Fisica Sperimentale II: Domande di Teoria

Sophie Cavallini

26 gennaio 2021

1 Primo parziale

Si enunci il teorema di Gauss per il campo elettrico E nel vuoto, specificando le unità di misura di tutte le grandezze, e si discuta il significato fisico del teorema.

Il teorema di Gauss enuncia che il flusso uscente del campo elettrico **E** nel vuoto attraverso una superficie chiusa Σ è uguale alla carica Q contenuta nella regione di spazio racchiusa dalla superficie diviso per la costante dielettrica del vuoto ϵ_0. La cui espressione è:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Il campo elettrico in punto è definito come: $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{el}}{q}$ dove $\mathbf{F}_{el}$ è la forza elettrostatica e q è la carica di prova. L'intensità del campo elettrico si misura in $\frac{N}{C}$. La carica si misura in C e la costante dielettrica del vuoto ha come unitù di misura: $N\frac{m^2}{C^2}$.

Si enunci e si discuta la legge di Ampere in regime stazionario sia in forma integrale che in forma locale.

La legge di Ampere in regime stazionario in forma integrale è:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_t dl = \mu_0 I$$

Cioè la circuitazione del campo magnetico **B** lungo una linea chiusa γ è proporzionale alla somma delle correnti concatenate (I) dalla linea γ, dove le correnti che hanno verso concorde a quello indicato dalla regola della vite sono positive mentre le altre sono negative, ed il coefficiente di proporzionalità di μ_0 (permabilità magnetica del vuoto).
La legge di Ampere in forma locale, si può ricavare applicando il teorema di Stokes, è:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

dove **J**, è la densità di corrente. Quindi le correnti **J** sono i vortici del campo **B**. La forma locale viene usualmente chiamata IV equazione di Maxwell.

Si consideri un conduttore neutro, di forma qualsiasi, in condizioni di equilibrio elettrostatico in presenza di un campo elettrico esterno E_0 e si descrivano le sue proprietà in termini di campo elettrostatico, potenziale e distribuzione di carica di superficie e di volume. Si giustifichino tutte le affermazioni fatte.

Il campo elettrostatico risultante all'interno del conduttore è nullo, perchè se così non fosse si avrebbe uno spostamento di cariche, dunque il conduttore non sarebbe in equilibrio elettrostatico.
Questo è possibile perchè il campo elettrico esterno induce inizialmente (quando non è ancora in condizioni di equilibrio) uno spostamento di cariche in modo che si abbia un carica positiva nella zona di superficie dove punta il campo elettrico esterno e un uguale in modulo carica negativa nella zona dove punta la coda del campo, questo porta alla presenza di campo di reazione interno al conduttore che ha uguale direzione, uguale modulo, ma verso opposto rispetto al campo elettrico

esterno, in questo modo il campo risultante è nullo.
Essendo nullo il campo è nulla la densità di carica di volume, se così non fosse, ricordando il teorema di Gauss, si avrebbe un campo elettrico anche all'interno ed è nullo il potenziale, si ricorda la definizione di differenza di potenziale infinitesima come: $dV = -Edr$, dunque la superficie del conduttore è equipotenziale.
La densità di carica di superficie non è uniforme perchè sono presenti zone a carica positiva ed altre a carica negativa. Dare un'espressione generale è difficile perchè dipende dalla geometria del conduttore.

Si enunci la prima equazione di Maxwell in forma locale ed integrale, specificando le unità di misura nel Sistema Internazionale per tutte le grandezze coinvolte. Si enuncino le condizioni di validità delle due forme, chiarendo le cause delle differenze tra le due.

La prima equazione di Maxwell in forma locale è:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

cioè, la divergenza del campo elettrico nel vuoto ($\nabla \cdot \mathbf{E}$) è uguale alla densità di carica (ρ, si misura in $\frac{C}{m^3}$) nel punto in cui è calcolata la divergenza divisa per la costante dielettrica del vuoto (ϵ_0, si misura in $N\frac{m^2}{C^2}$).
In forma integrale è:

$$\iint_\Sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

cioè il flusso del campo elettrico ($\mathbf{E}$, si misura in $\frac{N}{C}$) uscente da una superfice chiusa Σ è uguale alla carica Q (si misura in C) contenuta nella regione di spazio racchiusa dalla superficie Σ diviso per la costante dielettrica del vuoto. La forma integrale viene anche chiamata teorema di Gauss.
La forma locale vale sia nel caso stazionario che non stazionario, ma ha validità solo per distribuzioni di carica di volume (che sono le uniche che esistono realmente), perchè la divergenza è definita solo nel caso tridimensionale.
La forma integrale vale invece anche per distribuzioni di carica di superficie e lineare. Ma vale solo nel caso stazionario, perchè non dipendendo dal tempo non riesce a tenere conto del ritardo dovuto al fatto che il campo non cambia istantaneamente quando si muove una carica, questo è dovuto al fatto che la velocità della luce è limitata e non infinita.

Si discutano gli effetti meccanici di un campo elettrico esterno E (non necessariamente uniforme) su un dipolo elettrico di momento p. Si determini l'energia U di interazione del dipolo con il campo.

Si consideri un dipolo elettrico di momento $\mathbf{p}$ e distanza tra le cariche $d\mathbf{r} = dx\mathbf{u}_x + dy\mathbf{u}_y + dz\mathbf{u}_z$. Il campo elettico nella carica negativa $-q$ è $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}$ e nella carica positiva q è $\mathbf{E}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{E} + d\mathbf{E}$. Dove $d\mathbf{E} = dE_x dx\mathbf{u}_x + dE_y dy\mathbf{u}_y + dE_z dz\mathbf{u}_z$.
Essendo:

$$dE_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}dx + \frac{\partial E_x}{\partial y}dy + \frac{\partial E_x}{\partial z}dz = \nabla(E_x) \cdot d\mathbf{r}$$

Si utilizza la scrittura formale: $d\mathbf{E} = \nabla\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ La forza agente sul dipolo è:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_- + \mathbf{F}_+ = -q\mathbf{E} + q(\mathbf{E} + d\mathbf{E}) = qd\mathbf{E} = q\nabla\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = qd\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{E} = \mathbf{p} \cdot \nabla\mathbf{E}$$

($\mathbf{F}_-$ è la forza agente sulla carica negativa, $\mathbf{F}_+$ è la forza agente sulla carica positiva).
Il momento meccanico agente sul dipolo è:

$$\vec{\tau} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}_- + (\mathbf{r}+d\mathbf{r})\times\mathbf{F}_+ = -\mathbf{r}\times q\mathbf{E} + (\mathbf{r}+d\mathbf{r})\times q(\mathbf{E}+d\mathbf{E}) = qd\mathbf{r}\times\mathbf{E} + \mathbf{r}\times qd\mathbf{E} + d\mathbf{r}\times qd\mathbf{E} = \mathbf{p}\times\mathbf{E} + \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

Se il campo è uniforme la forza è nulla e il momento è $\vec{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$
Il momento $\vec{\tau}$ tende ad allineare il dipolo con il campo $\mathbf{E}$.
L'energia di interazione elettrostatica del dipolo è:

$$U = U_+ + U_- = q(V + dV) - qV = qdV = qd\mathbf{r} \cdot \nabla V = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

Si scriva l'espressione della forza F a cui è soggetto un conduttore γ, percorso da una corrente di intensità I ed immerso in un campo magnetico B, specificando la definizione e l'unità di misura (nel S.I.) di tutte le grandezze che compaiono nell'espressione. Si descrivano le eventuali limitazioni sulle condizioni di validità.

La forza $\mathbf{F}$ a cui è soggetto un conduttore γ percorso da una corrente di intensità I ed immerso in un campo magnetico $\mathbf{B}$ è:

$$\mathbf{F} = \int_\gamma d\mathbf{F}$$

dove $d\mathbf{F}$ è data dalla seconda formula di Laplace:

$$d\mathbf{F} = idl\mathbf{u}_t \times \mathbf{B}$$

dove idl è l'elemento di corrente (che si ricorda non ha significato fisico), $\mathbf{u}_t$ è il versore tangente alla densità di corrente $\mathbf{J}$. Si ricorda che questa legge è valida solo per conduttori filiformi dove la densità di corrente è uniforme nella sezione. Dunque anche la prima espressione è valida solo in questo caso. Le unità di misura delle grandezze coinvolte sono:

- $|\mathbf{F}| = [N]$
- $I = [A]$
- $\mathbf{B} = [T]$
- $\mathbf{J} = [\frac{A}{m^2}]$
- $dl = [m]$

Si enunci la legge di continuità della corrente elettrica e se ne discuta il significato fisico, dopo aver specificato la definizione di ogni grandezza e la sua unità di misura nel Sistema Internazionale.

