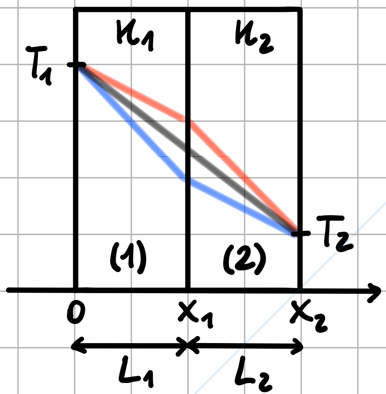
La scorsa lezione abbiamo introdotto la trasmissione del calore. 21/05
Vediamone ora un caso pratico: consideriamo due lastre messe a contatto, come in figura:



$$\begin{cases} \dfrac{d^2T^{(1)}}{dx^2}=0 \\ \dfrac{d^2T^{(2)}}{dx^2}=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti:
$T^{(1)}(0)=T_1$
$T^{(2)}(x_2)=T_2$

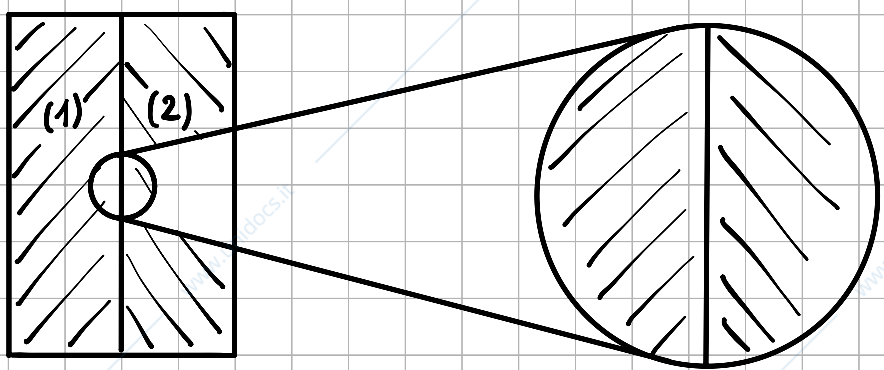
Non abbiamo abbastanza informazioni, dobbiamo trovare una condizione di raccordo:
CONDIZIONI DI RACCORDO ALL' INTERFACCIA:
1) $|q^{(1)}(x_1)|=|q^{(2)}(x_1)|$
2) $T^{(1)}(x_1)=T^{(2)}(x_1)$

1) $$\left|k_1\frac{dT^{(1)}}{dx}\right|_{x_1}=\left|k_2\frac{dT^{(2)}}{dx}\right|_{x_1}$$
$$\left|\frac{dT^{(1)}}{dx}\right|_{x_1}=\frac{k_2}{k_1}\left|\frac{dT^{(2)}}{dx}\right|_{x_1}$$
dove possiamo portare i k fuori dai moduli siccome $k>0$ sempre!

Quindi, la pendenza delle due funzioni $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$ dipende dal rapporto fra le conduttività dei due materiali delle due lamine.
In particolare avremo:

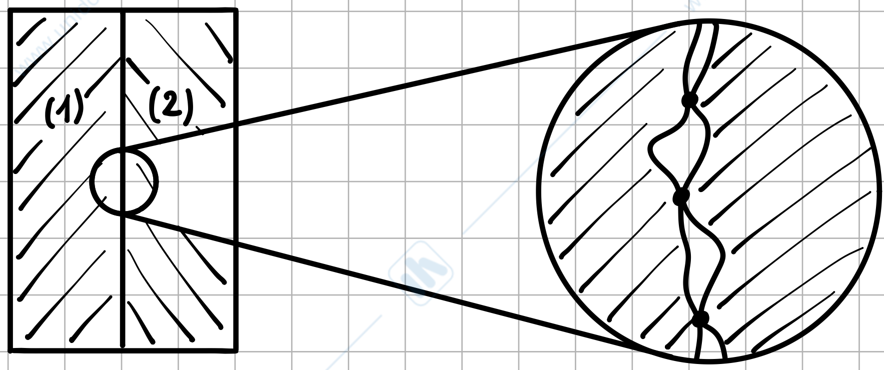
- se $k_1=k_2$
- se $k_1>k_2$
- se $k_1<k_2$

2) Questa condizione vale solo nell'ipotesi di interfaccia "ideale".



contatto "perfetto"

