1) Forza elettrica. Campo elettrostatico

$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N\,m}$

$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\,q_0}{r^2} \underline{\mu}$

Principio di sovrapposizione degli effetti: per un sistema dinamico lineare, l'effetto di una somma di perturbazioni in ingresso è uguale alla somma degli effetti prodotti da ogni singola perturbazione

Il campo elettrostatico è definito come la forza elettrica $\vec{F}$ che agisce su una carica di prova q_0 positiva posta in quel punto e divisa per la carica q_0 stessa. $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\underline{\mu}$

Se si ha una distribuzione di carica, abbiamo queste relazioni per q: $q = \rho\tau$; $q = \sigma\Sigma$; $q = \lambda l$

Proprietà linee di forza del campo elettrico: 1) tangente e concorde al campo in ogni punto 2) le linee si addensano dove l'intensità è maggiore 3) le linee di forza non si incrociano mai 4) le l.d.f. hanno origine dalle cariche positive e terminano su quelle negative. Se ci sono cariche dello stesso segno, le l.d.f. si chiudono all'infinito 5) nel caso di cariche di segno opposto, ma uguali in modulo, tutte le linee che partono dalle cariche positive si chiudono su quelle negative, alcune passando per l'infinito. Se le cariche non sono uguali in modulo, alcune linee terminano o provengono dall'infinito

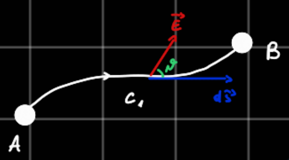
2) Lavoro elettrico. Potenziale elettrostatico

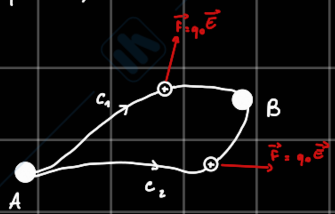
Il lavoro della forza $\vec{F}$ per uno spostamento elementare $d\vec{s}$ della carica q_0 è dato da: $dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = q_0\vec{E}\cdot d\vec{s} = q_0 E\cos\theta\, ds$.

Per uno spostamento da A a B lungo C_1: $W = \int_{C_1} dW = \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} = q_0\int_{C_1}\vec{E}\cdot d\vec{s}$

Il rapporto tra W_1 e q_0 è definito **tensione elettrica**

$T_1(A \longrightarrow B \text{ lungo } C_1) = \int_{C_1}\vec{E}\cdot d\vec{s}$





Preso un altro circuito però il lavoro è diverso e la circolazione su $C = C_1 + C_2$ è: $W = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{s} + \int_{-C_2}\vec{F}\cdot d\vec{s} = W_1 - W_2$

$W = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = q_0\oint_C \vec{E}\cdot ds = q_0\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s}$

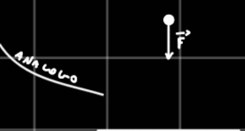
$\mathcal{E}$ è definito come **forza elettromotrice (fem)**, dipende dal campo elettrico e dal percorso chiuso C.

Facendo un passo indietro, possiamo anche riscrivere l'integrale della tensione come differenza dei valori di una funzione: $\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = f(B) - f(A)$

A questa funzione si dà il nome di **potenziale elettrostatico**.

$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} \left(-\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{s} \text{ TABONI}\right) = \frac{U}{q}$ $[V] = \left[\frac{J}{C}\right]$

$W_{AB} = q_0(V_A - V_B) = -q_0\Delta V$. Ad ogni forza conservativa è associata una energia potenziale e il lavoro della forza conservativa è pari all'opposto della variazione della corrispondente energia potenziale $W_{AB} = -\Delta U_e = U_e(A) - U_e(B)$



$U = mgh$

Per portare la pallina ad un'altezza h spendo energia e faccio guadagnare potenziale

$U_e(A) - U_e(B) = \frac{q\,q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{q\,q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$ Al limite è lecito supporre: $E(\infty) = 0$, $F(\infty) = 0$, $V(\infty) = 0$, $U_e(\infty) = 0$

Il potenziale varia come $dV = \underbrace{V(x+dx, y+dy, z+dz)}_{V_{fin}} - \underbrace{V(x,y,z)}_{V_{in}} = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$

