TRASMISSIONE DEL CALORE:

24/05

Il calore passa spontaneamente da un oggetto a temperatura maggiore a uno a temperatura minore, questo è quello che l'esperienza ci dice. E in generale, il passaggio di calore è facilitato tanto quanto è maggiore il salto di temperatura.
Tuttavia, bisogna fare una precisazione: se presi due corpi a $T_1 = T_2$ non è detto che $Q_{\vec{12}} = 0$! É tuttavia vero che la potenza termica associata a $Q_{\vec{12}}$, ossia $\dot{Q}_{\vec{12}}$ si annulla.
Quindi, per $T_1 = T_2$: $\dot{Q}_{\vec{12}} = 0$.
Inoltre, lo scambio termico è facilitato anche dalla superficie di scambio: maggiore è la superficie di scambio, maggiore è la potenza termica associata.

Ricapitolando: $\dot{Q} \propto A, \Delta T$

Abbiamo, quindi, bisogno di un coefficiente che ci permetta di scrivere:

$$\dot{Q} = c \cdot A \cdot \Delta T$$

$$\rightsquigarrow \dot{Q} = \frac{\Delta T}{\frac{1}{cA}} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{cA}}$$

Possiamo dire che quanto scritto ricorda molto un'altra relazione di elettrotecnica:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

Sostanzialmente, modellando così lo scambio di calore otteniamo che questo dipende da un fattore $\frac{1}{cA}$, che a sua volta dipende dal meccanismo di scambio termico.
I meccanismi di scambio termico sono 3:

1) CONDUZIONE
2) CONVEZIONE

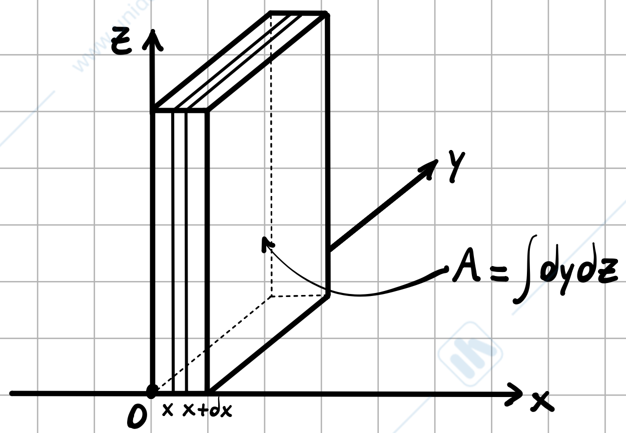
} dipendenza dalla massa (intesa come presenza di materia)

3) IRRAGGIAMENTO $\rightsquigarrow$ indipendente dalla presenza di materia

Parliamo di conduzione quando abbiamo oggetti MACROSCOPICAMENTE fermi messi in contatto. La convezione dipende, inoltre, da altri due fenomeni: l'AVVEZIONE e la DIFFUSIONE.
Parliamo invece di convezione quando si ha un trasporto di masse MACROSCOPICO: ad esempio con i caloriferi.
Per questo motivo è più difficile descrivere il secondo fenomeno: lo scambio termico non può prescindere dal movimento del fluido (o della massa in generale).

CONDUZIONE:

Consideriamo una lastra posta verticalmente:



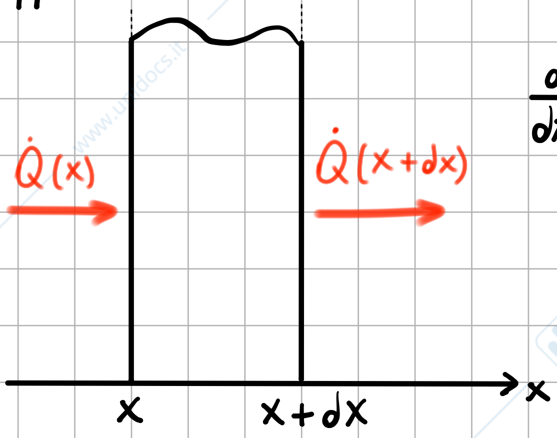
↝ valutiamone una porzione infinitesima dx.
Se chiamo A l'area della lastra, il volume di tale lastra è:

