Politecnico di Milano – Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

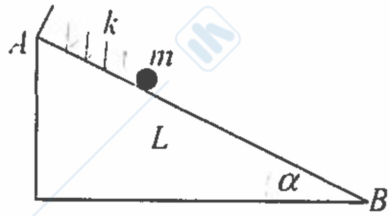
27/4/2018
ore 16.30

FISICA (prima prova in itinere)

Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti

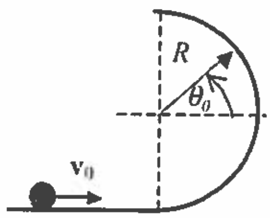
1.

Un corpo di massa m è collegato ad una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. L'altro estremo della molla è fissato alla sommità A di un piano scabro di lunghezza L, inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Sapendo che il corpo è inizialmente fermo in A e che raggiunge il punto B con velocità nulla, si calcoli il coefficiente di attrito dinamico tra il piano ed il corpo.



2.

Un corpo puntiforme viene lanciato con velocità v_0 lungo una guida liscia costituita da un tratto rettilineo orizzontale e da una semicirconferenza di raggio R. Il corpo si stacca dalla guida in corrispondenza della posizione angolare θ_0 indicata nella figura. Si calcoli il modulo della velocità iniziale (v_0) del corpo.



3.

a) Si dica cosa si intende per campo di forze centrali a simmetria sferica.

b) Si consideri un punto materiale soggetto unicamente ad un campo di forze centrali a simmetria sferica. Si dica, giustificando la risposta, quale delle seguenti grandezze fisiche relative al punto materiale rimangono costanti durante il suo moto:

(i) l'energia cinetica;
(ii) l'energia potenziale;
(iii) l'energia meccanica;
(iv) la quantità di moto;
(v) il momento risultante delle forze rispetto al centro di forza del campo;
(vi) il momento angolare rispetto al centro di forza del campo;

Si ricorda di:

- *Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA*
- *FIRMARE l'elaborato;*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

1. $\mathcal{L}_{NC} = \Delta E$

$E_A = mgL\sin\alpha$

$E_B = \frac{1}{2}KL^2$

$\mathcal{L}_{NC} = F_A L$

$F_A = -\mu_d N$

$N = mg\cos\alpha$

$\hookrightarrow -\mu_d mg\cos(\alpha)L = \frac{1}{2}KL^2 - mgL\sin(\alpha)$

$$\mu_d = \tan(\alpha) - \frac{KL}{2mg\cos(\alpha)}$$

2. Condizione di distacco: $N = 0$ in ϑ_0 con N la reazione normale della guida.
Poichè tutte le forze che compiono lavoro sono conservative, l'energia meccanica si conserva

$E_A = E_B$ con $E_A = \frac{1}{2}mv_0^2$

$E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgH$

- essendo $H = R + R\sin\vartheta_0$ la quota del punto di distacco B rispetto al suolo (A).

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 + R(1+\sin(\vartheta_0))\cancel{m}g$$

Ricaviamo $v_0^2 = v_B^2 + 2gR(1+\sin(\vartheta_0))$ (*)

Lungo la guida circolare, il moto è governato dalla legge seguente (II principio della Dinamica Newtoniana):

$\hat{u}_N$: $F_N = m\,a_N$, con $F_N = N + mg\sin(\vartheta)$

$\hat{u}_T$: $F_T = m\,a_T$, con $F_T = -mg\cos(\vartheta)$

Nelle equazioni precedenti $a_N = \frac{v^2(\vartheta)}{R}$ è l'accelerazione normale (centripeta) del moto e a_T l'accelerazione tangenziale.

In particolare quindi abbiamo la seguente equazione per il moto in direzione normale $N + mg\sin(\vartheta) = m\,v^2(\vartheta)/R$

Nel punto di distacco B, è $\vartheta = \vartheta_0$, e inoltre risulta (condizione di distacco) $N = 0$, da cui $\cancel{m}g\sin(\vartheta_0) = \cancel{m}v_B^2/R$

e infine $v_B^2 = gR\sin(\vartheta_0)$.

Sostituendo tale espressione per v_B^2 nella equazione (*) ricaviamo infine

$$v_0 = \sqrt{gR[2+3\sin(\vartheta_0)]}$$

3.a) Si tratta di un campo vettoriale caratterizzato dalla seguente forma funzionale:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{u}_r$$

con $\hat{u}_r$ versore radiale uscente da un punto (fisso) detto centro di forza del campo e $F(r)$ una funzione scalare della distanza r del punto considerato dal centro di forza del campo.

b)

(i) Non si conserva in generale poiché in generale la forza centrale compie lavoro durante il moto quindi, in base al teorema delle forze vive, $\Delta E_c(A,B) = \mathcal{L}_{A\to B}$, anche l'energia cinetica varia durante il moto. Fa eccezione il caso di moto circolare uniforme, in cui il modulo della velocità si conserva e con esso anche l'energia cinetica.

(ii) Non si conserva in generale, poiché dipende dalla distanza dal centro di forza del campo che per un moto generico varia. Tuttavia nel caso di moto circolare uniforme la distanza dal centro di forza del campo è costante e quindi anche E_p si conserva.

(iii) Si conserva perchè le forze centrali sono conservative infatti

$$\int_{A,\gamma}^{B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{dl} = \int_{A,\gamma}^{B} F(r)\, \hat{u}_r \cdot \vec{dl} =$$

$$= \int_{A,\gamma}^{B} F(r)\, dr = \int_{A}^{B} F(r)\, dr \quad \forall \gamma$$

essendo in generale $\vec{dl} = dr\,\hat{u}_r + r\,d\vartheta\,\hat{u}_\vartheta$ r e ϑ le coordinate polari nel piano del moto con origine nel centro di forza del campo. Si applica quindi il teorema di conservazione dell'energia meccanica perchè per ipotesi il punto materiale è soggetto unicamente al campo di forze centrali, dunque tutte e sole le forze agenti sono conservative.

(iv) Non si conserva perché, valendo il secondo principio della Dinamica di Newton, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ con $\vec{F}$ la forza centrale che è per ipotesi la risultante delle forze agenti. Essa è non nulla quindi $\frac{d\vec{p}}{dt} \neq 0$ e $\vec{p}$ quindi varia nel tempo (anche nel caso di moto circolare uniforme dove $\vec{p}$ si conserva solo in modulo, non in direzione e verso).

(v) $\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times F(r)\hat{u}_r = 0$ poiché $\vec{r} = r\hat{u}_r$ è parallelo a $\vec{F}$! Quindi $\vec{\tau}_0$ non varia essendo identicamente nullo.

(vi) Valendo la II eq. cardinale per la Dinamica Newtoniana, $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0$ con O polo nel centro di forza del campo (assunto fisso nel SdR considerato) e

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$ con $\vec{F}$ risultante, si ha, per quanto osservato al punto precedente, $\vec{\tau}_0 = 0$, dunque $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = 0$. $\vec{L}_0$ quindi si conserva durante il moto che dunque si compie in un piano, il piano $\perp$ ad $\vec{L}_0$ e passante per il polo O centro di forza del campo.