$\Longrightarrow dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$. Confrontando con la relazione sopra: $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$; $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$; $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$\boxed{E = -\text{grad}\,V}$

Calcolo l'integrale di linea del campo elettrico su un circuito rettangolare ABCD dove $AB = dy$ e $BC = dz$, l'area vale $d\Sigma_x = dy\,dz$

$d\Gamma_x = E(AB)\cdot AB + E(BC)\cdot BC + E(CD)\cdot CD + E(DA)\cdot DA$

$\vec{CD} = -\vec{AB}$ e $\vec{DA} = -\vec{BC}$

$d\Gamma_x = \dots = [E_y(AB) - E_y(CD)]\,dy + [E_z(BC) - E_z(DA)]\,dz = [E_y(z) - E_y(z+dz)]\,dy + [E_z(y+dy) - E_z(y)]\,dy$

Noto che: $E_y(z+dz) - E_y(z) = \frac{\partial E_y}{\partial z}dz$; $E_z(y+dy) - E_z(y) = \frac{\partial E_z}{\partial y}dy$

Itero il procedimento e trovo il rotore $rot\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E}$

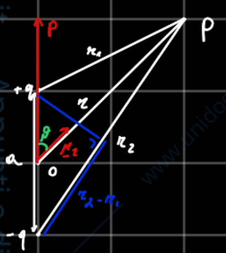
$d\Gamma = (\vec{\nabla}\times\vec{E})\cdot d\Sigma\,\underline{u_n}$. Concludiamo che la circuitazione su un percorso chiuso infinitesimo su cui si appoggia una superficie $d\Sigma$ è dato dal flusso del rotore di $\vec{E}$ attraverso $d\Sigma$ (Teorema di Stokes)

$\frac{d\Gamma}{d\Sigma} = (rot\,\vec{E})_n \longrightarrow \boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot d\Sigma\,\underline{u_n}}$

Il teorema di Stokes ci dice che la circolazione di un campo vettoriale lungo una linea chiusa C è uguale al flusso del rotore del campo attraverso una qualunque superficie Σ avente per contorno C.

Se il campo è conservativo, la circuitazione è nulla lungo qualsiasi linea chiusa C. $\Longrightarrow \boxed{\nabla\times E = 0}$, perché il campo è conservativo.

Il dipolo elettrico è costituito da 2 cariche $-q$ e $+q$ da cui è definibile il momento di dipolo magnetico: $\vec{p} = q\vec{a}$



Se P è lontano, se $r >> a$ possiamo approssimare $r_2 - r_1 = a\cos\vartheta$, $r_1 r_2 = r^2$

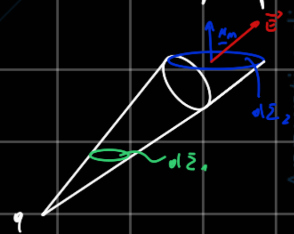
$\Longrightarrow \boxed{V(P)} = \frac{qa\cos\vartheta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \boxed{\frac{\vec{p}\cdot\underline{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$

$\boxed{U_e} = qa_x\frac{\partial V}{\partial x} + qa_y\frac{\partial V}{\partial y} + qa_z\frac{\partial V}{\partial z} = \boxed{-\vec{p}\cdot\vec{E}}$; $\boxed{\vec{F} = p_x\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}}$

3) Legge di Gauss

Calcolo il flusso di un campo $\vec{E}$ attraverso una superficie Σ : $\phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\underline{u_n}\,d\Sigma$. Si nota che il flusso di una carica puntiforme q dipende solo dall'angolo solido.

Se si considerano dei coni infinitesimi con vertice q, il flusso di $\vec{E}$ è lo stesso per qualsiasi superficie $d\Sigma$



$d\Omega = \frac{d\Sigma_1\cos\vartheta_1}{r_1^2} = \frac{d\Sigma_2\cos\vartheta_2}{r_2^2}$

$\Longrightarrow \boxed{\phi(\vec{E})} = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\underline{u_n}\,d\Sigma = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{d\Omega}{r^2} = \frac{q\,r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\Omega = \boxed{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega}$

Se la carica q è interna a una sfera $\Omega = 4\pi \longrightarrow \boxed{\phi(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}}$