La legge di continuità della corrente elettrica è:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

dove $\mathbf{J}$ è la densità di corrente (unità di misura: $[\frac{A}{m^3}]$), definito come $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$, ρ è la densità di carica di volume (unità di misura: $[\frac{C}{m^3}]$), definito come $\rho = \frac{dq}{d\tau}$, t è il tempo (unità di misura: $[s]$).
Il significato fisico della legge è che la quantità di carica che attraversa una superficie chiusa nel tempo dt corrisponde ala variazione nel tempo della carica volume cambiata di segno (se $\mathbf{J}$ e $\mathbf{u}_n$ sono concordi, la carica è uscente e quella nel volume diminuisce), cioè vale il principio di conservazione della carica.

Si enuncino le condizioni al contorno per il campo elettrico alla superficie di separazione tra due mezzi dielettrici, specificando la definizione di tutte le grandezze coinvolte.

Si conserva la componente tangente del campo elettrico $\mathbf{E}_t$ ($[E_t] = 0$). Questo perchè il campo è irrotazionale, dunque per una linea chiusa rettangolare γ, a cavallo della superficie di separazione, con linee normali infinitesime si ha:

$$0 = \oint_\gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{u}_{t_2} dl - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{u}_{t_1} dl = E_{t_2} dl - E_{t_1} dl = 0 \Longrightarrow [E_t] = 0$$

Non è possibile ricavare un'espressione esplicita per la differenza delle componenti normali come per le componenti tangenti, ma possiamo fare considreazioni sul vettore spostamento $\mathbf{D}$, definito come $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ possiamo dire per la componente normale di $\mathbf{D}$ che $[D_n] = \sigma_{lib}$.

Si enuncino le formule di Laplace, chiarendo il significato di ogni grandezza che vi compare, e se ne commenti il significato fisico.

La prima formula di Laplace è:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} dl \frac{\mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_r}{r^2}$$

dove $d\mathbf{B}$ è il contributo al campo magnetico nel punto P dovuto all'elemento di corrente Idl, μ_0 è le permeabilità magnetica del vuoto, $\mathbf{u}_t$ è il versore tangente alla densità di corrente $\mathbf{J}$, $\mathbf{u}_r$ è il versore che ha direzione del segmento che unisce il punto P e l'elemento di corrente considerato, e punta verso P, r è la distanza tra l'elemento di corrente e P.
La seconda formula di Laplace é:

$$d\mathbf{F} = idl\mathbf{u}_t \times \mathbf{B}$$

dove $d\mathbf{F}$ è la forza agente sull'elemento di corrente Idl dovuto al campo magnetico esterno $\mathbf{B}$, $\mathbf{u}_t$ è il versore tangente alla densità corrente. Quest'ultima formula ha validità solo per conduttori filiformi in cui la densità di corrente è uniforme nella sezione del conduttore. Le forme locali sono solo astrazioni perchè non esiste l'elemento di corrente Idl ma sono utili per calcolare il campo e la forza in forma integrale.

Si enuncino le condizioni al contorno per il campo elettrostatico.

La componente tangente del campo elettrostatico si conserva per una distribuzione superficiale di carica ($[E_t] = 0$), questo perchè il campo è irrotazionale, dunque la circuitazione di una linea chiusa del campo elettrostatico $\mathbf{E}$ è nulla, pertanto prendendo una linea rettangolare con due lati paralleli alla superficie e due normali, prendendo la lunghezza di questi ultimi infinitesima rispetto a quella dei primi due, dunque il loro contributo alla circuitazione può essere trascurato, si ottiene così che la differenza tra le componenti tangenti ai due lati della superficie è nulla.
La componente normale del campo elettrostatico non si conserva per una distribuzione superficiale di carica, ma presenta una discontinuità di prima specie con salto: $[E_n] = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, nel vuoto, dove σ è la densità di carica di superficie e ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto. È possibile ricavare questo risultato applicando il teorema di Gauss per un cilindro di altezza infinitesima rispetto alla base, a cavallo della superficie, con asse normale alla superficie.

Si dia la definizione di potenziale elettrostatico.

Il potenziale elettrostatico $V(r)$ è definito come:

$$V(r) = \frac{U}{q} = \int_r^{rif} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

dove U è l'energia elettrostatica nella posizione $\mathbf{r}$, q è la carica unitaria, rif è la posizione di riferimento dove il potenziale è stato messo nullo, $\mathbf{E}$ è il campo elettrostatico.
Il potenziale è il lavoro del campo elettrostatico per portare la carica unitaria dalla posizione $\mathbf{r}$ alla posizione di riferimento.

Si descrivano le principali differenze tra le caratteristiche del campo elettrostatico e di quello magnetostatico nel vuoto. Si mostri come queste differenze siano evidenti nelle equazioni che regolano il comportamento dei due campi.

Le principali differenze tra il campo elettrostatico e il campo magnetico sono: la irrotazionalità del campo elettrostatico ($\nabla \times \mathbf{E} = 0$, II equazione di Maxwell), mentre il campo magnetico è rotazionale ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 I$, dove I sono le correnti concatenate, IV equazione di Maxwell) e il campo magnetico è solenoidale ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, III equazione di Maxwell), mentre non è solenoidale il campo elettrostatico ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, I equazione di Maxwell).
Queste differenze sono dovute al fatto che il campo elettrostatico presenta sia sorgenti (le cariche positive) che pozzi (le cariche negative), mentre non esistono sorgenti o pozzi del campo magnetico, questo perchè non è possibile isolare un monopolo magnetico, ma esistono solo dipolo magnetici sempre formati da un polo nord e un polo sud. Questo comporta che le linee di forza del campo magnetico sono chiuse o si estendono all'infinito, mentre le linee di forza del campo elettrostatico sono aperte.

Ulteriore differenza tra i due è che il campo elettrostatico ha validità solo per cariche ferme (o in lento movimento), mentre il campo magnetico ha validità anche per cariche in movimento, anzi è presente solo quando ci sono ccariche in moto ed agisce solo su cariche in moto.
Sempre conseguenza dell'irrotazionalità del campo elettrostatico e della rotazionalità del campo magnetico è che in presenza, rispettivamente, di una distribuzione superficiale di carica e di una corrente superficiale, si conserva la componente tangente del campo elettrostatico, mentre non si conserva la componente tangente del campo magnetico.
Conseguenza del fatto che il campo magnetico è solenoidale, mentre il campo elettrostatico non lo è, sempre nelle situazioni del caso precedente, si conserva la componente normale del campo magnetico, mentre non si consera quella del campo elettrostatico.

Si ricavi l'espressione (modulo, direzione e verso) del campo elettrico in prossimità della superficie di un conduttore carico in equilibrio, supponendo nota la densità di carica in ogni punto del conduttore.

