline{\omega} = \underline{\omega}(P, t)$

Nei sistemi deformabili dipenderà sia dal tempo che dalla posizione.

Fisicamente $\underline{\omega}$ mi dice come sta ruotando la terna solidale
$\underline{\omega}$ rappresenta la rapidità di rotazione della terna solidale rispetto alla terna fissa, se la terna trasla ma non ruota $\underline{\omega}=0$

Le formule del Poisson indicano che il vettore $\underline{\omega}$ rappresenta la rapidità di rotazione della terna solidale rispetto alla terna fissa.

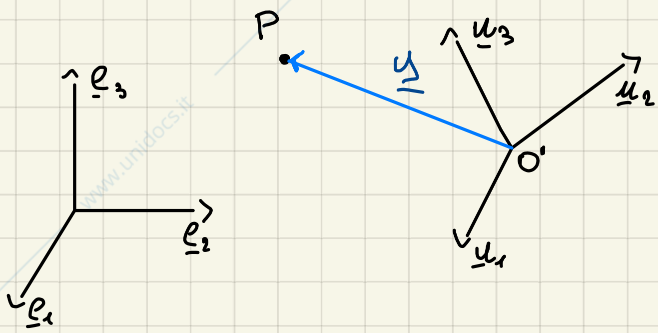
Formula Fondamentale della Cinematica Rigida

Qualunque sia la coppia di punti del sistema PQ si ha che

$$\forall (P, Q) \qquad \vec{V}_P = V_Q + \omega \times (P - O')$$

VELOCITÀ

P è un punto del sistema che si muove di moto rigido



Dimostrazione

ETICHETTA

$$P - O' = y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 \qquad (y_1, y_2, y_3) \text{ Costanti}$$

DERIVANDO

$$V_P - V'_O = y_1 \frac{du_1}{dt} + y_2 \frac{du_2}{dt} + y_3 \frac{du_3}{dt}$$

FORMULE DEL POISON

$$V_P - V'_O = y_1 (\underline{\omega} \times \underline{u}_1) + y_2 (\underline{\omega} \times \underline{u}_2) + y_3 (\underline{\omega} \times \underline{u}_3)$$

$$V_P - V'_O = \underline{\omega} \times y_1 \underline{u}_1 + \underline{\omega} \times y_2 \underline{u}_2 + \underline{\omega} \times y_3 \underline{u}_3$$

$$V_P - V'_O = \omega \times \underbrace{(y_1 \underline{u}_2 + y_2 \underline{u}_2 + y_3 \underline{u}_3)}_{P-O} \Rightarrow V_P = V_{O'} + \omega \times (P - O') \quad ■$$

In maniera analoga scelto un' altro punto arbitrario Q é possibile dimostrare in maniera analoga $\longrightarrow Q \rightarrow \underline{V}_Q - V_{O'} = \underline{\omega} \times (Q - O')$

Anche Q é un punto che si muove di moto rigido

Sottraendo membro a membro

$$V_P - V_{O'} = \omega \times (P - O')$$
$$V_Q - V_{O'} = \omega \times (Q - O')$$

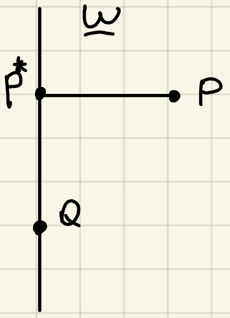
FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA RIGIDA

$$V_P - V_Q = \omega \times (P - O' - Q + O') \Rightarrow \boxed{V_P - V_Q = \omega \times (P - Q)} \quad (2)$$

OSS: Una volta fissata la funzione $\omega = \omega(t)$ ed individuata la velocitá di un punto del sistema ad esempio $\underline{V}_q$ dalla (2) si possono determinare le velocita di tutti i punti del sistema, ecco perché tale formula é detta formula fondamentale della cinematica rigida

Campo delle accelerazioni dei moti rigidi

Considerata la retta passante per il punto Q generico e parallela ad $\underline{\omega}$ sia P^* la proiezione del generico punto P su tale retta