Se la carica q è esterna a una sfera, il infinitesimo entrante si elide con quello uscente, $\longrightarrow d\phi_1(\vec{E}) + d\phi_2(\vec{E}) = 0$

$\boxed{\phi(\vec{E}) = \oint \vec{E}\cdot\underline{u_n}\,d\Sigma = 0}$

La relazione locale è la seguente:

$d\phi(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\underline{u_n}\,d\Sigma = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\underbrace{dx\,dy\,dz}_{d\tau}$ Ma $d\phi = \frac{dq}{d\tau} = \rho(x,y,z)\frac{d\tau}{\varepsilon_0}$

$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$

Possiamo ricavare l'equazione di Laplace

$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$

$E = -grad\,V = -\nabla V \xrightarrow{\text{SOSTITUENDO}} -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, scritta meglio $\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (Equazione di Poisson)

dove $\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0}$ (Equazione di Laplace)

4) Conduttori. Energia elettrostatica

Caratteristiche dei conduttori: il campo $\vec{E}$ all'interno di un conduttore è nullo.
1) Se $\vec{E} = 0$, è nullo il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa Σ all'interno del conduttore $\xRightarrow{\text{PER GAUSS}}$ $q_{int} = 0$. Da ciò si evince che l'eccesso di carica sta sulla superficie
2) Il potenziale è costante in ogni punto del conduttore $\longrightarrow E = -grad\,V = 0 \longrightarrow V = cost$.
3) Il campo $\vec{E}$ è ortogonale in ogni punto della sua superficie $\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$ (teorema di Coulomb)

Possiamo definire la capacità di un conduttore $C = \frac{Q}{V}$, essa dipende solo da caratteristiche geometriche e non dalla carica.

Un sistema costituito da due conduttori tra i quali c'è induzione completa è detto condensatore $\longrightarrow$ con induzione completa si intende il caso limite in cui tutte le linee di campo confluiscono sul conduttore

Conduttori in parallelo: $\Delta V = cost$ $\quad C_{eq} = C_1 + C_2$

Conduttori in serie: $q = cost$ $\quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$

L'energia di un conduttore è: $dW = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq \longrightarrow \int dW = \frac{q^2}{2C}$ $\qquad U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$

$$U_e = \frac{1}{2}CV^2 \overset{V = E\cdot h;\ C = \frac{\varepsilon_0 \Sigma}{h}}{=} \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 \Sigma}{\cancel{h}} E^2 h^{\cancel{2}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tau \longrightarrow u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Forza tra due armature: $dW = -dU_e$; $W = F\cdot h \longrightarrow F\cdot h = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}$ $\left(U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}h\right)$

$$\vec{F} = -\nabla U_e = -\frac{q^2}{2\varepsilon_0 \Sigma}$$

5) Dielettrici

Le sostanze isolanti possono ridurre la d.d.p. tra due armature, sono i dielettrici.

$K = \frac{V_0}{V_K} > 1$ $\quad$ si definisce la suscettività elettrica come: $\chi = K - 1$

$V_K \hookrightarrow$ con dielettrico

Considero un volumetto $\Delta\tau$ in cui ci sono n atomi, il momento $\Delta\vec{p}$ è definito come: $\Delta\vec{p} = n\langle\vec{p}\rangle$; $\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta\tau} = \underbrace{N}_{\text{densità di dipoli}}\langle\vec{p}\rangle$

Il vettore $\vec{P}$ si chiama polarizzazione del dielettrico $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$

La densità superficiale delle cariche di polarizzazione è uguale alla componente di $\vec{P}$ lungo la sua superficie: $\sigma_p = \vec{P}\cdot\underline{u}_n = P\cos\vartheta$

Per una superficie chiusa Σ: $Q_p = -\iint_\Sigma \vec{P}\cdot\underline{u}_n\,dS \longrightarrow \rho_p = -\operatorname{div}\vec{P}$ (il meno indica che la carica è entrante)

Introduco il vettore $\vec{D}$, definito come $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$. Esso è il vettore induzione dielettrica

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$; $\oint \vec{D}\,\underline{u}_n\,d\Sigma = q$ $\quad$ Esso NON è conservativo e rot D = rot P