Essendo il conduttore in equilibrio elettrostatico il campo elettrico interno è nullo, altrimenti si avrebbe uno spostamento di cariche, che violerebbero quindi le condizioni di equilibrio elettrostatico. Questo comporta che non è presente carica all'interno, altrimenti per il teorema di Gauss si avrebbe un campo elettrico. Pertanto tutta la carica del conduttore è distribuita sulla sua superficie. Dunque la densità di carica è una densità superficiale di carica, che indichiamo con σ.
Il campo che abbiamo appena detto essere presente solo all'esterno del conduttore è normale alla superficie, perchè per le condizioni al contorno si deve conservare la componente tangente del campo elettrostatico in presenza di una distribuzione di carica di superficie, ed essendo il campo interno nullo, ha ovviamente componente tangente nulla, dunque anche la componente tangente del campo esterno è nulla. Il verso del campo dipende dal segno della densità di carica, se è positiva il verso ha quello del versore normale alla superficie, altrimenti il verso è opposto. Inoltre sappiamo sempre per le condizioni al contorno che la componente normale del campo elettrostatico presenta una discontinuità di prima specie in presenza di una distribuzione superficiale di carica e che il salto è di $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto), dunque il campo elettrostatico esterno ha modulo $\frac{\sigma(P)}{\epsilon_0}$, dove P è il punto esterno dove stiamo calcolando il campo, possiamo considerare la densità come la densità nel punto P, perchè il punto P è in prossimità della superficie, anche se sarebbe più corretta la formulazione:

$$lim_{P\to P_0}\mathbf{E}(P) = \frac{\sigma(P_0)}{\epsilon_0}$$

dove P_0 è la proiezione di P sulla superficie, dunque è un punto appartente alla superfice, dove è dunque possibile determinare la densità di carica. Questa formulazione viene chiamata teorema di Coulomb.

Si descrivano le proprietà fondamentali del campo magnetico nel vuoto in regime stazionario.

Una delle proprietà fondamentali del campo magnetico è che non esistono sorgenti/pozzi, questo perchè non è possibile avere un monopolo magnetico (non è possibile isolare il polo nord dal polo sud), dunque esistono solo dipoli magnetici, in cui sono presenti sia polo nord che polo sud. Questo comporta che le linee di forza di $\mathbf{B}$ sono chiuse o si estendono all'infinito. Dunque il flusso del campo magnetico per due superfici che hanno le stesso bordo è uguale. Questo è solo possibile se il flusso del campo magnetico è nullo per qualsiasi distribuzione di correnti, dunque il campo magnetico è solenoidale, questa viene chiamata I legge della magnetostatica:

$$\iint_\Sigma \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_n dS = 0$$

Applicando il teorema di Stokes si può facilmente ricavare, la forma locale di questa legge: $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, questa espressione viene chiamata III equazione di Maxwell. La II legge della magnetostatica (chiamata anche legge di Ampere) enuncia che la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa γ è proporzionale alla somma delle correnti concatenate della linea, indicata con I ed il coefficiente di proporzionalità μ_0, permeabilità magnetica del vuoto. La cui espressione è quindi:

$$\oint_\gamma \mathbf{B}\cdot\mathbf{u}_t dl = \mu_0 I$$

Applicando il teorema di Gauss per la divergenza si ricava la forma locale: $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, dove $\mathbf{J}$ è la densità di corrente, questa viene chiamata IV equazione di Maxwell. Mostra che le correnti $\mathbf{J}$ sono i vortici di $\mathbf{B}$.

Si enuncino le leggi di Maxwell in forma locale per il campo elettrostatico in presenza di un generico mezzo dielettrico e se ne chiarisca il significato fisico. Nel caso particolare di un dielettrico lineare ed omogeneo, si derivi la relazione che lega densità di carica totale, libera e di polarizzazione.

La seconda equazione di Maxwelll è $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, rimane invariata sia nel vuoto che in presenza di dielettrici, indica che la circuitazione del campo elettrico lungo un circuito chiuso è nulla (dal teorema di Stokes). Perchè il campo elettrostatico è conservativo in entrambi i casi. Pertanto, è possibile definire un potenziale in entrambi i casi.
La prima equazione di Maxwell in presenza di dielettrici è $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{lib}+\rho_{pol}}{\epsilon_0}$, dove ρ_{pol} è la densità di carica di polarizzazione di volume e ϵ è la costante dielettrica del materiale, a differenza del caso nel vuoto compare anche un termine dovuto a ρ_{pol}, perchè è presente nei dielettrici, mentre non è presente nel vuoto.
Consideriamo ora il vettore spostamento $\mathbf{D}$, definito come: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$. La polarizzazione $\mathbf{P}$ ha relazione caratteristica per un dielettrico lineare ed omoegeneo: $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$. Mentre $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$. Dunque si ottiene:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} \Longrightarrow \chi = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)$$

È un risultato noto che $\cdot \mathbf{P} = -\rho_{pol}$. Sviluppando questa espressione si ottiene:

$$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}) = -\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\nabla \cdot (\mathbf{E}) = -\epsilon 0(\epsilon_r - 1)\frac{\rho_{lib}}{\epsilon_0 \epsilon_r} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\rho_{lib}$$

Analogamente: $\sigma_{pol} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\sigma_{lib}$ Ulteriori ovvie relazioni: $\rho_{lib} + \rho_{pol} = \rho_{tot}$ e $\rho_{pol}\tau + \sigma_{pol} S = 0$. Dove τ è il volume del dielettrico e S è la superficie esterna del dielettrico. Quest'ultima relazione è valida perchè si deve mantere la carica, quindi la carica complessiva di polarizzazione deve essere nulla.

Si dia la definizione dei vettori campo elettrico E, spostamento elettrico D e polarizzazione P e se ne specifichi il legame in un generico dielettrico. Si spieghi poi quali sono le sorgenti di ognuno dei vettori, chiarendone il significato.

Il campo elettrico è definito come $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$, dove $\mathbf{F}$ è la forza elettrostatica agente in un punto e q è la carica di prova. Perchè la carica di prova disturba il campo elettrico presente si prende una carica $q \longrightarrow 0$. Quindi:

$$\mathbf{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q}$$

Il vettore polarizzazione è definito come

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta \tau} = N < \mathbf{p} >$$

dove $\mathbf{p}$ è il momento di dipolo, N è la densità di dipoli, $< \mathbf{p} >$ è il momento di dipolo medio.
Il vettore spostamento elettrico è definito come:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

La relazione caratteristica della polarizzazione è: $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$, dove χ è la suscettività dielettrica e può essere uno scalare nel caso di materiali isotropi (costante se il materiale è lineare) oppure un tensore nel caso di materiali anistropi.
Le sorgenti del campo elettrico sono le cariche positive o negative (in questo ultimo caso è più corretto chiamarli pozzi) (sia cariche libere che di polarizzazione), percheè:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_{pol}}{\epsilon_0}$$

Le sorgenti del vettore polarizzazione sono i dipoli elettrici, perchè:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{pol}$$

Le sorgenti del vettore spostamento elettrico sono le cariche libere, perchè:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{lib}$$

Ricavare e discutere le relazioni che legano il vettore polarizzazione alla densità di carica di polarizzazione di volume e di superficie. Verificare che la somma delle cariche di polarizzazione sia nulla.

Si prenda una superficie infinitesima dS all'interno del volume del dielettrico. Attraverso dS passa una carica: $dQ^+ = \rho^+ \mathbf{I}^+ \cdot \mathbf{u}_n dS$, $dQ^- = \rho^- \mathbf{I}^- \cdot \mathbf{u}_n dS$, dove $\rho^+ = -\rho^-$ la densità di carica di volume che si sposta e $\mathbf{I}^+$, $\mathbf{I}^-$ sono le distanze percorse dalle cariche. Dunque: $dQ = dQ^+ + dQ^- = \rho^+(\mathbf{I}^+ - \mathbf{I}^-) \cdot \mathbf{u}_n dS$, e $\mathbf{I}^+ - \mathbf{I}^- = \mathbf{I}$, quindi :$dQ = \rho^+ \mathbf{I} \cdot \mathbf{u}_n dS = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS$, dove $\mathbf{P}$ è il vettore polarizzazione.
Per una superficie Σ chiusa:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{P}) = \iint_\Sigma \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS = \iiint_\tau \nabla \cdot \mathbf{P} = -\iiint_\tau dQ \; d\tau = -\iiint_\tau \rho_{pol} \; d\tau$$

In forma locale: $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{pol}$
Sapendo che $dQ = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS$, ma per definizione si ha $dQ = \sigma_{pol} dS$, pertanto: $\rho_{pol} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n$
La somma delle cariche di polarizzazione è sempre nulla perché:

$$Q_T = \iiint_\tau \rho_{pol} d\tau + \iint_\Sigma \sigma_{pol} dS = -\iiint_\tau \nabla \cdot \mathbf{P} d\tau + \iint_\Sigma \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n dS = 0$$

Dove τ è il volume racchiuso da Σ.

Ricavare e discutere le relazioni tra campo elettrico, campo elettromotore e corrente in un circuito in regime stazionario.

