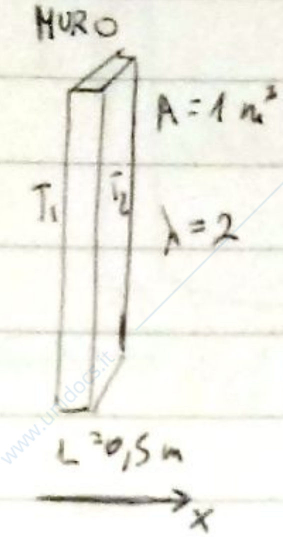
Esercizio

Ipotesi: stazionario $T_1 = 20°C$ $T_2 = 5°C$

$\dot{Q} = ?$



$$\rightarrow \dot{Q} = -\frac{\lambda A \Delta T}{L} = -\frac{\lambda A}{L}(T_2 - T_1) =$$

possiamo toglierlo e metterlo in modulo se sappiamo la direzione del flusso di calore

$$= \frac{2 \cdot 1 \cdot 15}{0{,}5} = 60 \text{ W}$$

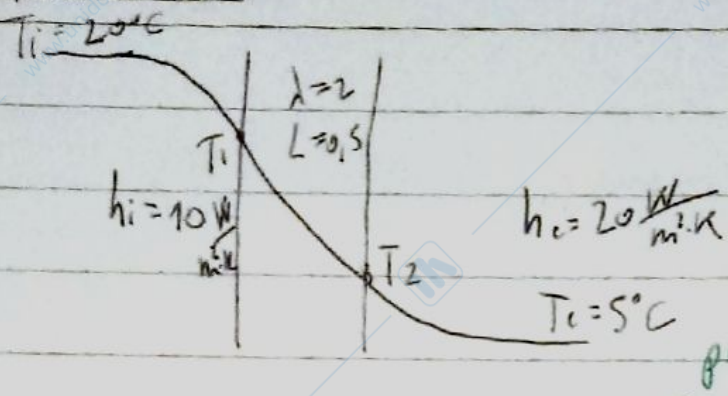
→ per una stanza di superficie

$A_s = 200 \text{ m}^2$

$\dot{Q}_{200} = 12000 \text{ W}$

Se nella stanza ci sono 200 studenti che emanano 100 W a testa emanano 20000 W quindi bastano loro a scaldare la stanza con le temperature del problema.

→ Se consideriamo anche le resistenze convettive il problema diventa:



preso in modulo

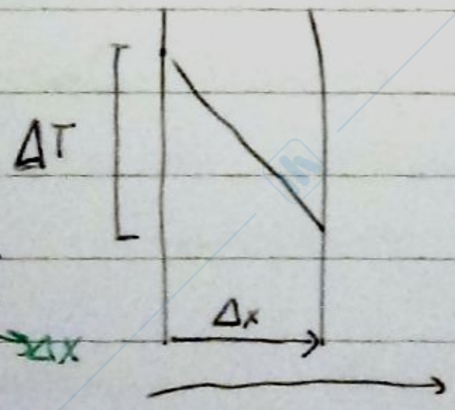
$$\dot{Q} = \frac{\Delta T_{TOT}}{R_{TOT}} = \frac{(T_i - T_e)}{\underbrace{R_{h_i}}_{\frac{1}{h_i A}} + \underbrace{R_\lambda}_{\frac{L}{\lambda A}} + \underbrace{R_{h_e}}_{\frac{1}{h_e A}}} = \frac{15}{\frac{1}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}} = \frac{15}{0,1+0,25+0,05} = 37,5\,W$$

$$\dot{Q} = \Delta T_i / R_i \rightarrow \Delta T_{i1} = \dot{Q} \cdot R_{i1} = 3,75$$
$$\Delta T_{12} = \dot{Q} \cdot R_{12} = 9,375$$
$$\Delta T_{2e} = \dot{Q} \cdot R_{2e} = 1,875$$

Trasmissione del calore per una parete cilindrica

per pareti piane

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{\Delta T}{L \rightarrow \Delta x}$$