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E}(1+\chi) = \varepsilon_0\vec{E}K = \varepsilon\vec{E} \overset{\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r}{=} \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{D}$$

L'energia è nuovamente definita come: $U_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \Sigma h \longrightarrow u_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$

Materiali isotropi
- $\vec{P}, \vec{E}, \vec{D}$ sono paralleli
- χ ed ε sono scalari
- $\vec{P} = \chi(E)\cdot\vec{E}$
- $\varepsilon(E) = \varepsilon_0 + \chi(E)$

Materiali lineari
- P, E, D sono proporzionali
- χ ed ε sono scalari
- $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}$
- $\text{rot}\,\vec{D} = 0$

Materiali anisotropi
- P non è $\parallel$ a E

Materiali non lineari
- P non è proporzionale a $\vec{E}$
- $P = \chi\vec{E} + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + \dots$

Materiali piezoelettrici
- Se polarizzati si deformano
- Se deformati si polarizzano

Per dielettrici lineari: $\vec{P} = \chi\vec{E}$; $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \frac{\chi}{\varepsilon_0}$; $\rho_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\rho_{lib}$; $\sigma_p = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma_{lib}$

$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{div}\vec{D} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}$; $\text{rot}\,\vec{E} = 0$; $\nabla^2 V = -\frac{\rho_{lib}}{\varepsilon}$

Condizioni al contorno:

$[D_n] = \sigma_{lib}$; $[E_t] = 0$

6) Corrente elettrica

Il moto ordinato di elettroni in una certa direzione costituisce una corrente elettrica. $i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$
Sia $\vec{v}_d$ la velocità di deriva (velocità delle cariche), si definisce $\vec{J} = n_+ e \vec{v}_{d+} - n_- e \vec{v}_{d-}$

$di = \vec{J} \, \underline{u}_n \, d\Sigma \longrightarrow i = \int_\Sigma \vec{J} \, \underline{u}_n \, d\Sigma = \Phi_\Sigma(\vec{J})$

$i = \oint \vec{J} \cdot \underline{u}_n \, d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t}$ → principio di conservazione della carica (i è uguale alla variazione nell'unità di tempo della carica in Σ)

In condizioni stazionarie: $\oint \vec{J} \cdot \underline{u}_n \, d\Sigma = 0 \xrightarrow{\text{posso scrivere tutto in forma locale}} \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Definisco la velocità di deriva come $\vec{v}_d = -\frac{e}{m} \underbrace{\vec{E}}_{\vec{F} = -e\vec{E}} \tau \Longrightarrow \vec{J} = -ne\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m} E$ da cui: $\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \longrightarrow \vec{J} = \sigma \vec{E}$

$\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \vec{J} = \rho \vec{J}$ in cui ρ è la resistività del conduttore. Posso definire la potenza del conduttore come: $P_\tau = \vec{J} \cdot \vec{E}$

$V = \frac{\rho h}{\Sigma} i$ in cui $\frac{\rho h}{\Sigma} = R$ è la resistenza ; $P = R i^2 = V i = \frac{V^2}{R}$

$$\oint \vec{B} \, \underline{u}_n \, d\Sigma = \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) \, dV \qquad \vec{B} = \frac{\partial \Phi}{\partial S} \qquad \nabla \cdot B = \frac{d\Phi}{dV}$$

7) Forza magnetica. Campo magnetico.

L'azione magnetica è dovuta al fatto che un sistema di cariche in moto genera un campo magnetico.
$\oint \vec{B} \cdot \underline{u}_n \, d\Sigma = 0 \xrightarrow[\text{(teorema della divergenza)}]{\text{in forma locale}} \nabla \cdot \vec{B} = 0$ III Maxwell. Questo ci dice che per il campo magnetico NON esiste il monopolo e B è solenoidale

$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ è la forza di Lorentz, considerando tante cariche ($\vec{J} = -ne\vec{v}_d$) $\vec{F}_L = -e \vec{v}_d \times \vec{B}$; $d\vec{F} = n \Sigma \, ds \, F_L = -\Sigma \, ds \, \overbrace{ne \vec{v}}^{\vec{J}} \times \vec{B} = -\Sigma \, ds \, \vec{J} \times \vec{B}$
$\Longrightarrow \vec{F}_\tau = \vec{J} \times \vec{B}$ è la forza per unità di superficie. $d\vec{F} = A \vec{J} \, d\vec{s} \times \vec{B} = i \, d\vec{s} \times \vec{B}$
$F = i \int_P^Q d\vec{s} \times \vec{B}$. Posso definire un momento magnetico: $M = b \sin\theta \, F = i a b B \sin\theta = i \Sigma B \sin\theta$