Per un conduttore ohmico vale la legge di Ohm locale: $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$, dove $\mathbf{E}$ è il campo elettrico, ρ è la resistività del materiale del conduttore e $\mathbf{J}$ è la densità di corrente.
Per un circuito aperto si ha $\mathbf{J} = 0$, perchè per $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ in un circuito aperto non può circolare corrente. Dunque le cariche sono ferme pertanto la risultante delle forze agenti su di esse deve essere nulla, in presenza di campo elettrico e di campo elettromotore ($\mathbf{E}_m$) la risultante delle forze è: $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}_m)$. Pertanto, $\mathbf{E}_m = -\mathbf{E}$. Quindi per il principio di sovrapposizione degli effetti vale

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} - \mathbf{E}_m$$

Scrivere le equazioni di Maxwell per l'elettrostatica e ricavare le condizioni al contorno per i campi E, D e P. Discutere, inoltre le condizioni per una misura operativa di E e D all'interno di un dielettrico.

La prima equazione di Maxwell per l'elettrostatica è in forma locale:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

e in forma integrale:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{E}) = \iint_\Sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

dove $\mathbf{E}$ è il campo elettrostatico, ρ è la densità di carica di volume, ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto, Σ è una superficie chiusa e Q è la carica contenuta in Σ. La seconda equazione di Maxwell per l'elettrostatica è in forma locale:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

e in forma integrale:

$$\oint_\gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_t dl = 0$$

dove γ è una linea chiusa.
Dalla prima equazione segue che la componente normale del campo elettrostatico in presenza di una distribuzione di carica di superficiale (σ) presenta una discontinuità di prima specie con salto $[E_n] = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Dalla seconda invece segue che la componente tangente non presenta discuntinuità ($[E_t] = 0$).
Essendo che $\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{pol}$ la componente normale presenta una discontinuità di prima specie alla superficie di separazione tra due mezzi con costante dielettrica diversa, ha una salto pari a $[P_n] = -\sigma_{pol}$.
Il vettore spostamento elettrico è definito come: $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, dunque

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{\rho}{\epsilon_0} - \rho_{pol} = \rho_{lib} + \rho_{pol} - \rho_{pol} = \rho_{lib}$$

Pertanto $\mathbf{D}$ presenta una discuntinuità di prima specie alla superficie di separazione tra due mezzi con costante dielettrica diversa per la componente normale, il salto è pari $[D_n] = \sigma_{lib}$.
Per la misura operativa di $\mathbf{E}$ in un dielettrico è necessario ricavare una cavità cilindrica con asse parallelo al campo elettrico, con altezza molto superiore rispetto al raggio, essendo che la componente tangente del campo elettrico si conserva, il campo misurato nella cavità sarà uguale al campo nel dielettrico.
Per effettuare una misura operativa di $\mathbf{D}$ in un dielettrico è necessario effettuare una cavità cilindrica, con asse parallelo al vettore spostamento e altezza molto minore rispetto al raggio, essendo che la componente normale del vettore spostamento si conserva se non è presenta carica libera, allora prendendo un dielettrico scarico, la misura di $\mathbf{D}$ all'interno della cavità è uguale al vettore spostamento nel dielettrico.

Definire le condizioni per le quali due conduttori si trovano in condizione di induzione completa. Dimostrare che in tali condizioni il sistema dei due conduttori costituisce uno schermo elettrostatico.

Due conduttori si trovano in induzione completa quando tutte le linee del campo elettrico uscenti dalla superficie di un conduttore entrano nella superficie dell'altro conduttore. Praticamente si ottiene la situazione di induzione completa solo quando si ha conduttore cavo con all'interno un altro conduttore. Buone approssimazioni di conduttori in induzione completa sono due conduttori infiniti affacciati e due cilindri conduttori (anche non retti) contenuti uno nell'altro.
Il sistema dei due conduttori costituisce uno schermo elettrostatico perchè le azioni elettrostatiche esterne non disturbano il conduttore inserito nella cavità.

Ricavare l'espressione dell'energia elettrostatica di un sistema di cariche distribuite con densità ρ in un volume τ e la corrispondente espressione in funzione del campo elettrostatico. Ricavare inoltre l'espressione per l'energia di un sistema di conduttori carichi.

In presenza di una carica q_1 il potenziale elettrostatico a distanza r da essa è: $V(r) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}$. In presenza di un'altra carica q_2 l'energia elettrostatica del sistema è: $U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2}(q_1 V_1(r) + q_2 V_2(r))$
Generalizzando a N cariche:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1\ (i \neq j)}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V_i$$

Per una distribuzione continua di cariche con densità di carica di volume ρ:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_\tau \rho V d\tau$$

Dalla prima equazione di Maxwell segue che: $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$, sapendo che vale l'identità $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$ e che $\nabla V = -\mathbf{E}$, si ottiene:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_\tau \rho V d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_\tau \nabla \cdot (V\mathbf{E}) + \frac{1}{2} \iiint_\tau \epsilon_0 E^2$$

Per il teorema della divergenza:

$$\iiint_\tau \nabla \cdot (V\mathbf{E}) = \iint_\Sigma V\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n dS$$

Sappiamo che $V \propto \frac{1}{r^3}$ e $\Sigma \propto r^2$, per $r \longrightarrow \infty$:

$$\iint_\Sigma V\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_n dS \sim \frac{1}{r}$$

Perciò:

$$U = \frac{1}{2}\iiint_\tau \epsilon_0 E^2 d\tau$$

2 Secondo parziale

Sia dia la definizione di intensità di I di un'onda elettromagnetica piana e si esprima l'intensità in funzione di campi elettrico E e magnetico B. Si dia la definizione di pressione di radiazione.

L'intensità istantanea dell'onda è l'energia che il campo trasporta nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione ed è il modulo del vettore di Poynting:

$$\bar{I} = |\mathbf{P}| = \frac{1}{\mu_0}|\mathbf{E}\times\mathbf{B}| = \frac{1}{\mu_0}|\mathbf{E}|\cdot|\mathbf{B}| = \frac{1}{\mu_0}|\mathbf{E}|\cdot\frac{|\mathbf{E}|}{c} = \frac{E^2}{\mu_0 c^2}c = \varepsilon_0 E^2 c = u_{em}c = \frac{1}{\mu_0}c|\mathbf{B}||\mathbf{B}| = \frac{c}{\mu_0}B^2$$

La pressione di radiazione è la forza per unità di superficie esercitata da un'onda sulla superficie di un mezzo ortogonale alla sua direzione di propagazione:

$$p_{em} = \frac{\bar{I}}{v}, \text{ dove } v \text{ è la velocità di propagazione dell'onda}$$

Si ricavi l'equazione delle onde delle equazioni di Maxwell e si discutano le proprietà delle sue soluzioni.

Supponiamo di essere nel vuoto (o in un mezzo lineare) e in assenza di sorgenti

$$\rho = 0;\ \mathbf{J} = 0;\ \mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E};\ \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$$

Le equazioni di Maxwell diventano:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0;\ \nabla\times\mathbf{E} = -\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0;\ \nabla\times\mathbf{H} = \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Da cui: $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\nabla\times\left(\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0\nabla\times\mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}$$

Ponendo: $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \Longrightarrow c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$; dove c è la velocità della luce. L'equazione delle onde è:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Procedendo in modo analogo per il vettore $\mathbf{H}$, si ottiene: $\nabla^2\mathbf{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$ L'equazione è lineare, quindi trovate due soluzioni indipendenti dell'equazione sono soluzioni tutte le combinazioni lineari tra le due soluzioni trovate. Quindi le onde che soddisfano l'equazione non interagiscono tra di loro e vale quindi il principio di sovrapposizione.
Le onde si propagano con velocità c.

Si dia la definizione di polarizzazione di un'onda elettromagnetica. Ricavare le condizioni per la polarizzazione lineare e circolare. Si descriva un metodo per ottenere luce polarizzata linearmente. Ricavare inoltre l'espressione dell'intensità risultante dalla interferenza di due onde piane aventi la medesima frequenza e polarizzate linearmente con assi di polarizzazione formanti tra loro un angolo α.

Se la variazione della direzione di $\mathbf{k}$ (vettore funzione d'onda) nel piano ortogonale alla propagazione in funzione della coordinata spaziale di propagazione e del tempo può essere espressa da una funzione,

l'onda si dice polarizzata.
Ad esempio se un'onda piana sinusoidale si propaga in direzione z, il campo $\mathbf{E}$ può essere come:

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{u}_x + E_y \mathbf{u}_y$$

dove:

$$E_x(P,t) = E_x(P)\sin(\omega t + \phi_x(P))$$
$$E_y(P,t) = E_y(P)\sin(\omega t + \phi_y(P))$$

Se $\mathbf{E}_x$ e $\mathbf{E}_y$ sono in fase, cioè se: $\phi_x = \phi_y + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$ al campo $\mathbf{E}$ oscilla secondo una direzione costante dunque l'onda è polarizzata linearmente.
Se le due componenti di $\mathbf{E}$ sono in quadratura di fase: $\phi_x = \phi_y + (2m+1)\frac{\pi}{2}$. Se $|\mathbf{E}_x| = |\mathbf{E}_y|$ il vertice del vettore $\mathbf{E}$ percorre una circonferenza, dunque la polarizzazione è circolare, se $|\mathbf{E}_x| \neq |\mathbf{E}_y|$ la polarizzazione è ellittica.
Un metodo per ottenere luce polarizzata linearmente è quella di far attraversare le onde una polaroid. Perchè essa è costituita da plastica formata con lunghe catane polimeriche allineate, dove gli elettroni sono liberi di muoversi lungo l'asse della molecola. Dunque $\mathbf{E}$ parallela mette in moto gli elettroni e l'energia viene assorbita e $\mathbf{E}$ ortogonale alle molecole non viene assorbita. Rimane solo la componente di $\mathbf{E}$ ortogonale alle catene.
Sia l'asse x la direzione di propagazione della prima onda, dunque i due campi elettrici hanno forma:

$$\mathbf{E}_1 = E_0 \cos(kr_1 - \omega t)\mathbf{u}_x$$

$$\mathbf{E}_2 = E_0 \cos\alpha \cos(kr_2 - \omega t)\mathbf{u}_x + E_0 \sin\alpha \cos(kr_2 - \omega t)\mathbf{u}_y$$

Dunque il campo risultante è:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = E_0[\cos(kr_1 - \omega t) + \cos\alpha\cos(kr_2 - \omega t)]\mathbf{u}_x + E_0\sin\alpha\cos(kr_2 - \omega t)\mathbf{u}_y = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$$

$$|\mathbf{E}|^2 = |\mathbf{E}_x|^2 + |\mathbf{E}_y|^2 = E_0[\cos^2(kr_1 - \omega t) + \cos^2(kr_2 - \omega t) + 2\cos\alpha\cos(kr_1 - \omega t)\cos(kr_2 - \omega t)]$$
$$2E_0^2\cos\alpha\cos(kr_1 - \omega t)\cos(kr_2 - \omega t) = E_0^2\cos\alpha[\cos(kr_1 + kr_2 - 2\omega t) + \cos k(r_2 - r_1)]$$

dove t corrisponde a un numero molto elevato di periodi dell'onda. L'intensità è dunque:

$$I = \varepsilon_0 c < |\mathbf{E}|^2 >= \varepsilon_0 c \frac{1}{t}\int_0^t |\mathbf{E}(t')|^2 dt' = \varepsilon_0 c E_0^2 \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos\alpha\cos[k(r_2 - r_1)]\right\}$$

$$I_0 = \varepsilon_0 c < |\mathbf{E}_1|^2 >= \varepsilon_0 c E_0^2 < \cos^2(kr_1 - \omega t) >= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 = I_1 = I_2$$

$$I = 2I_0(1 + \cos\alpha\cos\Delta\phi)$$

con $\Delta\phi = k(r_2 - r_1)$

Si enunci il teorema di Poynting, chiarendo il significato dei vari termini.

La variazione di energia elettromagnetica è dovuta alla dissipazione per effetto Joule e al flusso del vettore di Poyting (conservazione dell'energia, bilancio energetico).
$\Longrightarrow$ il flusso di $\mathbf{P}$ attraverso l'elemento di superficie dS rappresenta l'energia elettromagnetica che l'onda trasporta attraverso dS nell'unità di tempo.
In un materiale conduttore, dove è presente una forza elettromotrice (generatore), l'espressione si generalizza: $\mathbf{E} + \mathbf{E}_m = \rho\mathbf{J}$

$$\iiint_\tau \mathbf{E}_m \cdot \mathbf{J} d\tau = \iiint_\tau \rho J^2 d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau u d\tau + \iint_\Sigma \mathbf{P}\cdot\mathbf{u}_n dS$$

Si enuncino le condizioni al contorno per il campo magnetostatico al passaggio tra due mezzi, ricavandone almeno una dalle equazioni di Maxwell.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Longrightarrow \phi_\Sigma(\mathbf{B}) = 0 \Longrightarrow [B_n] = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \Longrightarrow \oint_\gamma \mathbf{H}\cdot\mathbf{u}_z dl = I \Longrightarrow [H_t] = J'_{s,cond}$$

Si dia la definizione di coefficiente di autoinduzione, specificando il significato fisico e disctendo le condizioni di validità della definizione.

Approssimiamo una corrente lentamente variabile con una I (corrente internazionale).
Per un circuito uniforme:

$$\phi_S(\mathbf{B}) = \iint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_s dS = \iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n dS = \oint_\gamma \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n dS$$

dove:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_\gamma \frac{\mathbf{u}_t}{r} dl$$

$$\phi_S(\mathbf{B}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_\gamma \mathbf{u}_t dl \cdot \oint_\gamma \frac{\mathbf{u}_t}{r} dl \Longrightarrow \phi = L \cdot I$$

dove:

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\gamma \mathbf{u}_t dl \cdot \oint_\gamma \frac{\mathbf{u}_t}{r} dl$$

L è l'induttanza o coefficiente di autoinduzione, cioè il flusso autoconcatenato da una corrente unitaria.
L dipende dalla geometria e dal materiale, non dalle condizioni elettriche. L vale solo se la corrente varia lentamente (regime quasi stazionario).

Si dia la definizione di coefficiente di mutua induzione e se ne specifichino le condizioni di validità, spiegandone le ragioni.

Approssimiamo una corrente lentamente variabile con una corrente I stazionaria.
Per un circuito filiforme:

$$\phi_{12} = \iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{u}_{n_1} dS_1 = \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{u}_{n_1} dS_1 = \oint_{\gamma_1} \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{u}_{t_1} dl_1 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\mathbf{u}_{t_1} \cdot \mathbf{u}_{t_2}}{r} dl_1 dl_2$$

essendo:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \frac{\mathbf{u}_{t_2}}{r} dl_2 \Longrightarrow \phi_{12} = M_{12} I_2$$

dove:

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{\mathbf{u}_{t_1} \cdot \mathbf{u}_{t_2}}{r} dl_1 dl_2 = M_{21} = M$$

M è il coefficiente di mutua induzione. M dipende solo dalla geometria e dai mezzi, non dalle caratterstiche elettriche.
M vale solo se la corrente varia lentamente (condizione quasi stazionaria).

Si descriva il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, specificando (anceh con esempi) le diverse cause possibili. In particolare, si enunci la legge di Lenz e se discuta il significato fisico.

La forza elettromotrice indotta f da un campo magnetico $\mathbf{B}$ in un circuito è pari (a meno del segno) alla derivata rispetto al tempo del flusso di $\mathbf{B}$ concatenato con il circuito:

$$f = -\frac{d\phi(\mathbf{B})}{dt}$$

Il fenomeno prende il nome di induzione elettromagnetica.
L'origine della fem indotta è:

- $\mathbf{B}$ non uniforme, ma stazionario e circuito in moto (ad esempio in presenza di un magnete permanente o di un circuito percorso da corrente (con generatore di corrente)).
- $\mathbf{B}$ variabile nel tempo (e circuito fermo) (corrente variabile nel secondo circuito).

La legge di Lenz enuncia: la fem indotta produce una corrente, che genera un campo $\mathbf{B}$ il cui flusso tende a compensare la variazione di flusso che l'ha generata, in accordo con il principio di conservazione dell'energia.

Definire il vettore magnetizzazione e ricavare il legame tra il vettore M e la densità di corrente di magnetizzazione.

Il vettore magnetizzazione $\mathbf{M}$ è definito come il momento magnetico medio per unità di volume:

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta\tau} = N < \mathbf{m} >$$

Un blocco di materiale con magnetizzazione $\mathbf{M}$ è equivalente ad una distribuzione di correnti di magnetizzazione di volume e di superficie come:

- Densità di volume di corrente di magnetizzazione $\mathbf{J}_m$:
$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$$
- Densità di superficie di corrente di magnetizzazione $\mathbf{J}_{s,m}$:
$$\mathbf{J}_{s,m} = \mathbf{M} \times \mathbf{u}_n$$

Discutere il modello del materiale diamagnetico e ricavare l'espressione del momento magnetico di Larmor.

Tutti i materiali sono diamagnetici, ma in alcuni il diamagnetismo è oscurato da altri effetti. In assenza di un campo esterno, non manisfestano proprietà magnetica:

$$\mu_r = (1 + \chi_m) < 1 \Longrightarrow \chi_m < 0$$

$\mathbf{M}$ ha verso opposto da $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$.
Il materiale viene spinto verso regioni dove $\mathbf{B}$ è meno intenso

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{M} \cdot \mathbf{B}) \Longrightarrow F_x = -M_x(\frac{\partial B_x}{\partial x})$$

L'interpretazione microscopica del diamagnetismo è la seguente:
Il moto orbitale degli elettroni determina un momento magnetico:

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L}$$

L'orientazione di $\mathbf{m}$ è casuale.
In presenza di un campo magnetico $\mathbf{B}_x$:

- Se $\mathbf{B}$ non è parallelo $\mathbf{m}$, nasce un momento meccanico: $\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ che determina un moto di processione (processione di Larmor) del piano dell'orbita attorno a $\mathbf{B}$: $\mathbf{m}$ ruota con inclinazione costante. Dalla II equazione cardinale e dalla relazione di Poisson:
$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \omega_L \times \mathbf{L}$$
dove: ω_L è la velocità angolare di processione di Larmor.
$$\Longrightarrow \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \omega_L \times \mathbf{L} \Longrightarrow -\frac{e\mathbf{L}}{2m_e} \times \mathbf{B} = \omega_L \times \mathbf{L} \Longrightarrow \omega_L = \frac{e}{2m_e}\mathbf{B}$$
- Se $\mathbf{B}$ è parallelo $\mathbf{m}$, nasce una forza di Lorentz diretta radialmente che fa variare la velocità ω:
$$\mathbf{F}_L = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \text{ con } \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{B}$$
Supponendo che il raggio dell'orbita sia R costante (verificato a posteriori)
$$\mathbf{F}_C = -m_e\omega^2\mathbf{R}$$
$\mathbf{F}_L$ si somma a $\mathbf{F}_C$ e la fa variare:
$$\Delta F_c = 2m_e\omega\Delta\omega R = F_L = e\omega RB \Longrightarrow \Delta\omega = \frac{e}{2m_e}\mathbf{B}$$
In ogni caso, si determina un momento $\mathbf{m}_d$ parallelo a $\mathbf{B}$:
$$\mathbf{m}_d = -\frac{eR^2}{2}\omega_L = -\frac{eR^2}{2} \cdot \frac{e}{2m_e}\mathbf{B} = -\frac{e^2R^2}{4m_e}\mathbf{B}$$
$$\mathbf{M} = N < \mathbf{m} >= -\alpha_d\mathbf{B} \Longrightarrow \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0\mathbf{H} - \mu_0\alpha_d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0\alpha_d}\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$$
con:
$$\mu_r = \frac{1}{1 + \mu_0\alpha_d} < 1$$

Dimostrare le condizioni al contorno per i campi elettromagnetici. Ricavare l'espressione della pressione di radiazione determinata da un'onda piana polarizzata linearmente che incide normalmente di un conduttore perfetto.

Dalle equazioni di Maxwell:

$$\begin{array}{cc} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \end{array}$$

Seguono le condizioni al contorno per un'onda elettromagnetica:

$$\begin{array}{cc} [D_n] = \sigma & [E_t] = 0 \\ [B_n] = 0 & [H_t] = J_s \end{array}$$

Un conduttore ideale risponde istantaneamente al campo elettrico dell'onda separando cariche in modo da annullare il campo all'interno: $\mathbf{E}_{int} = 0$. Inoltre l'onda è piana: $\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{E} \times \mathbf{u}_n$. All'interno:

$$\mathbf{E}_{int} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Longrightarrow \mathbf{B}_{int} = 0$$

L'onda non si propaga all'interno del conduttore. Per la conservazione dell'energia, quindi l'onda risulta totalmente riflessa.
Sulla superficie:

$$\begin{array}{cc} [D_n] = \sigma & [E_t] = 0 \\ [B_n] = 0 & [H_t] = J_s \end{array}$$

dove i vettori si riferiscono al campo totale, cioè alla somma dell'onda incidente più l'onda riflessa.
Quindi sulla superficie: $\mathbf{E} = 0 \longrightarrow E_r = -E_i$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{B}_i \longrightarrow B_r = B_i$
Sia il campo elettrico nella forma:

$$E_i = E_0 \sin(\omega t - kz); \; E_r = -E_0 \sin(\omega t + kz)$$

Sapendo che:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Il campo elettrico totale $\mathbf{E}$ risulta:

$$E = E_i + E_r = -2E_0 \sin(kz)\cos(\omega t)$$

$\mathbf{E}$ non dipende da $(\omega t \pm kz)$ e quindi non si propaga. Tutti i punti oscillano in fase con ampiezze diverse in funzione di z. Pertanto, si forma un'onda stazionaria. $\mathbf{E}$ si annulla sulla superficie (piano modale)

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -2E_0 k \cos(kz)\cos(\omega t)$$

$$\mathbf{B} = 2\frac{E_0 k}{\omega t} \Longrightarrow B = 2B_0 \cos(kz)\sin(\omega t)$$

Anche $\mathbf{B}$ non si propaga nel conduttore. $\mathbf{B}$ ha un massimo sulla superficie (piano ventrale).
Sulla superficie del conduttore si genera un densità di corrente superficiale $\mathbf{J}_s$ diretta come $\mathbf{E}_i$.

$$\mathbf{J}_s = \frac{[B_t]}{\mu_0} = 2\frac{B_i}{\mu_0} \Longrightarrow \mathbf{J}_s = \frac{2}{\mu_0}\mathbf{u}_n \times \mathbf{B}_i$$

Quindi $\mathbf{B}_i$ eserciata una forza sulla corrente.
Dalla forza di Lorentz, se il campo agisce una distribuzione di carica superficiale:

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \sigma dS \mathbf{v} \times \mathbf{B}_i = \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}_i dS$$

$$\frac{\mathbf{F}}{S} = \mathbf{J}_s \times \mathbf{B}_t = \left(\frac{2}{\mu_0}\mathbf{u}_n \times \mathbf{B}_i\right) \times \mathbf{B}_i = 2\frac{\mathbf{E}_i}{c\mu_0} \times \mathbf{B}_i = 2\frac{\mathbf{P}_i}{c}$$

Si ha quindi pressione di radiazione p_{em}:

$$\mathbf{p}_{em} = \frac{\mathbf{F}}{S} = 2\frac{\mathbf{P}_i}{c}$$

In accordo con quanto visto per un'onda piana che incide su una superficie perfettamente riflettente. La pressione di radiazione si ottiene anche asssociando all'onda una densità di quantità di moto pari a:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{P}}{c^2}$$

La quantità di moto su un'area dS del conduttore in un intervallo di tempo dt è quella contenuta in un volume $(cdtdS)$

$$\mathbf{G} = \mathbf{g}_i cdtdS = \frac{\mathbf{P}_i}{c^2} cdtdS$$

Poiché l'onda viene totalmente riflessa si ha una variazione di quantità di moto:

$$d\mathbf{G} = \frac{\mathbf{P}_i}{c} dtdS - \left(-\frac{\mathbf{P}_i}{c} dtdS\right) = 2\frac{\mathbf{P}_i}{c} dtdS$$

Inoltre:

$$d\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{G}}{dt} = 2\frac{\mathbf{P}_i}{c} dS$$

Quindi:

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{dt} = 2\frac{\mathbf{P}_i}{c}$$

Discutere le proprietà dei potenziali vettore e scalare per le onde elettromagnetiche e ricavarne le equazioni in presenza di cariche e correnti.

Dalla definizione del potenziale vettore A e dalle equazioni di Maxwell:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A};\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Quindi:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Esiste una funzione scalare (potenziale scalare) V tale che:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (\nabla \times (\nabla V) \equiv 0\ \forall V)$$

Quindi è possibile definire il campo $\mathbf{E}$ attraverso il potenziale vettore A e il potenziale scalare V:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$$

Noti A e V è possibile ricavare sia B che E.
Per definire i due potenziali sono stati utilizzate le due equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0;\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Quindi in tali definizioni sono implicite le proprietà espresse dalle due equazioni. Come nel caso stazionario, per il campo $\mathbf{A}$ è fissato il rotore, ma non la divergenza. Esiste cioè una famiglia di vettori che soddisfa alla condizione $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, dati da:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi$$

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\Psi) = \nabla \times \mathbf{A}$$

essendo: $\nabla \times (\nabla f) = 0,\ \forall f$ scalare. Questa caratteristica di $\mathbf{A}$ si riflette su V:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla V' = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} + \nabla\Psi) - \nabla V' = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nabla V' = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V$$

Quindi:

$$V' = V - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Le due relazioni che stabiliscono le possibili famiglie di potenziali vettore e scalare si definiscono "condizioni di compatibilità" o "gauge condition".

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Psi; \; V' = V - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

I potenziali che soddisfano tali relazioni, danno origine agli stessi campi **B** e **E**. A seconda della situazione fisica da descrivere è possibile, sceglieno opportunamente la funzione Ψ, ricavare la forma analitica dei potenziali più adeguate al problema.
Dalla condizione di Lorentz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Si ottiene che **A** e V soddisfano equazioni del tipo:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

che, in assenza di sorgenti, sono l'equazioni delle onde.

Discutere le condizioni al contorno per i campi elettromagnetici e ricavare le leggi della riflessione e rifrazione per un'onda piana incidente sulla superficie di separazione tra due mezzi dielettrici.

Consideriamo un'onda piana incidente sulla superficie di separazione tra due mezzi dielettrici.

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{B}_{0i} e^{\imath(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{0i} e^{\imath(\omega_i - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} = \frac{\mathbf{u}_{ki} \times \mathbf{E}_i}{v_1} = \mu_1 \mathbf{H}_i$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} e^{\imath(\omega_r - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_{0r} e^{\imath(\omega_r - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} = \frac{\mathbf{u}_{kr} \times \mathbf{E}_r}{v_1} = \mu_1 \mathbf{H}_r$$

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{\imath(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{0t} e^{\imath(\omega_t t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} = \frac{\mathbf{u}_{kt} \times \mathbf{E}_t}{v_2} = \mu_2 \mathbf{H}_t$$

Supponiamo che sulla superficie sia: $\sigma = 0$, $\mathbf{J}_s = 0$. Per le condizioni al contorno per **E**, **H**, **D** e **B**.

$$[E_t] = 0 \longrightarrow \mathbf{u}_n \times (\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r) = \mathbf{u}_n \times \mathbf{E}_t$$

$$[H_t] = 0 \longrightarrow \mathbf{u}_n \times (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r) = \mathbf{u}_n \times \mathbf{H}_t$$

$$[D_n] = 0 \longrightarrow \mathbf{u}_n \cdot (\varepsilon_1 \mathbf{E}_i + \varepsilon_1 \mathbf{E}_r) = \mathbf{u}_n \cdot \varepsilon_2 \mathbf{E}_t$$

$$[B_n] = 0 \longrightarrow \mathbf{u}_n \cdot (\mu_1 \mathbf{H}_i + \mu_1 \mathbf{H}_r) = \mathbf{u}_n \cdot \mu_2 \mathbf{H}_t$$

Dove: $\varepsilon_r = n^2$, $\mu_r \cong 1$.
Queste condizioni sono soddisfatte eguagliando tra di loro gli esponenti e le ampiezze di campi:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \longrightarrow \text{ Conservazione dell'energia}$$

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \longrightarrow \text{ Conservazione della quantità di moto}$$

I vettori d'onda sono complanari. Inoltre, le fasi devono essere uguali sulla superficie:

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \text{ dove } k = \frac{\omega}{v}$$

Essendo:

$$|\mathbf{k}_i| = \frac{\omega}{v_1} \; |\mathbf{k}_r| = \frac{\omega}{v_1} \; |\mathbf{k}_t| = \frac{\omega}{v_2}$$

$$\frac{\omega}{v_1}\sin\theta_i = \frac{\omega}{v_1}\sin\theta_r \Longrightarrow \theta_i = \theta_r \text{ Legge di riflessione}$$

Cioè l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza. Inoltre:

$$\frac{\omega}{v_1}\sin\theta_i = \frac{\omega}{v_2}\sin\theta_t \Longrightarrow \frac{n_1\omega}{c}\sin\theta_i = \frac{n_2\omega}{c}\sin\theta_t \Longrightarrow \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \text{ Legge di rifrazione}$$

Ricavare e discutere le equazioni del potenziale del campo magnetico in condizioni stazionarie. Discutere in oltre le modifiche alle equazioni al campo magnetico in condizioni non stazionarie.

Sia $\mathbf{A}$ tale ce $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, allora esiste $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ tale che $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, essendo $\nabla \times (\nabla f) = 0$ per ogni f scalare. $\mathbf{A}$ è il potenziale vettore di $\mathbf{B}$. Essendo fissato solo il rotore del vettore $\mathbf{A}$, la divergenza può essere scelta in modo opportuno a seconda del particolare problema fisico che si vuole descrivere.
In magnetostatica, scegliamo: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \Longrightarrow \nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

perché: $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\mu_0 \mathbf{J}$
In coordinate fisiche:

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \\ \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \\ \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z \end{cases}$$

In analogia con l'equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J};\ \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

con soluzioni:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho}{r} d\tau$$

Quindi:

$$\begin{cases} A_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{J_x}{r} d\tau \\ A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{J_y}{r} d\tau \\ A_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{J_z}{r} d\tau \end{cases}$$

Ossia:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{\mathbf{J}}{r} d\tau \Longrightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\tau \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{u}_r}{r^2} d\tau$$

Soluzione generale del problema dell'elettrostatica.
Nel caso di condizioni non stazionare bisogna considerare anche la corrente di spostamento, dunque la IV equazione di Maxwell diventa:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_s)$$

A partire dalle leggi di Snell, si ricavi, almeno in un caso, l'angolo di incidenza per cui si osserva una particolare condizione di riflessione e/o trasisssione e la si discuta.

- Consideriamo il caso in cui la componente parallela del campo elettrico riflesso sia nulla ($E_{pr} = 0$), se:
  $$n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t = \sin\theta_i \cos\theta_i - \sin\theta_t \cos\theta_t = 0 \longrightarrow \sin 2\theta_t = \sin 2\theta_t$$
  L'equazione è soddisfatta se $\theta_t = \theta_i$ oppure se $2\theta_i = \pi - 2\theta_t$.
  La prima soluzione è banale. La seconda implica:
  $$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{\sin\theta_i}{\cos\theta_i} = \frac{n_2}{n_1}$$
  Cioè:
  $$\tan\theta_i = \frac{n_2}{n_1}$$
  L'angolo per cui questa condizione è soddisfatta è detto angolo di Brewster (indicato con θ_B).
- Passando da un mezzo ad un altro con indice di rifrazione minore ($n_1 > n_2$) esiste un angolo di incidenza detto angolo limite θ_l per cui non c'è onda trasmessa.
  Quindi $\theta_t = \frac{\pi}{2}$, utilizzando la II legge di Snell si ottiene:
  $$\sin\theta_l = \frac{n_2}{n_1}$$
  Per angoli maggiori o uguali dell'angolo limite non c'è trasmissione dell'onda.

Si specifichi quali condizioni devono soddisfare due onde perché si verifichi il fenomeno dell'interferenza. Si descrivi l'esperimento di Young.

Le condizioni di interferenza sono:

- sorgenti coerenti $((\phi_2 - \phi_1) = \text{cost}$
- uguale frequenza
- uguale stato di polarizzazione, o meglio, interferiscono solo le componenti di $\mathbf{E}$ secondo lo stesso asse.

Si abbiano due sorgenti luminose, che rispettino le condizioni sopra indicate, a distanza a. Si osservi la figura di interferenza su uno schermo posto a grande distanza D ($D >> a$).
Sia r_1 e r_2, rispettivamente, il cammino geometrico delle sorgenti S_1 e S_2.
A grande distanza dalle sorgenti: $a << r_1,\ r_2;\ r_1 \cong r_2;\ \xi_{01} \cong \xi_{02}$

$$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos\delta} = \xi_{01}\sqrt{2(1+\cos\delta} = \xi_{01}\sqrt{2(1+2\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right)-1)} = 2\xi_{01}\cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

L'intensità è proporzionale al quadrato del campo:

$$I = I_0\cos^2\frac{\delta}{2}, \text{ dove: } I_0 = I_{max} = 4I_1$$

dove: $r_2 - r_1 = a\sin\theta$ e $\sin\theta \cong \tan\theta \cong \frac{x}{D}$

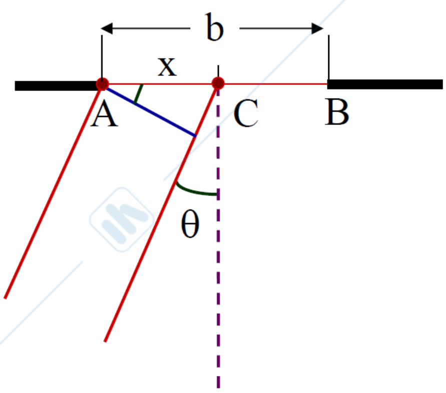
$$\Longrightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi a\sin\theta}{\lambda} \cong \frac{2\pi a}{\lambda}\cdot\frac{x}{D}$$

$I = I_{max}$ quando:

$$\frac{\delta}{2} = n\pi \Longrightarrow \frac{\pi a x}{\lambda D} = n\pi \Longrightarrow x = \frac{n\lambda D}{a}$$

Si discuta la figura di diffrazione prodotta da un'onda piana monocromatica di lunghezza d'onda λ, che incide normalmente su uno schermo opaco con una fenditura di larghezza d.

Supponiamo che il campo incidente sia diverso da 0 solo sui punti dell'apertura (cioè trascuriamo gli effetti di bordo). Possiamo, allora, trattare il campo solo per i suoi aspetti scalari (teoria scalare della diffrazione). Osserviamo l'ampiezza del campo a grandi distanze (approssimazione di Fraunhofer). Per il principio di Huygens, ogni punto dell'apertura si comporta come sorgente di onde sferiche. La figura di diffrazione è il risultato dell'interferenza di queste sorgenti sferiche, coerenti e di ampiezza infinitesima.



Differenza di fase tra A e C: $\delta = \frac{2\pi x\sin\theta}{\lambda}$. Differenza di fase tra A e B: $\alpha = \frac{2\pi b\sin\theta}{\lambda}$.
Le ampiezza delle singole sorgenti sono infinitesime. La poligonale di interferenza di N sorgenti diventa un arco di cerchio. L'ampiezza del campo, data dalla corda OP, è:

$$A = OP = 2\rho\sin\frac{\alpha}{2}$$

Per $\theta = 0$, le sorgenti sono in fase e l'ampiezza è massima:

$$A(\theta = 0) = A_0 = \rho\alpha \text{ (arco delle cfr. di raggio } \alpha\text{)}$$

Dunque, l'ampiezza del campo totale:

$$A = 2\frac{A_0}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2} = A_0\frac{\sin\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}}$$

L'intensità è:

$$I = I_0\left[\frac{\sin\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda}}\right]^2$$

L'intensità ha andamento oscillante decrescente.

- $I = I_0 = I_{max}$ per $\theta = 0$
- $I = 0$ (zeri) per:
$$\frac{\pi b\sin\theta}{\lambda} = n\pi \Longrightarrow \sin\theta = n\frac{\lambda}{b}$$

I primi zeri si hanno per: $\sin\theta = \pm\frac{\lambda}{b}$ e individuano l'ampiezza $\Delta\theta$ del massimo centrale. Per angoli piccoli:

$$\theta = \pm\frac{\lambda}{b} \Longrightarrow \Delta\theta = 2\frac{\lambda}{b}$$

Ricavare la relazione tra polarizzazione e campo elettrico di un'onda elettromagnetica che si propaga all'interno di un materiale dielettrico, discutendo tutte le ipotesi formulate per ricavare tale espressioni.

Consideriamo un modello semplice dell'atomo isolato: nucleo puntiforme di carica +e e carica negativa -e distribuita uniformemente in una regione sferica di raggio a.
Se separiamo le distribuzioni di carica, sul protone agisce la forza di attrazione coulumbiana:

$$F_e = \frac{e^2 z}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

dovuta alla carica negativa contenuta nella sfera di raggio pari allo spostamento z tra i centri delle due cariche.
La forza sull'elettrone è uguale e contraria ed è una forza di richiamo:

$$m\ddot{z} = -F_e \Longrightarrow m\ddot{z} = -kz \Longrightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Quindi l'elettrone oscilla con moto armonico con frequenza armonica:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m a^3}}$$

dove ω_0 dipende dall'attrazione coulombiana tra nucleo ed elettrone.
Consideriamo adesso un atomo in un gas.
Con un termine di smorzamento di tipo viscoso si tiene conto di:

- interazioni con gli altri atomi
- irraggiamento

$$m\ddot{z} = -b\dot{z} - kz \Longrightarrow \ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

Quindi il moto è armonico smorzato.
In interazioni con un'onda, l'equazione di moto dell'elettrone è quella di un oscillatore smorzatore forzato da una forzante che oscilla sinusoidalmente (= onda incidente).

$$m\ddot{z} = -b\dot{z} - kz + q_e E_0 e^{\imath\omega t} \Longrightarrow \ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{q_e}{m} E_0 e^{\imath\omega t}$$

$$\mathbf{P} = q_e \mathbf{z} \Longrightarrow \mathbf{P} = N\overline{\mathbf{p}} = N q_e \overline{\mathbf{z}}$$

Dunque, l'onda induce dei dipoli oscillanti e quindi una polarizzazione $\mathbf{P}$

$$\ddot{\mathbf{P}} + \gamma\dot{\mathbf{P}} + \omega_0^2 \mathbf{P} = \frac{N q_e^2}{m} \mathbf{E}$$

La polarizzazione a sua volta modifica il campo elettromagnetico:
Se $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \Longrightarrow \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

Si definiscano la velocità di fase e di gruppo di un'onda elettromagnetica e se ne discuta il significato fisico. Si ricavi la relazione che le lega e si discuta la possibilità che si verifichi la situazioni in cui $v_f > c$ e/o $v_g > c$.

La velocità di fase è la velocità con la quale si propaga un'onda elementare:

$$v_f = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu$$

Il battimento, cioè l'inviluppo di due onde, si propaga con velocità:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Che è la velocità di gruppo.
In generale, quando c'é tutto uno spettro di frequenze e non solo due, la velocità di gruppo è definita come:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Quindi:

$$v_g = \frac{d(kv_f)}{dk} = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

La velocità di gruppo è sempre minore o uguale a c, perché per la teoria della relatività c è la massima velocità che un segnale può assumere.
La velocità di fase può essere maggiore di c. Dal punto di vista fisico ciò non preoccupa perchè non è la velocità reale dell'onda, ma solo delle singole componenti armoniche, che sono onde piane monocromatiche, che fisicamente non esistono.
In dispersione anomala si ottiene $v_g > c$, ma il modello che descrive è semplice e non reale, inoltre non stiamo considerando la parte immaginaria dell'indice di rifrazione che diventa importante in un intorno della frequenza propria.