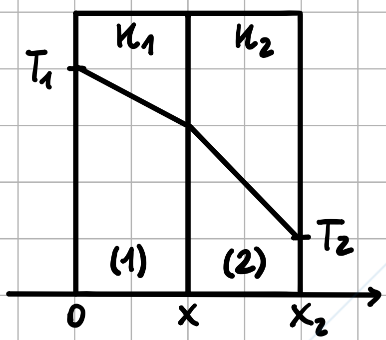
Se si considera una superficie reale questa ipotesi non vale più:



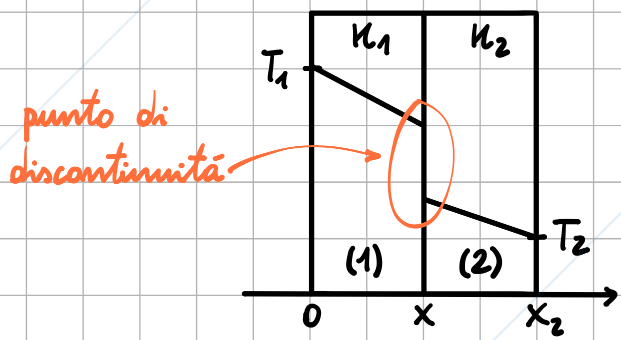
contatto "imperfetto", solo attraverso "ponti termici".

→ si considera un ulteriore resistenza termica dove non c'è contatto. Nelle applicazioni reali per abbassare questo effetto si usa un liquido deformabile che riempia gli spazi vuoti.

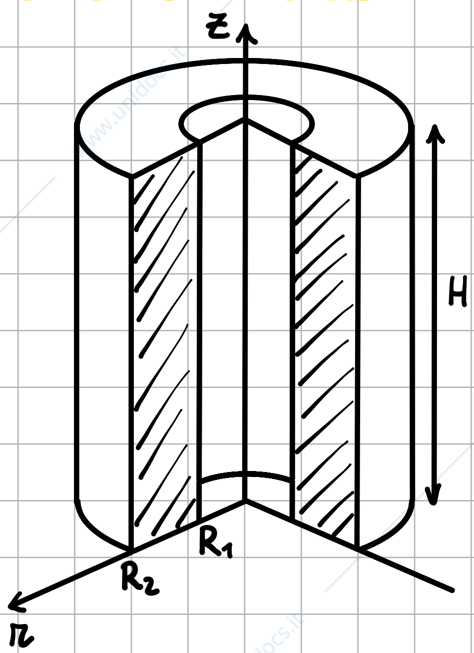
IDEALE:

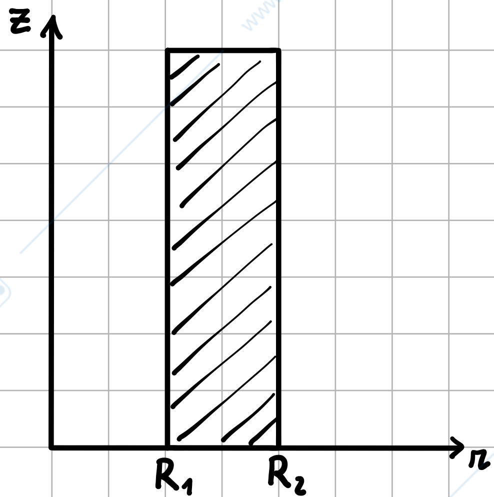


REALE:



GEOMETRIA CILINDRICA:





Possiamo studiare questa geometria e scrivere le formule associate a tale geometria...

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{d\dot{Q}}{dr} \rightsquigarrow \frac{d\dot{Q}}{dr} = 0$$

$\frac{dE}{dt}$: 0 per S.S.

$$\frac{d(qA)}{dr} = 0 \quad \text{con} \quad A = 2\pi H r$$
$$q = -k\frac{dT}{dr}$$

$$\frac{d}{dr}\left[-k\frac{dT}{dr}\cdot 2\pi H r\right] = 0$$

$$2\pi H k \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \iff r\frac{dT}{dr} = c_1$$

$$\rightsquigarrow \frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r} \implies T = c_1 \ln r + c_2$$

Dove abbiamo, quindi, che la temperatura dipende da due costanti: usiamo le condizioni al contorno per determinarle:

$$\begin{cases} T(R_1) = c_1 \ln R_1 + c_2 = T_1 \\ T(R_2) = c_1 \ln R_2 + c_2 = T_2 \end{cases}$$