$dV^{(1)} = A\,dx$ dove (1) = infinitesimo del primo ordine

$\leadsto dM^{(1)} = \rho\, dV^{(1)}$

$dE^{(1)} = e\, dM^{(1)} = \rho e\, dV^{(1)}$

Supponendo che il calore vada da SX a DX della lastra:



$$\frac{d}{dt}(dE) = \dot{Q}^{\rightarrow}(x) - \dot{Q}^{\rightarrow}(x+dx)$$

$$= \cancel{\dot{Q}(x)} - \left[\cancel{\dot{Q}(x)} + \frac{d\dot{Q}(x)}{dx}dx + \cancel{o(dx^2)}^{\,0}\right]$$

$$= -\frac{d\dot{Q}^{\rightarrow}}{dx}dx$$

↝ sapendo che $dE = \rho e A\, dx$:

$$\frac{d}{dt}(\rho e A dx) = -\frac{d\dot{Q}^{\rightarrow}}{dx}dx$$

perché la lastra NON si muove

$$\frac{d}{dt}(\rho e A)\cancel{dx} + \cancel{\rho e A \frac{dx}{dt}} = -\frac{d\dot{Q}^{\rightarrow}}{dx}\cancel{dx}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt}(\rho e A) = -\frac{d\dot{Q}^{\rightarrow}}{dx}$$

$\rho = cost.$ e $A = cost.$

$$\rho A \frac{de}{dt} = -\frac{d\dot{Q}^{\rightarrow}}{dx}$$

che rappresenta l'equazione di conservazione dell'energia.

Inoltre, $e = \cancelto{0}{e_k} + \cancelto{0}{e_p} + \dots + \bar{u}$.
Ipotizzando di trascurare energia cinetica, potenziale...

$$\rho A \frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{d\dot{Q}^{\rightarrow}}{dx} \quad (1)$$

Inoltre, come abbiamo studiato:

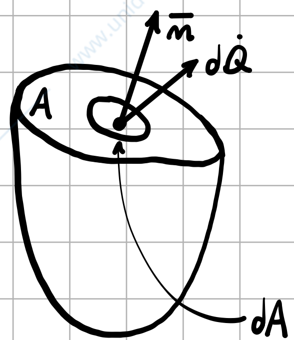
$$\bar{u} = \tilde{u}(T,p) = \begin{cases} \text{gas perfetto: } \bar{u} = \bar{u}_0 + c_v(T - T_0) = (\bar{u}_0 - c_v T_0) + c_v T \\ \text{mezzi incomprimibili: } \bar{u} = \bar{u}_0 + c(T - T_0) = (\bar{u}_0 - cT_0) + cT \end{cases}$$

Per questi due casi:

$\frac{d\bar{u}}{dt} = c_v \frac{dT}{dt}$ dove si può sostituire c a c_v.

⇝ questo perché il termine $(\bar{u}_0 - c_v T_0)$ è a tutti gli effetti una costante e quindi derivandolo si annulla.

Posso inoltre scrivere: $\dot{Q} = qA$ con $q = \frac{d\dot{Q}}{dA}$ = **FLUSSO TERMICO**



$$q = \tilde{q}(P, \bar{n}) \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

$$q = \bar{q} \cdot \bar{n}$$

Allora, riportando tutto nella (1):

$$\rho A c_v \frac{dT}{dt} = -\frac{d(qA)}{dx} = -A\frac{dq}{dx}$$

$\frac{dA}{dx} = 0$

$$\rightsquigarrow \rho \cancel{A} c_v \frac{dT}{dt} = -\cancel{A}\frac{dq}{dx}$$

$$\rightsquigarrow \rho c_v \frac{dT}{dt} = -\frac{dq}{dx}$$

Siccome l'equazione si presenta in due incognite (T e q) abbiamo bisogno di un'altra equazione che ci permetta di risolvere il sistema... Andiamo avanti con la trattazione:

$$q \propto \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta X} = \frac{dT}{dx}$$

o in altre parole, il flusso termico è proporzionale a una diff. di temperatura spaziale

Vogliamo quantificare tale proporzionalità:

$q = \kappa \frac{dT}{dx}$ con κ = costante di proporzionalità

$\rightsquigarrow$ quella appena scritta prende il nome di **LEGGE DI FOURIER**.
Analizziamola un secondo:
per $\frac{dT}{dx} > 0$, $q < 0$ e viceversa. Ovvia, $\frac{dT}{dx}$ e q sono discordi!

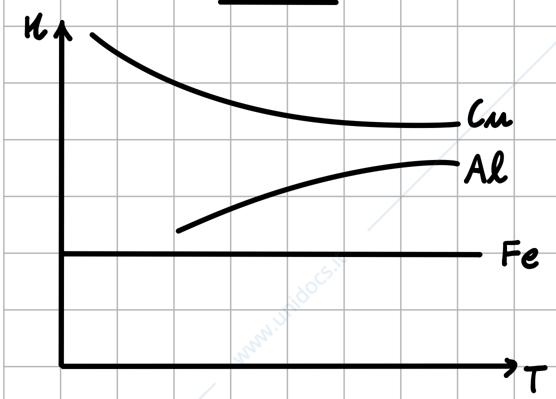
In altre parole, $\kappa < 0$. Scriviamo la legge in modo tale che $\kappa > 0$:

$$q = \kappa \frac{dT}{dx} = -\kappa \frac{dT}{dx} \quad \text{con} \quad \kappa > 0$$

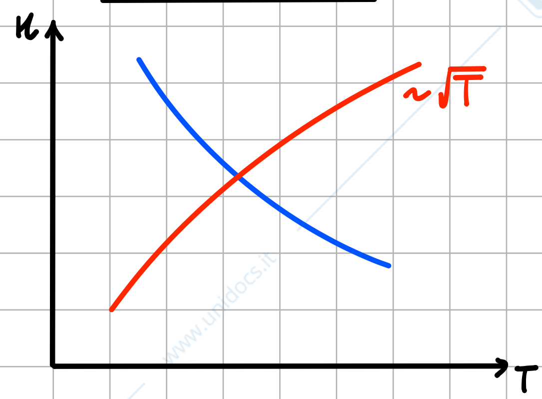
κ = **CONDUTTIVITÀ** é una proprietà

Per capire da quante variabili dipende κ si puó usare la REGOLA DELLE FASI DI GIBBS. Se la lamina é fatta di un materiale puro κ dipenderá da due sole variabili: T e p. Sperimentalmente si vede peró che κ dipende esclusivamente da T e l'effetto della pressione è trascurabile:
$\kappa = \tilde{\kappa}(T, p) \cong \tilde{\kappa}(T)$

SOLIDI



LIQUIDI e GAS



Noi comunque lavoreremo sempre con κ che non dipende né da T né da p, ossia considereremo $\kappa = \text{cost.}$
Comunque, abbiamo trovato la seconda relazione di cui avevamo bisogno:

$$\begin{cases} \rho c_v \dfrac{dT}{dt} = -\dfrac{dq}{dx} \\ q = -\kappa \dfrac{dT}{dx} \end{cases} \Longrightarrow \rho c_v \frac{dT}{dt} = -\frac{d}{dx}\left(-\kappa \frac{dT}{dx}\right)$$

$$\rightsquigarrow \rho c_v \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\kappa \frac{dT}{dx}\right)$$

$\rightarrow 0$ per l'ipotesi fatta prima...

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \cancel{\frac{d\kappa(T,p)}{dx}} \cdot \frac{dT}{dx} + \kappa \frac{d^2T}{dx^2}$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \kappa \frac{d^2T}{dx^2}$$

Siccome T abbiamo detto dipendere da t e da x, la forma corretta in cui scrivere l'equazione è la seguente:

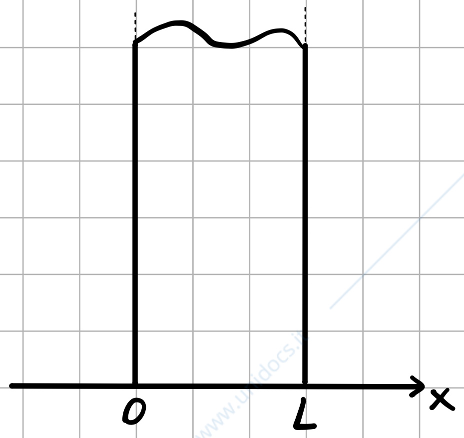
$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

EQUAZIONE DI FOURIER

ricordiamo che questa parte dell'equazione è stata ricavata da un bilancio energetico.
Se consideriamo STATI STAZIONARI, $\rho c_v \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial T}{\partial t} = 0$

Quindi, $\kappa \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \rightsquigarrow \dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$

$\rightsquigarrow$ integrando questa semplice equazione:



$$\frac{dT}{dx} = c_1 \rightsquigarrow T = c_1 x + c_2$$

impongo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} T(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = T_1 \\ T(L) = c_1 \cdot L + c_2 = T_2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = T_1 \\ c_1 = \dfrac{T_2 - T_1}{L} = -\dfrac{T_1 - T_2}{L} \end{cases}$$

$$T = c_1 x + c_2 =$$

$$\rightsquigarrow q = -k\frac{dT}{dx} = -k\frac{d}{dx}\left[T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L}x\right] = k\frac{T_1 - T_2}{L}$$

$$\dot{Q} = \int \bar{q}\cdot\bar{n}\, dA = k\frac{T_1 - T_2}{L}A = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{kA}} = \frac{T_1 - T_2}{R_k} \quad \text{con } R_k = \frac{L}{kA}$$

R_k = **RESISTENZA TERMICA CONDUTTIVA** che rappresenta l'analogia fisica con i circuiti elettrici.

All'aumentare di R_k diminuisce lo scambio termico. Infatti, l'ideale per gli scambiatori di calore è che abbiano grosse superfici di scambio e che siano molto sottili.