Si dimostra che

$$a_P = a_Q + \omega \times (P-Q) - \omega^2 (P-P^*)$$

Dimostrazione

Consideriamo $V_P = V_Q + \omega(P-Q)$

$V_P - V_Q = \omega \times (P-Q)$

DERIVANDO

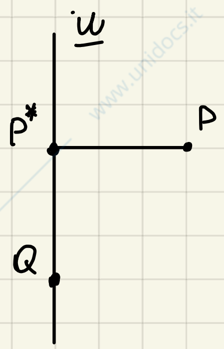
$$a_P = a_q + \dot{\underline{\omega}} \times (P-Q) + \underline{\omega} \times (\underline{V}_P - \underline{V}_Q)$$

$$a_P = a_q + \dot{\underline{\omega}} \times (P-Q) + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (P-Q))$$

Valutiamo $\underline{\omega} \times (P-Q)$

Consideriamo la retta passante per Q e parallela al vettore $\underline{\omega}$ poi consideriamo la proiezione di P su tale retta

Dato $\underline{\omega}$ e (P^*-Q) sono //



$$\begin{cases} \underline{\omega} \times (P-Q) = \underline{\omega} \times (P-P^*) + \cancel{\underline{\omega} \times (P^*-Q)} \\ P-Q = (P-P^*) + (P^*-Q) \end{cases}$$

Valutiamo $\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times (P-Q)) = *$

$(\underline{u} \times \underline{v}) \times \underline{w} = (\underline{w} \cdot \underline{u})\underline{v} - (\underline{w} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{u}$ --> Doppio prodotto vettoriale

$$\underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (P-Q)] = \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (P-P^*)]$$

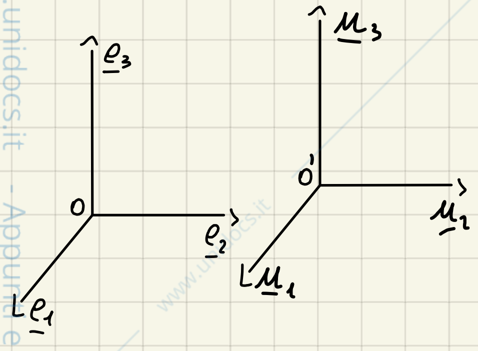
$$= -[\underline{\omega} \times (P-P^*)] \times \omega \overset{*}{=} -\omega^2 (P-P^*) + [\omega \cdot \cancel{(P-P^*)}]\underline{\omega}$$

NULLA PERCHÉ I DUE VETTORI SONO ORTOGONALI

(PRODOTTO SCALARE)

MOTI RIGIDI TRASLATORI

Definizione — Un moto rigido si definisce traslatorio quando esiste una terna solidale che mantiene orientamento invariabile durante tutto il moto.



Consideriamo una terna fissa e consideriamo la terna solidale.
Non si lede di generalitá se si considera la terna solidale con gli assi paralleli e concordi alla terna fissa

Voglio individuare le equazioni finite del moto

$$X = \underline{X}_{O'} + A^T \underline{y}$$

MATRICE DEI COSENI DIRETTORI
T → trasposta

$x = (x_1, x_2, x_3)$
$x_{O'} = (x_O^1, x_O^2, x_O^3)$
$y = (y^1, y^2, y^3)$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \hat{u_1 e_1} & \cos \hat{u_1 e_2} & \cos \hat{u_1 e_3} \\ \cos \hat{u_2 e_1} & \cos \hat{u_2 e_2} & \cos \hat{u_2 e_3} \\ \cos \hat{u_3 e_1} & \cos \hat{u_3 e_2} & \cos \hat{u_3 e_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_O^1 \\ x_O^2 \\ x_O^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO RIGA-COLONNA

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T$$

NB: Anche se ci fossero stati angoli diversi, nella matrice avremmo ottenuto costanti diverse ma pursempre costanti

Ottengo quindi le 3 equazioni

$$\begin{cases} x_1 = x_O^1 + y^1 \\ x_2 = x_O^2 + y^2 \\ x_3 = x_O^3 + y^3 \end{cases}$$

ETICHETTE quindi non variano nel tempo

Sono i 3 parametri legati alle coordinate dell'origine della terna solidale

QUESTE SONO LE EQUAZIONI SCALARI FINITE DEL MOTO

Valutiamo i GRADI DI LIBERTÁ di questo tipo di moto

I parametri indipendenti mediante i quali si individuano i moti rigidi traslatori sono 3 per tanto il grado di libertá dei MOTI RIGIDI TRASLATORI é 3

PROPIETÁ CARATTERISTICA

- Moto rigido traslatorio $\iff \underline{\omega} = 0$ — VELOCITÁ ANGOLARE

Dimostrazione — Se il moto rigido é traslatorio vuol dire che i versori della terna solidale rimangono costanti durante tutto il moto

$$\frac{d\underline{u}_1}{dt} = 0 \,, \quad \frac{d\underline{u}_2}{dt} = 0 \,, \quad \frac{d\underline{u}_3}{dt} = 0 \quad \overset{\text{DALLE FORMULE DEL POISON}}{\iff} \quad \begin{cases} \underline{\omega} \times \underline{u}_1 = 0 \\ \omega \times \underline{u}_2 = 0 \\ \omega \times \underline{u}_3 = 0 \end{cases} \iff \underline{\omega} = 0$$

ESSENDO POI u_1, u_2, u_3 3 vettori $\perp$

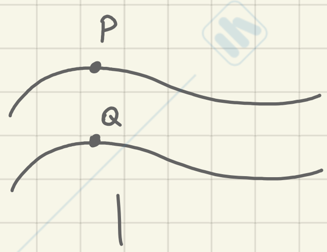
- Il moto rigido traslatorio é l'unico moto nel quale tutti i punti si muovono con la stessa velocitá e la stessa accelerazione e quindi descrivono traiettorie sovrapponibili.

Questa caratteristica permette di dire che nei MOTO RIGIDO TRASLATORIO si puó parlare di velocitá del sistema e accelerazione del sistema.

Dimostrazione — Andiamo a valutare i campi delle accelerazioni e velocitá

$$\begin{cases} v_P = v_Q + \omega \times (P-Q) \\ a_P = a_Q + \dot{\omega} \times (P-Q) - \omega^2 \times (P-P^*) \\ \omega = 0 \quad \text{-> aggiungiamo questa condizione} \end{cases} \implies \begin{matrix} v_P = v_Q & \forall\,(P,Q) \\ a_P = a_Q & \forall\,(P,Q) \end{matrix}$$

$\Downarrow$

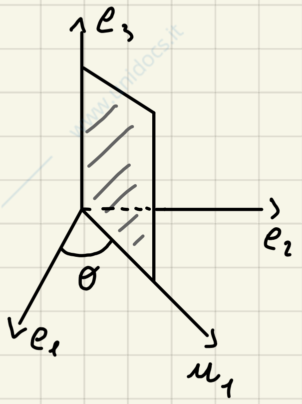


La velocitá comune a tutti i punti si indica con $\tilde{\tau}$ e viene detta VELOCITÁ DI TRASLAZIONE

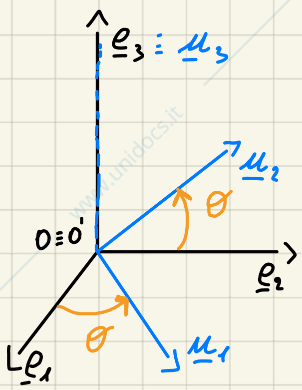
FISICAMENTE LE TRAIETTORIE DEI PUNTI DEL SISTEMA SONO SOVRAPPONIBILI

Quando $\tilde{\tau}$ = Costante il moto traslatorio si dice uniforme e si dimostra che le traiettorie sono necessariamente rettilinei

Moti Rigidi Rotatori (Porta)



Definizione — Un moto rigido si definisce rotatorio se esiste un'asse dello spazio solidale che si mantiene fisso durante tutto il moto



Abbiamo preso una terna fissa, un asse r FISSO e a partire da tale asse abbiamo costruito la terna solidale e poi abbiamo fatto coincidere le origini delle due terne

Indichiamo con θ l'anomalia del piano mobile rispetto al piano fisso valutata positivamente in senso levogiro rispetto all'osservatore $\underline{e_3}$.

Proviamo a scrivere le equazioni finite del moto partendo da

$$\underline{x} = X_{O'} + A^T \underline{y}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos \hat{u_1 e_1} & \cos \hat{u_1 e_2} & \cos \hat{u_1 e_3} \\ \cos \hat{u_2 e_1} & \cos \hat{u_2 e_2} & \cos \hat{u_2 e_3} \\ \cos \hat{u_3 e_1} & \cos \hat{u_3 e_2} & \cos \hat{u_3 e_3} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ottengo

$$\begin{cases} \underline{x_1} = y^1 \cos\theta - y^2 \sin\theta \\ \underline{x_2} = y^1 \sin\theta + y^2 \cos\theta \\ x_3 = y^3 \end{cases} \longrightarrow$$

GRADI DI LIBERTÀ

Dato che le equazioni dipendono da un unico parametro il grado di libertà del sistema é 1

$\theta = \theta(t)$ $\quad n = 1 \rightarrow$ Unica Coordinata lagrangiana

CARATTERIZZAZIONE DEL VETTORE $\omega = \omega(t)$

$\omega = \dot{\theta}\, \underline{e}_3$ ↗ DIREZIONE DELLA RETTA INTORNO AL QUALE STA RUOTANDO IL SISTEMA

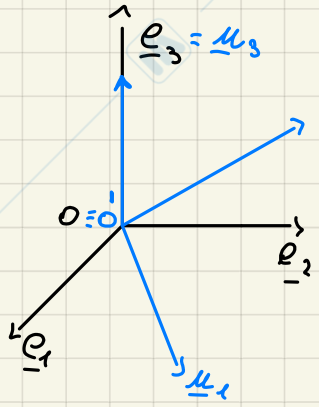
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione

Osserviamo che: $\underline{u}_1 = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$

$\underline{u}_2 = (-\sin\theta,\ \cos\theta,\ 0)$

$\underline{u}_3 = (0,\ 0,\ 1)$



Deriviamo rispetto al tempo: $\dot{\underline{u}}_1 = \dfrac{d\underline{u}_1}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta, 0)$

DIRETTAMENTE IN COMPONENTI

$$= \frac{d\underline{u}_1}{dt} = \dot{\theta}\, \underline{u}_2$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{u}_2}{dt} = \dot{\theta}\, \underline{u}_2 \\ \dfrac{d\underline{u}_2}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{u}_1 \end{cases}$$

PER POISON

$\Rightarrow \underline{\omega} \times \underline{u}_1 = \dot{\theta}\, \underline{u}_2 \Rightarrow \underline{\omega} \times \underline{u}_1 = \dot{\theta}\, \underline{u}_3 \times \underline{u}_1$

$\underline{u}_2 = \underline{u}_3 \times \underline{u}_1$

DATO CHE LA TERNA $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ È UNA TERNA LEVOGIRA

$\Downarrow$

$(\underline{\omega} - \dot{\theta}\, \underline{u}_3) \times \underline{u}_1 = 0$

$\Downarrow$

$\boxed{\omega = \dot{\theta}\, \underline{u}_3} \Rightarrow \boxed{\omega = \dot{\theta}\, \underline{e}_3}$

CARATTERIZZAZIONE CAMPO DELLE VELOCITÀ

$\underline{V}_P = \underline{V}_Q + \underline{\omega} \times (P - Q)$ → CAMPO VELOCITÀ

Nel caso in cui scelgo un punto P qualunque del sistema, poi fisso un punto A che appartiene all'asse fisso intorno al quale ruota il sistema

P A ∈ asse fisso ...

$V_A = 0$

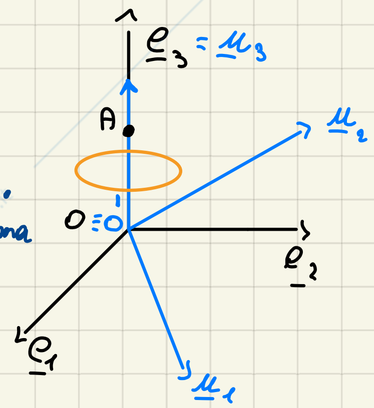
DATO CHE APPARTIENE ALL'ASSE FISSO

$$\underline{V}_P = \underline{V}_A + \underline{\omega} \times (P - A)$$

QUESTE SONO LE DUE CONDIZIONI

$$\begin{cases} \underline{V}_P = \underline{\omega} \times (P - A) \quad A \in \text{asse} \\ \underline{\omega} = \dot{\theta}\, \underline{u}_3 \end{cases}$$

N.B. È possibile dim. che tutti i punti del sistema descrivono traiettorie circolari intorno all'asse fisso



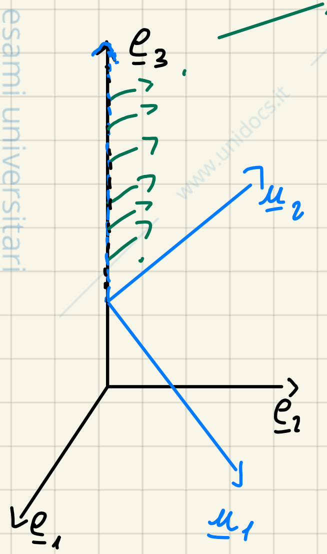
Classe dei moti rototraslatori

In generale un moto rigido é somma di un moto rotatorio e un moto traslatorio. In generale un moto si definisce **moto rototraslatorio** se esiste una retta dello spazio solidale che mantiene orientamento cioé direzione invariabile durante tutto il moto.

É possibile dimostrare che tutti i punti di quest'asse hanno la stessa velocita che in generale denominiamo con $\underline{\tilde{\tau}}$ ed é detta **velocitá di traslazione**

- Il valore di questa velocita rappresenta il minimo del campo delle velocitá di tutti i punti del sistema
- $\underline{\tilde{\tau}}$ assume direzione qualunque istante per istante

OSS: Il moto rotatorio e il moto traslatorio sono particolari moti rototraslatori



I punti dell'asse hanno tutti la stessa velocita $\underline{\tilde{\tau}}$ che vale istante per istante e ci da la direzione della traslazione

$$A \in \text{ASSE} \rightarrow V_A = \underline{\tilde{\tau}}$$

$$\underline{V}_P = \underbrace{\underline{\tilde{\tau}}}_{\text{VELOCITÁ DI TRASLAZIONE}} + \underbrace{\underline{\omega} \times (P-A)}_{\text{VELOCITÁ DI ROTAZIONE}} \qquad A \in \text{ASSE}$$

In particolare

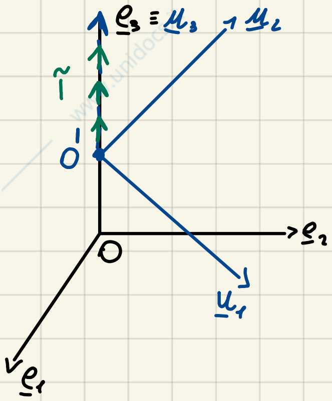
$$\tilde{\tau} = 0 \Rightarrow \underline{V}_P = \underline{\omega} \times (P-A) \rightarrow \text{MOTO ROTATORIO}$$

$$\underline{\omega} \times (P-A) = 0 \Rightarrow \underline{V}_P = \tilde{\tau} \rightarrow \text{MOTO TRASLATORIO}$$

NB: Si puó dimostrare che la velocitá angolare $\underline{\omega}$ é sempre parallela alla direzione dell'asse

$$\underline{\omega} = \dot{\theta}\, u_3(t)$$

Moto Rigido Elicoidale (Moto del Cacciavite)

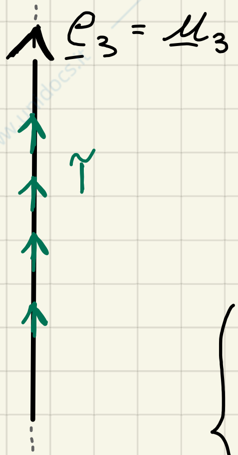


Un moto rigido si definisce elicoidale quando esiste una retta nello spazio solidale che scorre su una retta fissa con velocità di traslazione $\tilde{I}$ parallela ad $\underline{\omega}$

$\exists\ \lambda_0$ costante : $\boxed{\tilde{\underline{I}} = \lambda_0\, \underline{\omega}} \Rightarrow \dfrac{|\tilde{\underline{I}}|}{|\underline{\omega}|} = \lambda_0$

CONDIZIONE CHE IDENTIFICA IL MOTO ELICOIDALE

Può salire e scendere ma non può muoversi da quell'asse



$\tilde{\underline{I}} \parallel \underline{\omega}$

EQUAZIONI FINITE

$$\begin{cases} x_1 = y^1 \cos\theta - y^2 \sin\theta \\ x_2 = y^1 \sin\theta + y^2 \cos\theta \\ x_3 = x^3_{o'} + y^3 \end{cases}$$

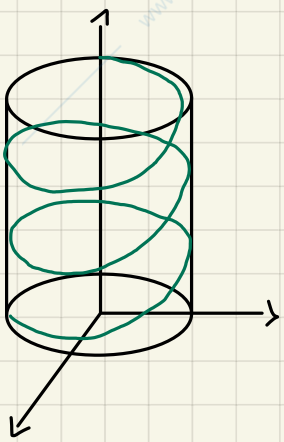
ANOMALIA

ROTAZIONE

TRASLAZIONE

GRADO DI LIBERTÀ $n = 2$

$(\theta,\ x^3_{o'})$



è possibile dimostrare che le traiettorie appartengono ad eliche di cilindro rotondo intorno all'asse

PASSO DELL'ELICA : $p = 2\pi \dfrac{|\tilde{\underline{I}}|}{|\underline{\omega}|}$

QUEST RAPPORTO RIMAN SEMPRE COSTANTE (λ_0) NEI MOTI ELICOIDALI

Atto di moto

Si definisce atto di moto il campo delle velocità di tutti i punti del sistema in un istante prestabilito

$$A_{t^*} = \{ \underline{v}(P, t^*) \}_{P \in \text{sistema}}$$

L'invariante cinematico $\{I\}$

Consideriamo il campo delle velocità

Moltiplico scalarmente il vettore $\omega(t)$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_Q + \omega \times (P - Q)$$

$$(\underline{\omega} \perp (P-Q))$$

$$\underline{\omega} \cdot \underline{v}_P = \underline{v}_Q + \cancel{\omega \times (P - Q) \cdot \underline{\omega}}^{\,0}$$

$$\underline{v}_P \cdot \underline{\omega} = \underline{v}_Q \cdot \underline{\omega} \qquad \forall (P, Q)$$

Lo scalare individuato dal prodotto scalare di $\underline{v}$ e $\underline{\omega}$ è detto invariante cinematico

$$\boxed{I = \underline{v} \cdot \underline{\omega}}$$

Invariante perché questo scalare non varia al variare della velocità $\underline{v}$ del punto

È possibile dimostrare che se e solo se l'invariante è nullo l'atto di moto è puramente rotatorio o puramente traslatorio

$I = 0$ $\quad \underline{\omega}(t^*) = 0 \longrightarrow$ Atto di moto puramente traslatorio

$\quad \underline{\omega}(t^*) \neq 0 \longrightarrow$ Atto di moto puramente rotatorio

Questa dimostrazione può essere ritrovata in maniera analoga a quanto dimostrato i teoria dei vettori applicati quando si è introdotto il trinomio invariante $\mathfrak{I} = \underline{M} \cdot \underline{R}$ e nella teoria dell'equivalenza dove se e solo se $I = 0$ il sistema si riduce $\begin{cases} (A, R) \\ \text{o} \\ \text{coppia} \end{cases}$

TEOREMA DELL'ESISTENZA DELL'ASSE DI MOZZI E TEOREMA DI MOZZI

È possibile dimostrare che in ogni moto rigido e comunque si fissi un istante t^* nel quale risulti $\omega(t^*) \neq 0$ esiste una retta a dello spazio solidale i cui punti hanno tutti la stessa velocità che parallela ad omega oppure é nulla più precisamente indicata con A un punto di tale asse si dimostra che

$$v_a(t^*) = \frac{I(t^*)}{\omega^2(t^*)} \cdot \underline{\omega}(t^*) = \tilde{\underline{I}}$$

VELOCITÁ DI TRASLAZIONE

IL MINIMO NEL CAMPO DE CAMPO DELLE VELOCITÁ DEL SISTEMA

tale asse é detto asse di moto o asse di Mozzi in particolare quando i punti presentano velocitá nulla é detto asse di istantanea rotazione

$$t^* \quad \underline{\omega}(t^*) \neq 0 \iff \text{ESISTE L'ASSE DI MOZZI}$$

$\exists$ punti sono identificati da $\Rightarrow \underline{v}_A(t^*) = \dfrac{I(t^*)}{\underline{\omega}^2(t^*)} \underline{\omega}(t^*) = \tilde{\underline{I}}(t^*) \Rightarrow I(t^*) \neq 0$

$\omega \cdot \omega$

Scalare

$$\underline{v}_A(t^*) = 0 \Leftarrow I(t^*) = 0$$

In analogia all'asse centrale

Recap

$$I = \underline{v} \cdot \underline{\omega}$$

$\underline{I} = 0 \iff$
- atto puramente traslatorio $\omega(t^*) = 0$
- atto puramente rotatorio $\Rightarrow \underline{\omega}(t^*) \neq 0 \Rightarrow \exists\, a(t^*)$

$$\Downarrow \quad I = 0$$

$$\underline{V}_a = \frac{I}{\omega^2} \underline{\omega} = 0$$

$\underline{\omega} = \underline{\omega}(t^*) \neq 0$
- $v_a = 0 \Rightarrow I = 0$
- $v_a = \dfrac{I}{\omega^2} \underline{\omega}$

TEOREMA DI MOZZI

Il teorema di Mozzi stabilisce che, in ogni moto rigido, istante per istante l'atto di moto è di tipo elicoidale

dimostrazione

t^* $\quad$ Hp: $\omega(t^*) \neq 0$ $\quad \exists$ asse a

Il teorema dell'esistenza dell'asse assicura che in queste ipotesi esiste un asse i cui punti o hanno velocità parallela ad omega $[I(t^*) \neq 0]$ oppure è nulla $[I(t^*) = 0]$

Possono quindi presentarsi due casi

1) $\underline{\omega}(t^*) \neq 0 \quad I(t^*) \neq 0$

ASSE $\exists\, \hat{a}$

Il campo delle velocità

$$v_P = v_A + \underline{\omega} \times (P - A) \qquad A \in a$$

$A \in a$

$$\vec{v}_A(t^*) = \frac{I(t^*)}{\omega^2(t^*)}\,\underline{\omega}(t^*) = \tilde{I}(t^*)$$

SOSTITUENDO IL VALORE DI v_a

$$v_P = \frac{I(t^*)}{\omega^2(t^*)}\,\underline{\omega}(t^*) + \underline{\omega}(t^*) \times (P - A)$$

Per dimostrare che l'atto di moto è elicoidale devo dimostrare che esiste una costante che indico con $\lambda(t^*)$ tale che

VELOCITÀ TRASLAZIONE

$$\lambda(t^*) = \frac{|\vec{\tilde{I}}(t^*)|}{|\omega(t^*)|}$$

Cerchiamo di trovare questo $\lambda(t^*)$

$$\tilde{I}(t^*) = \frac{I(t^*)}{\omega^2(t^*)}\,\omega(t^*) \xRightarrow{\text{FACENDO IL MODULO}} |\tilde{I}(t^*)| = \frac{I(t^*)}{\omega^2(t^*)}\,|\underline{\omega}(t^*)| \Rightarrow$$

SCALARE, QUINDI UN NUMERO CHE DIPENDE DA t^*

$$\Rightarrow \frac{|\tilde{I}(t^*)|}{|\omega(t^*)|} = \underbrace{\frac{I(t^*)}{\omega^2(t^*)}}_{\lambda(t^*)} \frac{\cancel{\underline{\omega}(t^*)}}{\cancel{\underline{\omega}(t^*)}} \Rightarrow \frac{|\tilde{I}(t^*)|}{|\omega(t^*)|} = \lambda(t^*)$$

2) $\underline{\omega}(t^*) \neq 0 \quad I(t^*) = 0$

ASSE DI MOZZI

$\exists \vec{a} \longrightarrow V_A(t^*) = \frac{I}{\omega^2(t^*)} \omega(t^*) = 0 \nearrow$ $\exists$ asse di istantanea rotazione

Atto di moto puramente rotatorio che è un caso particolare dell'atto di moto elicoidale

NON ESISTE L'ASSE

$\Uparrow$

$H_p: \; \omega = \omega(t^*) = 0 \;\rightarrow$ ATTO DI MOTO TRASLATORIO

$\Downarrow$

Che è un caso di moto elicoidale

* In questo caso ovviamente per l'ipotesi $\omega(t^*) = 0$ non esiste l'asse di MOZZI