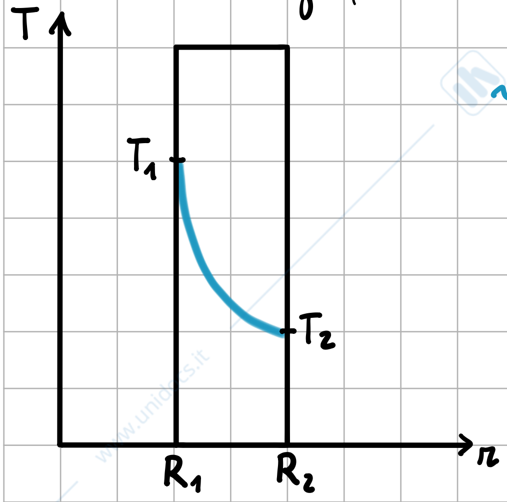
Sottraendo le due equazioni e applicando le proprietà dei logaritmi:

$$T_1 - T_2 = c_1 \ln\frac{R_1}{R_2} \rightsquigarrow \text{quindi, } c_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}}$$

$$\rightsquigarrow q = -k\frac{dT}{dr} = -k\frac{c_1}{r} = -\frac{k}{r}\frac{T_1 - T_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}} = \frac{k(T_1 - T_2)}{r\ln(R_2/R_1)}$$

$$\rightsquigarrow \dot{Q} = qA = \frac{k(T_1 - T_2)}{\cancel{r}\ln(R_2/R_1)}\cdot 2\pi\cancel{r}H = 2\pi H k\frac{(T_1 - T_2)}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{T_1 - T_2}{\frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi H k}} = \frac{T_1 - T_2}{R_k} \quad \text{con} \quad R_k = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi H k}$$

Abbiamo, quindi, trovato l'espressione della resistenza termica conduttiva R_K per la geometria cilindrica.
La resistenza aumenta all'aumentare del rapporto $\frac{R_2}{R_1}$ e diminuisce all'aumentare di H.
Ora vediamo graficamente come varia l'espressione di T:

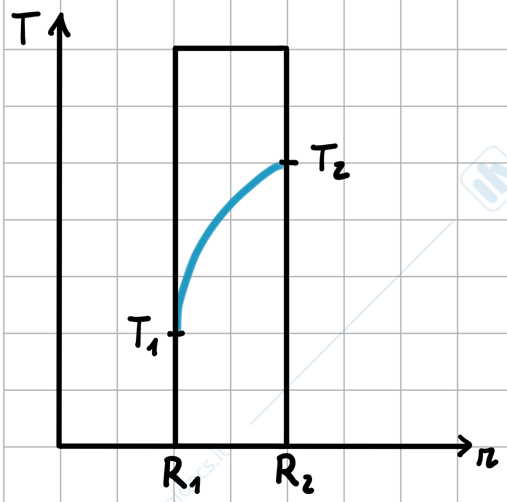


↝ questo perché $T = c_1 \ln r + c_2$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r}$$

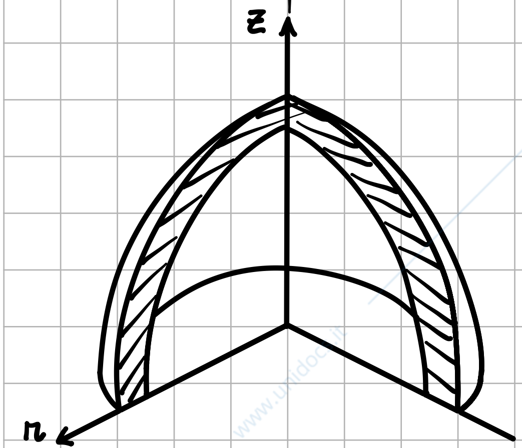
quindi, all'aumentare di r diminuisce la derivata di T.