Il momento magnetico: $\vec{m} = i \Sigma \underline{u}_n$ e il momento meccanico: $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

$U_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -mB\cos\theta = -i\Sigma \cos\theta$; $M = -\frac{dU_p}{d\theta} = -mB\cos\theta$
$U_p = -i \int_\Sigma \vec{B} \cdot \underline{u}_n \, d\Sigma = -i \, \Phi(\vec{B}) \longrightarrow dW = i \, d\Phi(\vec{B})$
$W = i \, \Delta\Phi$

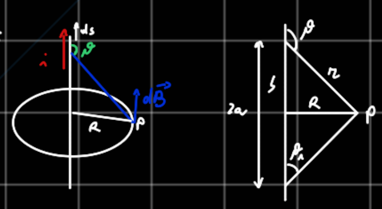
8) Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampère.

$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \underline{u}_r}{r^2}$ (prima legge di Laplace) $\longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \underline{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_\tau \frac{J \times \underline{u}_r}{r^2} d\tau$

Posso trovare il campo magnetico di una carica in moto: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \underline{u}_r}{r^2}$ e il suo campo $\vec{E}$ è $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \underline{u}_r$
Si trova che: $\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

Considero un filo di lunghezza 2a percorso da una corrente i:



$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \underline{u}_r}{r^2} \longrightarrow dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \sin\theta}{r^2}$

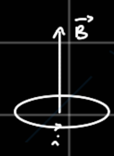
$r \sin(\pi - \theta) = r \sin\theta = R \Longrightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{R^2}$

$s \, tg(\pi - \theta) = -s \, tg\,\theta = R \Longrightarrow ds = \frac{R \, d\theta}{\sin^2\theta}$ $\longrightarrow B_a = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R} \int_{\cos\theta_0}^0 d\cos(\theta) = \frac{\mu_0 i \cos\theta_0}{4\pi R}$

$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin\theta \, d\theta}{R} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\cos\theta}{R}$

$\vec{B}_{tot} = 2\vec{B}_a = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R \sqrt{R^2 + a^2}} \underline{u}_\phi$ Noto che $\lim_{a \to \infty} \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \underline{u}_t \times \underline{u}_n$ (Legge di Biot-Savart)

Il campo di una spira circolare è dato dalla seguente dimostrazione



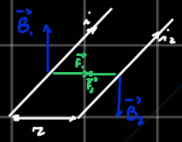
$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \underline{u}_r}{r^2}$ $\quad ds = 2\pi R$

Si nota che il campo è massimo in $r = R + x$ per $x = 0$ $\quad = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{2\pi R \, \underline{u}_z}{r^2} = \frac{\mu_0 i}{2 r^2} R \, \underline{u}_z$

$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \underline{u}_z$

$B_0 = \frac{\mu_0 n i}{2} \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}$ $\quad B_\infty = \mu_0 n i$

Si può misurare la forza e.m. tra due fili:



$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F_d = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi r}$

Consideriamo un filo rettilineo indefinito, $\vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \underbrace{u_\phi \cdot d\vec{s}}_{r\,d\phi} \longrightarrow \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\phi$, la circuitazione di $\vec{B}$ è: $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\oint d\phi$

$\Longrightarrow \oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i$ (Legge di Ampère)

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_\Sigma \vec{J}\cdot u_n \, d\Sigma \longrightarrow \nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Un campo magnetico B prodotto da un circuito percorso da una corrente i_1 determina un certo flusso $\phi_{1,2}$ attraverso un qualsiasi altro circuito presente nella regione in cui agisce B_1.

$\phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \underbrace{\left(\oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s}_1 \times u_r}{r^2}\right)}_{\text{Laplace}} \cdot u_n \, d\Sigma_2 \longrightarrow \phi_{1,2} = M_{1,2}\, i_1$, analogamente $\phi_{2,1} = M_{2,1}\, i_2$ e $M_{1,2} = M_{2,1} = M$ coefficiente di mutua induzione

Il campo magnetico produce un flusso anche attraverso il circuito stesso, il fenomeno è detto autoflusso

$\phi = \int_\Sigma \left(\oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s}\times u_r}{r^2}\right)\cdot u_n \, d\Sigma$ $\qquad \phi = L i$

$\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$ e $\nabla\cdot\vec{B} = 0$ (proprietà locali)

Potenziale vettore (non è possibile un potenziale scalare magnetico)

Il campo magnetico può essere espresso come $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, quindi come rotore di un altro vettore A detto potenziale vettore: $B = \nabla\times A$
Applicando l'equazione divergenza ad entrambi i membri troviamo un risultato identicamente nullo $(\mathrm{div}(\mathrm{rot}) = 0)$

Consideriamo $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla S$ in cui S è una funzione scalare arbitraria:
$\nabla\times\vec{A}' = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\nabla S = \nabla\times\vec{A}$
il campo magnetico derivato da A' è uguale a quello derivato da $\vec{A}$, ciò determina che il potenziale vettore è definito a meno di una funz. scalare

$\nabla\cdot\vec{A}' = \nabla\cdot\vec{A} + \nabla^2 S$, si sceglie S in modo che $\left.\begin{array}{l}\nabla^2 S + \nabla\cdot\vec{A} = 0 \\ \nabla^2 S = -\nabla\cdot\vec{A}\end{array}\right\}$

Il potenziale vettore $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla S$ è a divergenza nulla. Tutto è possibile senza che $\vec{B}$ cambi: $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}' = \nabla\times\vec{A}$

$\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ $\qquad \nabla\cdot\vec{A} = 0$

$\nabla\times(\nabla\times F) = \nabla(\nabla\cdot F) - \nabla^2 F$

$\longrightarrow \nabla\times\vec{B} = \nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\vec{A}}_{\mathrm{div}\,A = 0 \text{ per costruzione}}) - \nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{J}$

$\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}$ $\qquad A = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{d\vec{s}}{r}$; $\int_\Sigma \vec{B}\cdot u_n \, d\Sigma = \int_\Sigma (\nabla\times\vec{A})\cdot u_n \, d\Sigma = \oint \vec{A}\cdot d\vec{s}$

Una carica q in moto con velocità $\vec{v}$, genera i campi:

$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} u_r$; $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times u_r}{r^2}$. Sono legati dalla relazione $\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$

9) Proprietà magnetiche della materia

$\vec{M}$ rappresenta il momento magnetico dell'unità di volume del materiale, si chiama magnetizzazione: $\vec{M} = \frac{\vec{m}}{\tau}$

Sostanze diamagnetiche
$\vec{M}$ è opposta a $\vec{B}$ ed è proporzionale. Non dipende dalla temperatura salvo poche eccezioni.
RESPINTE

Sostanze paramagnetiche
$\vec{M}$ è concorde rispetto a $\vec{B}$ ed è proporzionale. L'effetto aumenta al diminuire della temperatura ma ci sono varie eccezioni.
ATTRATTE

Sostanze ferromagnetiche
$\vec{M}$ è concorde a $\vec{B}$ ma la loro relazione non è né lineare né univoca. I campioni rimangono magnetizzati anche dopo aver spento il campo
ATTRAE FORTEMENTE

$\boxed{K_m = \frac{B}{B_0}}$ è la **permeabilità magnetica**, $B = K_m B_0 = \mu_0 K_m n i = \mu n i$ $\quad \boxed{\mu = \mu_0 K}$ $\left[\frac{H}{m}\right]$

Il campo in un mezzo indefinito è dato da: $\vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times u_r}{r^2}$

Definiamo la suscettività magnetica come: $\boxed{\chi_m = K_m - 1}$

Sostanze diamagnetiche
$K_m < 1 \quad \chi_m < 0$
$B < B_0 \quad \vec{M}$ opposto a $\vec{H}$

Sostanze paramagnetiche
$K_m > 1 \quad \chi_m > 0$. Dipende dalla Temperatura
$\chi_m = \frac{C\rho}{T}$ (prima legge di Curie)
C costante ρ densità T temperatura
$B > B_0 \quad \vec{M}$ concorde a $\vec{H}$

Sostanze ferromagnetiche
K_m è dell'ordine di $10^3 \div 10^5$
χ_m e K_m non sono funzioni univoche di B. A una determinata T, il comportamento diventa uguale a quello paramagnetico
$B \gg B_0 \quad \vec{M}$ dipende da $\vec{H}$

Al contrario di $\vec{E}$, il campo magnetico delle correnti elementari che generano i momenti magnetici è concorde al campo $\vec{B}$

in N_τ atomi: $\quad \Delta\vec{m} = \Delta N_\tau \langle \vec{m} \rangle$ e $\boxed{\vec{M} = \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta \tau} = \frac{\Delta N_\tau}{\Delta \tau} \langle \vec{m} \rangle = n \vec{m}}$

Secondo il **principio di equivalenza di Ampère**: una spira piana di area $d\Sigma$ percorsa dalla corrente i equivale agli effetti magnetici a un dipolo elementare di momento magnetico $\boxed{d\vec{m} = i \, d\Sigma \, u_n}$

$\Longrightarrow d\vec{m} = di_m \, d\Sigma \, u_z = M \, d\Sigma \, dz \, u_z \longrightarrow di_m = M dz \qquad \boxed{i_m = \int_0^h M dz = M h}$

$M = \frac{i_m}{h} = \frac{di_m}{dz} = J_{s,m} \qquad \boxed{\vec{J}_{s,m} = \vec{M} \times u_n}$

$\boxed{\oint \vec{M} \cdot d\vec{s} = i_m} \qquad \boxed{\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}}$

$J_{s,m}$ è una densità lineare di corrente definita su un'area $\left[\frac{A}{m}\right]$
J_m è una densità di corrente definita su un volume $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + i_m) = \mu_0 i + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{s}}$ $\qquad$ in forma differenziale: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \nabla \times \vec{M}$

Introduco un campo $\vec{H}$ tale che: $\boxed{\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}} \longrightarrow B = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ soddisfa: $\boxed{\oint \vec{H} \, d\vec{s} = i}$ e $\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J}}$
La circuitazione di $\vec{H}$ attraverso una qualsiasi linea chiusa è uguale alla somma delle correnti di conduzione concatenate
Il rotore di $\vec{H}$ è uguale alla densità di corrente di conduzione

$\oint \vec{B} \cdot u_n \, d\Sigma = 0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i$, $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$

Equazione di stato del mezzo magnetizzato: $\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}}$, come conseguenza si ha: $\boxed{\vec{B}} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 K_m \vec{H} \boxed{= \mu \vec{H}}$

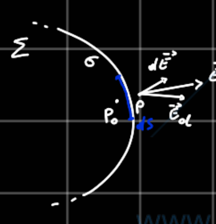
$\vec{M} = \frac{1}{\mu} \chi_m \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{K_m} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{K_m - 1}{K_m} \vec{B}$

Equazioni dell'elettrostatica e della magnetostatica:

$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \nabla \times \vec{H} = 0$
$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \qquad \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{H} + \vec{M}$

Slide Tarani

Pressione elettrostatica: Consideriamo un conduttore carico Σ



$\vec{E} = d\vec{E} + \vec{E}_{ol} \quad \vec{E}$ campo totale in P ; $d\vec{E}$ = campo di σds in P ; $\vec{E}_{ol}$ = campo delle restanti cariche in P

P_0 e P sono infinitamente prossimi a ds: $\vec{E}_{ol}(P_0) = \vec{E}_{ol}(P)$, l'osservatore vede ds come una sup. piana indefinita

$\vec{E}(P_0) = d\vec{E}(P_0) + \vec{E}_{ol}(P_0) = 0$

Th di Coulomb

Forza sulla carica $dq = \sigma dS$: $d\vec{F} = \sigma dS \vec{E}_d = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS \, \underline{u_n}$ $\longrightarrow$ Pressione elettrostatica $p = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

OPPURE: $d\vec{F} = dq \underbrace{\vec{E}}_{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}} = \sigma dS \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}_{\vec{E}\text{ esterno}} + \overbrace{0}^{\vec{E}\text{ interno (conduttore)}}\Big) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS \Longrightarrow p = \frac{d\vec{F}}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$

$\hookrightarrow$ è una forza dovuta alla repulsione

Condizioni al contorno per dielettrici: $\sigma_p = (\vec{P_2} - \vec{P_1}) \, \underline{u_n} = P_{n_1} - P_{n_2} = -[P_n]$; $\sigma_{lib} = [D_n]$; $[E_t] = 0$

$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_{pol}}{\varepsilon_0}$

Rifrazione linee di campo: In assenza di carica libera sulla superficie: $[D_n] = 0$; $[E_t] = 0 \Longrightarrow [D_t] = [P_t]$

Per due mezzi lineari in assenza di cariche libere sulla superficie di separazione: $D_{n_1} = D_{n_2} \Longrightarrow \varepsilon_1 E_{n_1} = \varepsilon_2 E_{n_2}$

Divido per E_{t_1} ed E_{t_2} $\longrightarrow \varepsilon_1 \frac{E_{n_1}}{E_{t_1}} = \varepsilon_2 \frac{E_{n_2}}{E_{t_2}} = \frac{\varepsilon_1}{tg\,\vartheta_1} = \frac{\varepsilon_2}{tg\,\vartheta_2}$

$$\frac{tg\,\vartheta_1}{tg\,\vartheta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$ (legge di rifrazione delle linee di campo)

$$u = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}_{\text{lavoro per costruire la distribuzione di carica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{P}}_{\text{lavoro di polarizzazione del dielettrico}}$$

Corrente di conduzione: moto collettivo dei portatori di carica

Corrente di convezione: moto di masse di materia, nelle quali ci sono dei portatori di carica

Corrente di spostamento: senza moto di cariche, dovuta a campi elettrici variabili

$$\text{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Equazioni per un conduttore in regime stazionario: $\text{rot}\,\vec{E} = 0$, $\text{div}\,\vec{J} = 0$; $\vec{E} = -\text{grad}\,V$, $\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_m)$

I campi magnetici sono prodotti solo da cariche in moto, esercitano forze solo su cariche in moto

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$ (II formula di Laplace)

$\iint_\Sigma \vec{B}\cdot \underline{u_n}\, dS = 0 \Longrightarrow$ Non esistono cariche magnetiche che siano sorgenti delle linee di forza $\vec{B}$, le linee di forza sono chiuse

$\text{div}\,\vec{B} = 0$

Nel S.I. il flusso di B si misura in Weber $[Wb] = [T\, m^{-2}]$

$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ valida in condizioni stazionarie

Condizioni al contorno $[B_n] = 0$; $[B_t] = \mu_0 J_s'$

$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{J}$ $\quad H = \frac{B}{\mu_0} - M$

Condizioni al contorno: $[B_n] = 0$; $[H_t] = J'_{s,cond}$

Reticolo di diffrazione

b passo
a larghezza

$$I(\vartheta) = I_0 \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}}_{\text{diffrazione}} \overbrace{\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)}}^{\text{interferenza}}$$

$\beta = N a \sin\vartheta$
$\delta = K b \sin\vartheta$

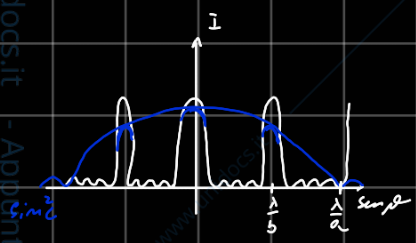
MAX DI INTERFERENZA PRINCIPALI: Annullo il termine di interferenza a denominatore $\quad \frac{\delta}{2} = m\pi \longrightarrow \delta = 2m\pi$

$$\sin\vartheta^{MAX} = m\frac{\lambda}{b}$$

MIN DI INTERFERENZA PRINCIPALI: Annullo il termine di interferenza a numeratore $\quad \frac{N\delta}{2} = m\pi \longrightarrow \delta = \frac{m}{N}2\pi$

$$\sin\vartheta^{MIN} = \frac{m}{N}\frac{\lambda}{b}$$

MIN DIFFRAZIONE $\frac{\lambda}{a}$



potere risolutivo

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = R = m N$$

m: ordine che voglio vedere