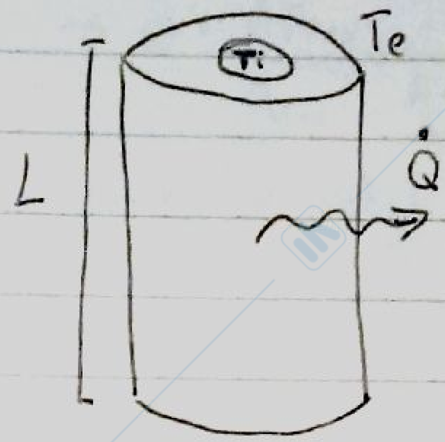


integriamo tra due estremi

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

→ se vogliamo tornare alla forma non differenziale

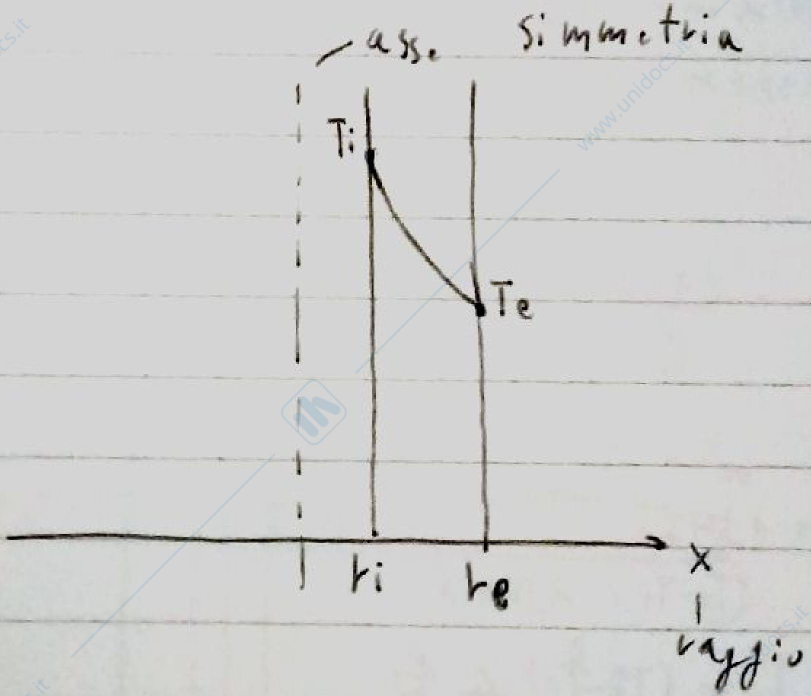
con una forma che varia nel tempo



Hp:

- Stazionario → T(~~t~~) raggio
- geometria cilindrica T(r)

$$\rightarrow \dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dr}$$



$$\dot{Q} = -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda 2\pi L}{\dot{Q}} dT$$

$$\int_{r_i}^{r_e} \frac{dr}{r} = -\frac{\lambda 2\pi L}{\dot{Q}} \int_{T_i}^{T_e} dT$$

$$\lg\left(\frac{r_e}{r_i}\right) = -\frac{\lambda 2\pi L}{\dot{Q}} (T_e - T_i)$$

$$\dot{Q} = \frac{-(T_e - T_i)}{\frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{2\pi L \lambda}}$$

Resistenza conduttiva cilindrica

quando la parete è molto sottile, possiamo tralasciare il suo minimo spessore e considerarla piana

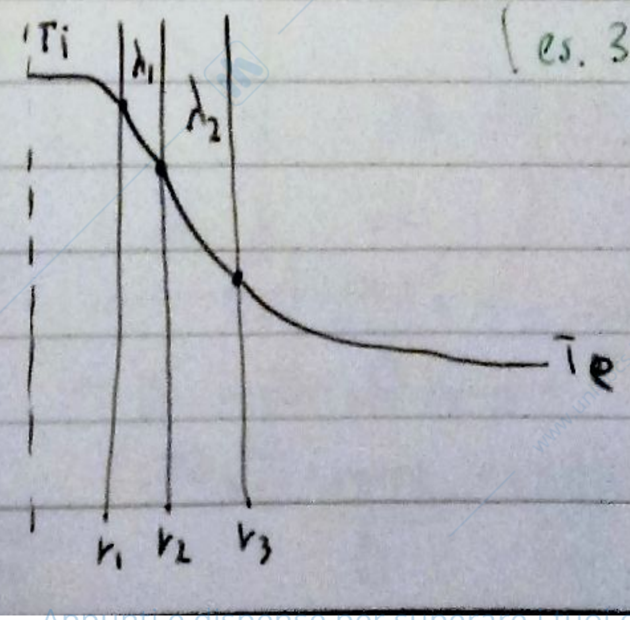
$$\int_{r_i}^{r} \frac{dr}{r} = -\frac{2\pi L\lambda}{\dot{Q}} \int_{T_i}^{T(r)} dT$$

$$\ln \frac{r}{r_i} = +\frac{\cancel{2\pi L\lambda}\,(T(r)-T_i) \cdot \ln \frac{r_e}{r_i}}{(T_e - T_i)\,\cancel{2\pi L\lambda}}$$

$$T(r) = T_i + (T_e - T_i)\frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$

Consideriamo:

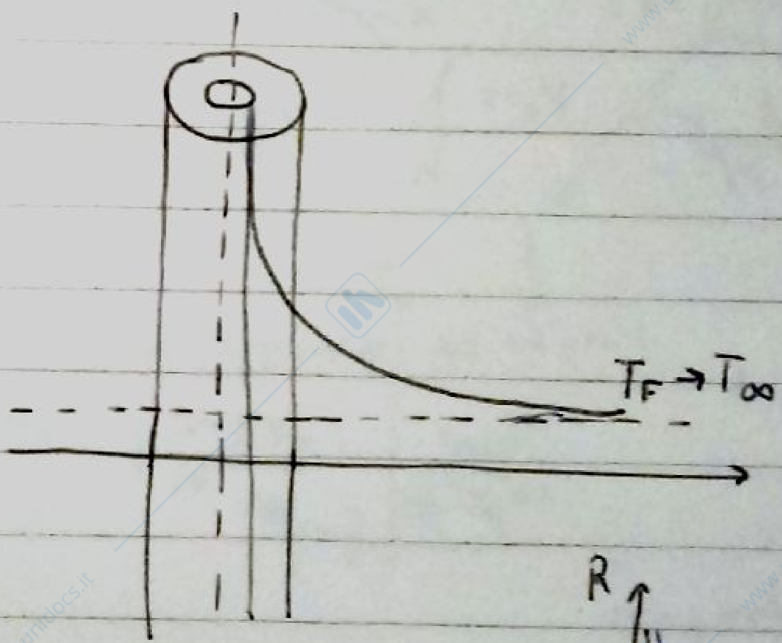
1. (es. 3.9 dispense)



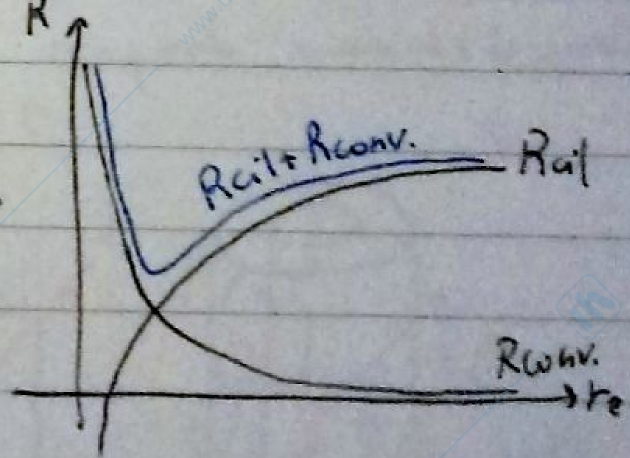
$$\rightarrow \dot{Q} = \frac{\Delta T_{TOT}}{R_{TOT}} = \frac{\Delta T_{TOT}}{R_{h_i} + R_{cil\,1,2} + R_{cil\,2,3} + R_{he}}$$

$$\dot{Q} = \Delta T_{TOT} \Big/ \left(\frac{1}{h_i 2\pi L r_1} + \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi L \lambda_1} + \frac{\ln r_3/r_2}{2\pi L \lambda_2} + \frac{1}{h_e 2\pi L r_3} \right)$$

2. (es. 3.10 dispense)



$$\dot{Q} = \frac{\Delta T_{TOT}}{\underbrace{R_{cil}}_{\ln(r_e)} + \underbrace{R_{conv}}_{\frac{1}{r_e}}} \rightarrow$$



$R_{TOT} = R_{cil} + R_{conv.}$ ← voglio minimizzare la resistenza (trovare il punto di minimo)

$$R_{TOT}(r_e) = \frac{1}{2\pi \cancel{L}\lambda}\ln\frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h\cancel{2\pi} r_e \cancel{L}} = \frac{1}{2\pi L}\left(\frac{1}{\lambda}\ln\frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h r_e}\right)$$

minimo

$$\frac{dR_{TOT}}{dr_e} = 0 \rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{\lambda}\ln\frac{r_e}{r_i} + \frac{1}{h r_e}\right)}{dr_e} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda}\frac{r_i}{r_e}\cdot\frac{1}{\cancel{r_i}} + \frac{1}{h}\cdot\left(-\frac{1}{r_e^2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{\lambda\cdot\cancel{r_e}} = \frac{1}{h\cdot r_e^{\cancel{2}}} \qquad r_e = \frac{\lambda}{h}$$

R_{TOT} è minimo

↓

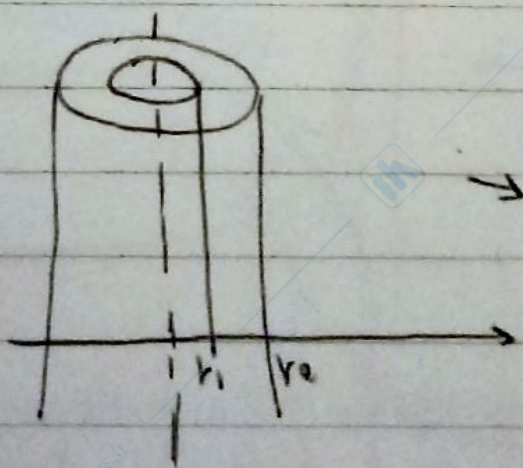
Q_{TOT} è max

↓

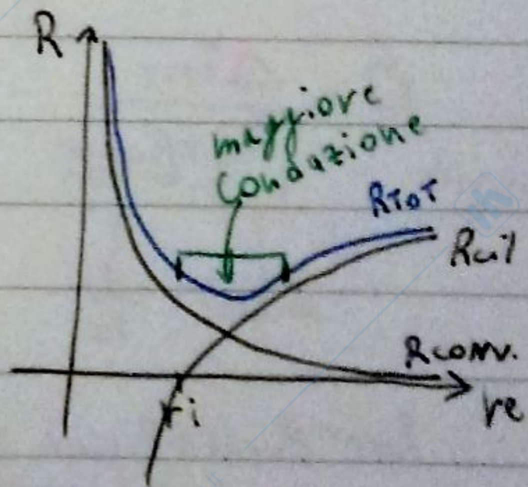
verifica dimensionale:

$$\frac{\cancel{W}}{m\cdot\cancel{K}}\cdot\frac{m^2 K}{\cancel{W}} \quad ✓$$

Consideriamo dunque:



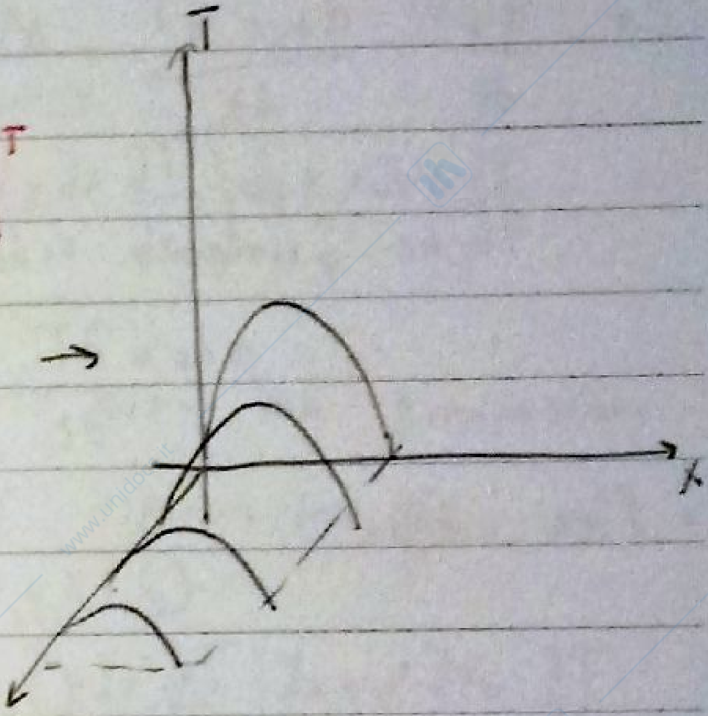
→



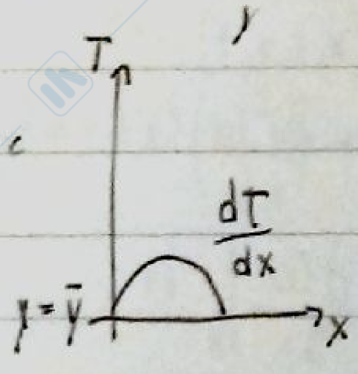
Problemi tridimensionali

$T(x, y, z, t)$

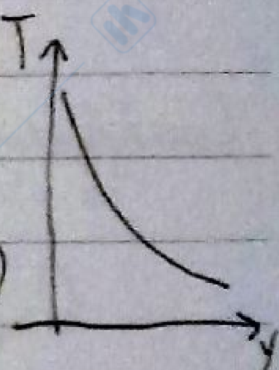
→



$\frac{\partial T}{\partial x}$ sarebbe come se

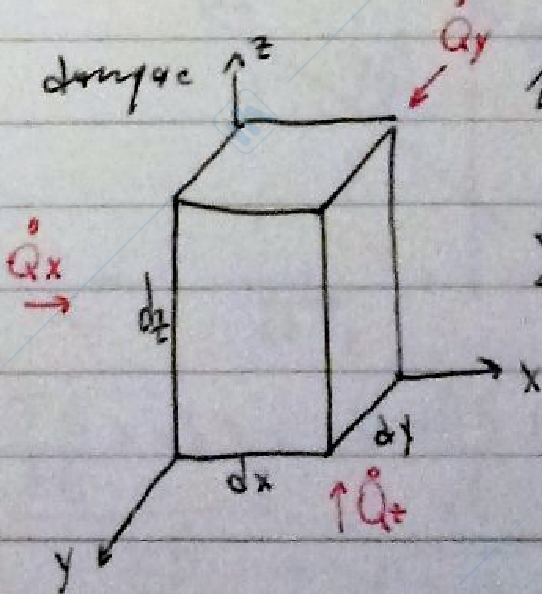


e $\frac{\partial T}{\partial y}$ → $T(y, \bar{x})$



e così via con z e t.

Consideriamo dunque



1°PdT

$Q_{IN} + \cancel{L_{IN}} = \Delta U$

$\sum \dot{Q}_{IN} = \sum \dot{Q}_{OUT} + \frac{dU}{dt}$

volume specifico

• $$\frac{dU}{dt} = \frac{dm\,c\,dT}{dt} = \frac{\rho\,dv\,c\,dT}{dt}$$

che possiamo vedere come

$$\rho\,dv\,c\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

• flussi entranti: $\qquad$ flussi in uscita:

$$\dot{Q}_x(x,y,z,t) \qquad \dot{Q}_x(x+dx,y,z,t)$$

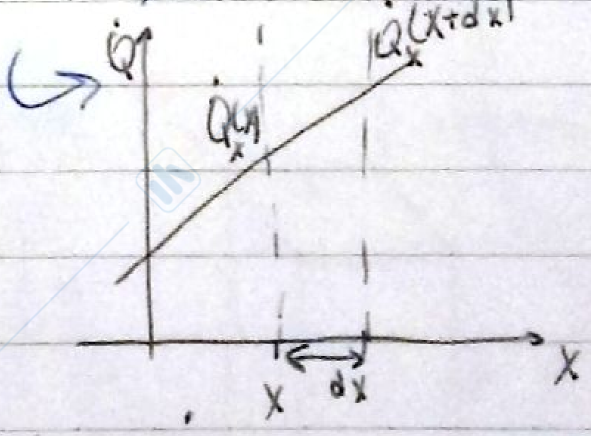
$$\dot{Q}_y(x,y,z,t) \quad = \quad \dot{Q}_y(x,y+dy,z,t)$$

$$\dot{Q}_z(x,y,z,t) \qquad \dot{Q}_z(x,y,z+dz,t)$$

Consideriamo solo secondo x (il resto è uguale)

$$\dot{Q}_x\Big|_{x+dx} = \dot{Q}_x\Big|_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x}\Big|_x \cdot dx$$

Serie di Taylor



$$\hookrightarrow \underbrace{\cancel{\dot{Q}_x|_x}}_{\text{"}Q_{IN}\text{"}} = \underbrace{\cancel{\dot{Q}_x|_x} + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x}\cdot dx}_{\dot{Q}_x|_{x+dx} = \text{"}Q_{OUT}\text{"}} + \underbrace{\rho\,dv\,c\,\frac{\partial T}{\partial t}}_{\frac{\partial U}{\partial t}} \qquad (*)$$

Sappiamo che

$$\dot{Q}_x = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

$$(*) \rightarrow \quad 0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \overbrace{d_y \, d_z}^{dA} \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \rho \, dv \, c \frac{\partial T}{\partial t}$$

possiamo considerarlo come una generazione di potenza interna $\dot{g}$ espressa in $\frac{W}{m^3}$

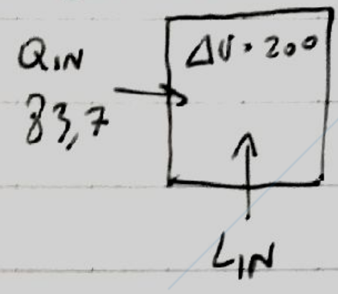
$$\dot{g} \cdot \partial x = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda \cancel{\partial y \, d z} \frac{\partial T}{\partial x}\right) \partial x + \rho \, \partial v \, c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\dot{g} = -\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

Esercizi

① (1.1)

con convenzione entrante:



$\Delta U = 200\ kJ$

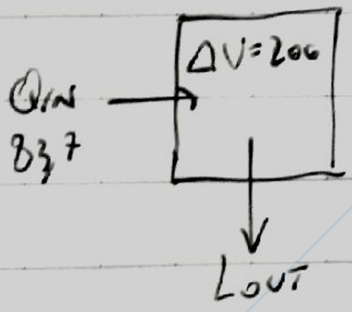
$Q_{IN} = 20\ Kcal = 83,7\ KJ$

$Q_{IN} + L_{IN} = \Delta U$

$83,7 + L_{IN} = 200$

$L_{IN} = 200 - 83,7 = +116,3\ kJ$

con convenzione uscente:



$Q_{IN} - L_{OUT} = \Delta U$

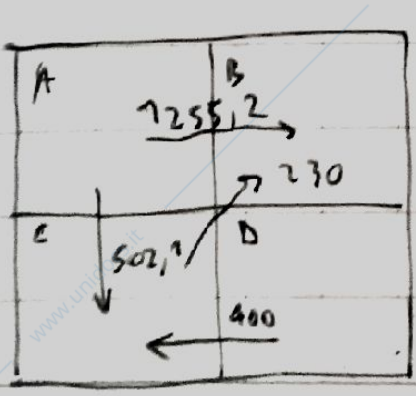
$83,7 - L_{OUT} = 200$

$L_{OUT} = -116,3\ kJ$

significa che è entrante

N.B. Dichiarare le convenzioni all'inizio dell'esercizio e poi non cambiarle durante.

② (1.4)

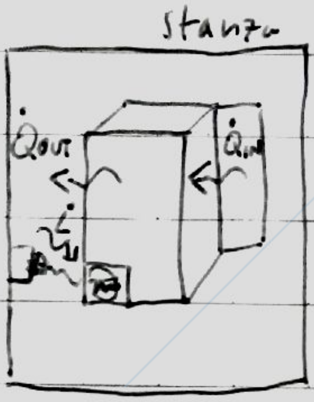


$Q_{AB} = 300\ kcal = 1255,2\ kJ$

$Q_{AC} = 120\ kcal = 502,08$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta U_A = -1255,2 - 502,1 = -1757,3 \\ \Delta U_B = +1255,2 + 230 = 1485,2 \\ \Delta U_C = 502,1 + 400 - 230 = 672,1 \\ \Delta U_D = -400 = -400 \end{array}\right\} = 0$$

③ (1.5)

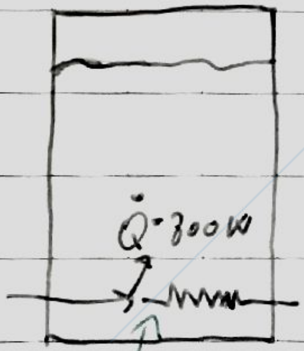


Se è in condizioni stazionarie $\dot{Q}_{OUT}$ è uguale a $\dot{Q}_{IN} + \dot{L}$

↓

In generale la stanza si scalda

④ (2.1)



lavoro elettrico si trasforma in calore nella resistenza

$m_{H_2O} = 1\,kg$ - chiuso

$T_i = 20°C$ - non stazionario

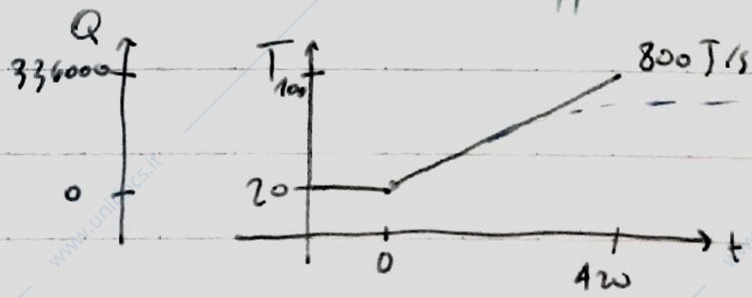
$T_f = 100°C$

$c_{H_2O} = 4184\,J/kg \cdot K$

$$Q_{H_2O} = mc\Delta T = 1 \cdot 4184 \cdot 80 \simeq 336\,kJ = $$
$$= \dot{Q} \cdot \Delta t$$

$$\hookrightarrow \Delta t = \frac{336000}{800} = 420\,s = 6\,min.$$

Abbiamo fatto delle approssimazioni:



→ nella realtà però una pentola non è completamente isolata e a un certo punto potrebbe avere delle dispersioni

• poi si scalda non solo l'acqua, ma anche la massa del bollitore

(5.) (2.2)

oltre ai dati dell'esercizio precedente abbiamo:

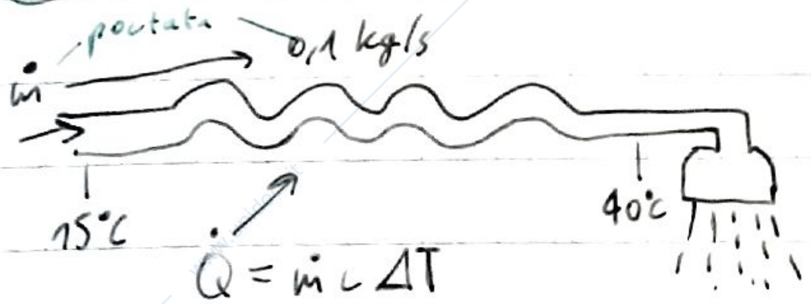
$m_{Fe} = 0,4 \ kg$ $\quad c_{Fe} = 500 \ \frac{J}{kg \cdot K}$

$Q_{Fe} = 0,4 \cdot 500 \cdot 80 = 16000$

$Q_{TOT} = Q_{H_2O} + Q_{Fe} = 352000 \ J$

$\Delta t_{TOT} = \frac{352000}{800} = 440 \ s$

(6) (2.3)



- Aperto
- Stazionario

$\dot{Q} = \dot{m} \, c \, \Delta T$

↳ $\dot{Q} = 0,1 \cdot 4184 \cdot 25 \simeq 10550 \ W$

4

Mo Tu ~~We~~ Th Fr Sa Su

No. FISICA TECNICA

Date 25 09 19

7 (2, 4)

$V = 30\ l = 0{,}030\ m^3$

$P = 100\ bar = 100 \cdot 10^5$

$T = 20°C = 293\ K$

$R_{N_2} = \dfrac{8314}{28}$

$pV = mRT$

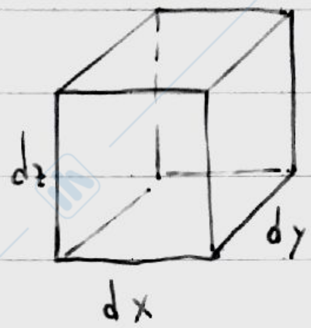
$m = \dfrac{100 \cdot 10^5 \cdot 0{,}030}{8314 \cdot 293} = 3{,}45\ kg$

5

No. FISICA TECNICA

Date 25 · 09 · 19

$T(x, y, z, t)$



$$\dot{Q}_{generato} + \dot{Q}_{flussi\ IN} = \dot{Q}_{flussi\ OUT} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

$\dot{Q}_{x|x,y,z}$ $\quad$ $\dot{Q}_{x|x+dx,y,z}$ $\quad$ $\rho c\, dv \frac{\partial T}{\partial t}$

$\dot{Q}_{y|x,y,z}$ $\quad$ $\dot{Q}_{y|x,y+dy,z}$

$\dot{Q}_{z|x,y,z}$ $\quad$ $\dot{Q}_{z|x,y,z+dz}$

$$\rightarrow \frac{\dot{g}}{\lambda} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Se il sistema è stazionario $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$

Se il sistema è monodimensionale, bidimensionale possono sparire $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

es. <u>Corpo a temperatura omogenea</u>

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\dot{g}}{\lambda} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\dot{g}}{\rho c}$$

No. FISICA TECNICA

Date 25.09.19

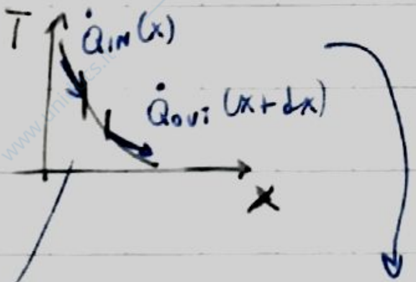
es.

$T(x,t)$

$\dot{g} = 0$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

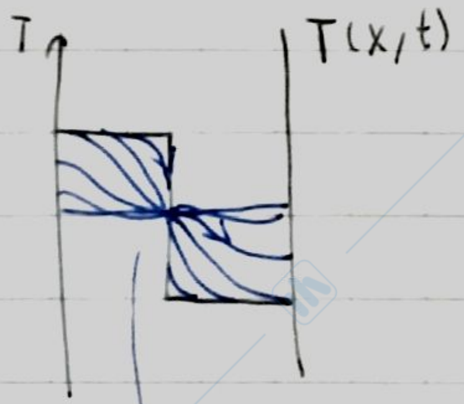
Ipotizziamo che il profilo abbia questa forma:



+ è pendente + c'è flusso

Se il bilancio tra ciò che esce e ciò che entra è positivo la temperatura aumenta

Immaginiamo di avere un profilo:



il calore fluisce da una parte all'altra

Distribuzione di temperatura in una parete piana con generazione interna

→ Parete piana, $\dot{g}$

$$\frac{\dot{g}}{\lambda} + \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{g}}{\lambda}$$

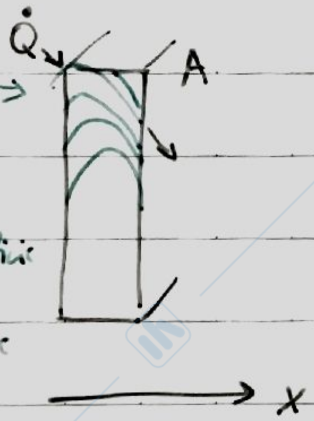
↓ integro

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{g}}{\lambda}x + B$$

↓ integro

$$T(x) = -\frac{\dot{g}}{2\lambda}x^2 + Bx + C$$

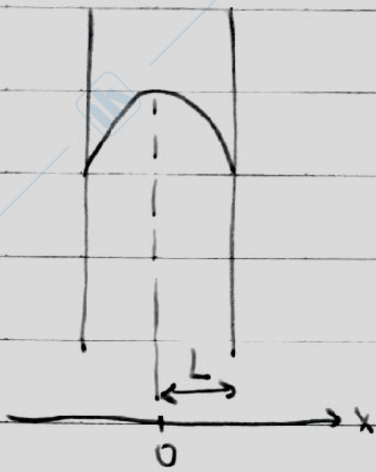
il vertice della parabola può essere sulla superficie o esterno alla parete →



profilo di temperatura : parabola

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

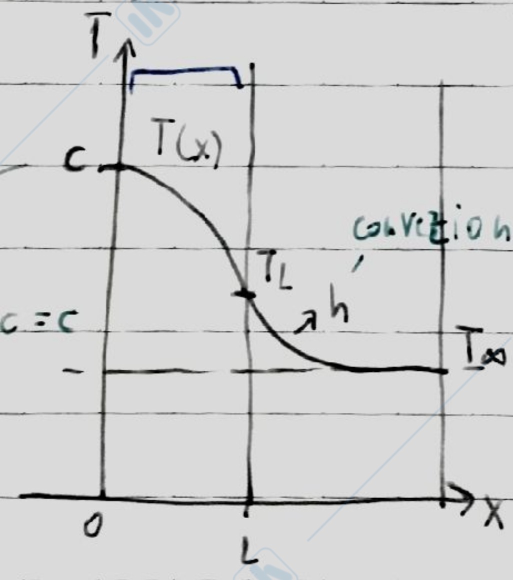
Parete simmetrica con condizioni convettive



vertice in 0

$$T(x) = -\frac{\dot{g}}{2\lambda}x^2 + \cancel{Bx} + C \qquad B = 0$$

posso fare



poiché $T(x=0) = -\frac{\dot{g}\cdot 0^2}{2\lambda} + C = C$

smaltisce il calore generato in

convezione

es. aria intorno

sistema stazionario

$$\dot{Q}_{GENERATO} = \dot{Q}_{CONVETTIVO} \qquad (\Delta U = 0)$$

Se è espresso in $\frac{W}{m^3}$ lo dobbiamo moltiplicare per un volume così via in altri casi

$$\dot{g}\cdot V = h\cdot A\cdot \Delta T_{conv} \qquad (T_L - T_\infty)$$

$$\dot{g}\cdot \cancel{A}\cdot L = h\,\cancel{A}\,\Delta T_{conv}$$

$$\Delta T_{conv} = \frac{\dot{g}L}{h}$$

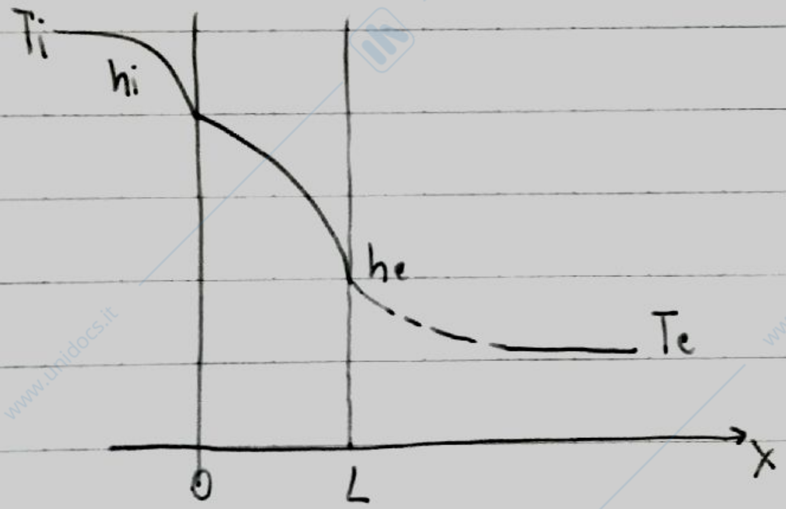
$$\Delta T_{COND} = T(0) - T(L) = \left(-\cancel{\frac{\dot{q}}{2\lambda} 0^2} + \cancel{C}\right) - \left(-\frac{\dot{q}}{2\lambda} L^2 + \cancel{C}\right) =$$

$$\hookrightarrow \Delta T_{COND} = +\frac{\dot{q}}{2\lambda} L^2$$

<u>N.B</u> $\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$ → non è omogeneo

↳ <u>NO</u> $\dot{Q} = -\lambda A \Delta T$

Il problema completo (considerando altre condiz. conv.) è:



$$T(x) = -\frac{\dot{q}}{2\lambda} x^2 + Bx + C$$

$$\dot{Q}_{CONV}(x=0) = \dot{Q}_{COND}(x=0)$$

$$hA\Delta T = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

$$h \cdot \cancel{A} \cdot (T_i - T_0) = -\lambda \cdot \cancel{A} \cdot \left(-\frac{\dot{q}}{\lambda} x + B\right)\Big|_{x=0}$$

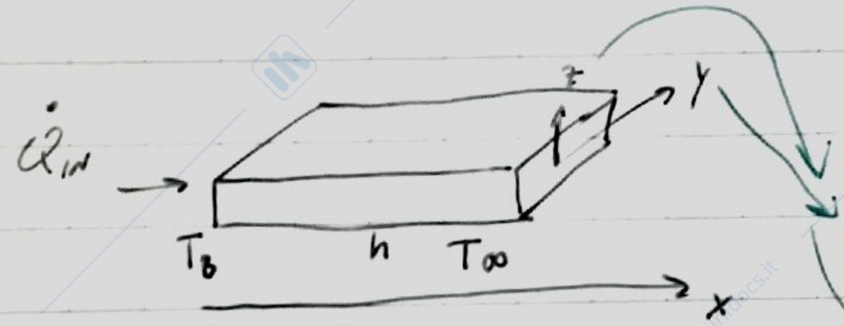
$$h A \Delta T_{i-e} = -\lambda A \cdot \frac{dT}{dx}\Big|_{x=L}$$

$$h_c(T_L - T_c) = -\lambda\left(-\frac{\dot{g}}{\lambda}L + B\right)$$

$$-\frac{\dot{g}}{2\lambda}L^2 + BL + C$$

Al. Ht. (barra)

Immaginiamo di avere una barra di materiale



$T(x)$

y, z trascurabili

→ temperatura quasi omogenea

$$\dot{Q}_{conv} = h \cdot A \cdot \Delta T$$

Come troviamo il profilo di temperatura $T(x)$?

→ Abbiamo: $T_B - T_x = 0$

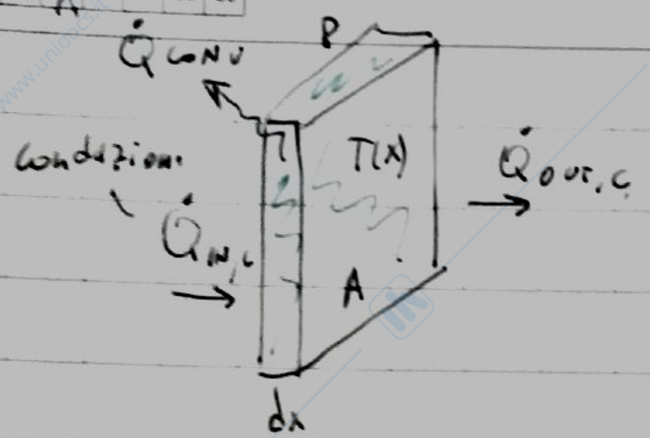
T_∞

h

A

P – perimetro

λ



$$\dot{Q}_{in,x} = -\lambda A \frac{dT}{dx}\Big|_x$$

$$\dot{Q}_{out,x+dx} = -\lambda A \frac{dT}{dx}\Big|_{x+dx}$$

$$\dot{Q}_{conv,out} = h \overbrace{P\,dx}^{\text{area } \xi} (T_x - T_\infty)$$

serie di Taylor arrestata al 1° termine

$$\dot{Q}_{x+dx} = -\lambda A \frac{dT}{dx}\Big|_{x+dx} = -\lambda A \left(\frac{dT}{dx}\Big|_x + \frac{d}{dx}\frac{dT}{dx}\Big|_x dx\right) =$$

EQUAZIONE DI BILANCIO

$$\boxed{-\lambda A \frac{dT}{dx}\Big|_x = -\lambda A \left(\frac{dT}{dx}\Big|_x + \frac{d^2T}{dx^2}dx\right) + hP\,dx\,(T_x - T_\infty)}$$

lo chiamiamo $\theta(x)$

$$\frac{d^2T}{dx^2}\cancel{dx} = \frac{hP}{\lambda A}(T(x) - T_\infty)\cancel{dx}$$

$\frac{hP}{\lambda A}$ → la chiamiamo m^2

$T'' = \theta''$ tanto T_∞ è una costante

$$\theta'' = m^2\theta$$

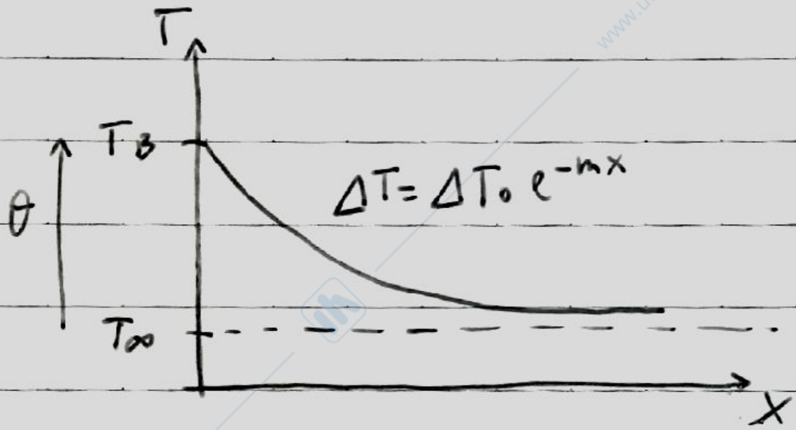
↳ funzione per: esponenziali, seno e cos.

Questo è il profilo

$$\theta = C_1 e^{-mx} \qquad \theta = C_2 e^{+mx}$$

Va bene qualsiasi comb. lineare di queste soluzioni

$$\hookrightarrow \quad \theta = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}$$



$x = 0 \quad \theta = \theta_0 \quad \theta_0 = C_1 + \cancel{C_2} \leftarrow \leftarrow$ Perciò

$x = \infty \quad \theta = 0 \quad 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot e^{+\infty} \rightarrow C_2 = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\theta}_{T_{(x)} - T_\infty} = \theta_0 e^{-mx}$$

$$T_{(x)} - T_\infty = (T_B - T_\infty) e^{-mx}$$

$$T(x) = T_\infty + (T_B - T_\infty) e^{-mx}$$

Analisi dimensionale m

$$\sqrt{\frac{hP}{\lambda A}} \rightarrow \sqrt{\frac{\cancel{W} \cdot \cancel{L} \cdot \cancel{L} \cdot \cancel{K}}{L^2 \cancel{K} \cancel{W} \cdot \cancel{L^2}}} \rightarrow m = \left[\frac{1}{L}\right]$$

Possiamo considerare l'aletta infinita a 99-sta distanza