Se invece invertiamo le temperature:



GEOMETRIA SFERICA:

È la meno frequente da trovare...



$$\underbrace{\frac{dE}{dt}}_{0 \text{ per S.S.}} = -\frac{d\dot{Q}}{dr} \rightsquigarrow \frac{d\dot{Q}}{dr} = 0$$

$$\frac{d(qA)}{dr} = 0 \quad \text{con} \quad A = 4\pi r^2$$

$$q = -k\frac{dT}{dr}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dr}\left[-k\frac{dT}{dr} \cdot 4\pi r^2\right] = 0$$

$$\rightsquigarrow 4\pi k \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) = 0 \Longrightarrow r^2 \frac{dT}{dr} = C_1$$

$$\rightsquigarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \Longrightarrow T = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

$\rightsquigarrow$ impongo le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} T(R_1) = -\dfrac{C_1}{R_1} + C_2 = T_1 \\ T(R_2) = -\dfrac{C_1}{R_2} + C_2 = T_2 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni:

$$-C_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = T_1 - T_2$$

quindi, $C_1 = -\dfrac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$

$$\rightsquigarrow q = -k\frac{dT}{dr} = -k \cdot \frac{C_1}{r^2} = k\,\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\rightsquigarrow \dot{Q} = qA = k\,\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \cdot \frac{1}{\cancel{r^2}}\, 4\pi \cancel{r^2}$$

$$= 4\pi k\,\frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$

$$= \frac{T_1 - T_2}{\frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{4\pi k}} = \frac{T_1 - T_2}{R_k} \quad \text{con } R_k = \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}{4\pi k}$$

RESISTENZA CONVETTIVA:

Come dicevamo, oltre alla conduzione, un altro meccanismo di scambio del calore è la convezione.
In generale, per lo studio di questo fenomeno si dovrebbero risolvere numericamente le equazioni di Navier-Stokes. Per semplicità noi faremo il seguente discorso...

$\dot{Q} \propto A(T_w - T_\infty)$

$\rightsquigarrow \dot{Q} = hA(T_w - T_\infty)$ dove h = coefficiente di proporzionalità
T_w = temperatura in prossimità della superficie di contatto
T_∞ = temperatura a distanza "infinita" dalla superficie di contatto

ossia, $\dot{Q} = \dfrac{T_w - T_\infty}{\frac{1}{hA}} = \dfrac{T_w - T_\infty}{R_{con}}$ con $R_{conv} = \dfrac{1}{hA}$

Più avanti studieremo come quantificare il coefficiente h...

TABELLA RIEPILOGO RESISTENZE:

GEOM.	R_k	R_{conv}
PIANA	$\dfrac{L}{kA}$	$\dfrac{1}{hA}$
CIL.	$\dfrac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi Hk}$	$\dfrac{1}{h2\pi Hr}$
SFERA	$\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)\dfrac{1}{4\pi k}$	$\dfrac{1}{h4\pi r^2}$

GENERAZIONE DI POTENZA:

A volte nel sistema ci possono essere trasformazioni energetiche che portano a variazioni di energia interna. Un chiaro esempio di questa cosa la si ha con l'effetto Joule delle correnti elettriche: quando si ha passaggio di corrente elettrica, parte dell'energia viene dissipata aumentando l'energia interna del conduttore attraversato. L'aumento di energia interna provoca un aumento della temperatura, che noi sentiamo come "riscaldamento" del conduttore stesso.
In questi casi è utile disaccoppiare le due "fisiche" lasciando solo un termine di "accoppiamento" che comparirà con segno opposto nelle equazioni delle due fisiche...

Nel nostro caso...

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}^{\leftarrow} + \Sigma$$

chiamo $\sigma = \frac{d\Sigma}{dV}$ = "generazioni/distruzione" di potenza per unità di volume.

$$\rightsquigarrow -\frac{d\dot{Q}}{dx}dx + \sigma \, dV = 0 \quad \leftarrow \text{s.s.}$$

$$-\frac{d\dot{Q}}{dx}dx + \sigma A \, dx = 0$$

$$-\frac{d(qA)}{dx}\cancel{dx} + \sigma A \cancel{dx} = 0$$

$$-\frac{d}{dx}\left(-k\frac{dT}{dx}A\right) + \sigma A = 0$$

$$k\frac{d}{dx}\left(A\frac{dT}{dx}\right) + \sigma A = 0$$

→ geom. piana $k\cancel{A}\frac{d^2T}{dx^2} + \sigma \cancel{A} = 0$

→ geom. cilindrica $k\frac{d}{dr}\left(\cancel{2\pi} r \cancel{H} \cdot \frac{dT}{dr}\right) + \cancel{2\pi} r \cancel{H}\sigma = 0$

$$k\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \sigma r = 0$$

Integrando le due equazioni trovate si ricava l'espressione della temperatura con il termine di dissipazione σ...

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari