21/9/2009
ore 9:15

FISICA (appello 2)

Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Polli, Torricelli

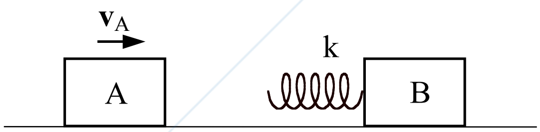
1) Le equazioni cartesiane del moto di una particella di massa *m* sono:

$$x = x_0 e^{\beta t}, \quad y = y_0 e^{-\beta t}, \quad z = 0\,,$$

dove t è il tempo e x_0, y_0, β sono costanti. Si determinino:

a) il vettore forza risultante cui la particella è sottoposta, *in funzione delle coordinate* della particella;
b) il momento angolare della particella per t = 0, rispetto all'origine del sistema di riferimento.
c) Si dica se il momento angolare varia nel tempo.

2) Un corpo A di massa m che si muove con velocità $\mathbf{v}_A$ su un piano liscio, urta una molla fissata ad un corpo B di pari massa inizialmente fermo. La molla ha massa trascurabile e costante elastica k. Considerando che, durante l'urto nell'istante di massima compressione della molla, i due corpi si muovono con la stessa velocità, si calcoli la massima compressione della molla.

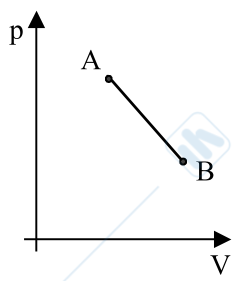


3) La densità ρ di un fluido varia con la pressione p secondo la legge ρ = kp, dove k è una costante positiva. Si determini la pressione ad una profondità z dalla superficie del fluido quando la pressione atmosferica è p_0.

4) Si enunci e si ricavi la relazione di Mayer per i gas ideali, spiegando chiaramente il significato dei simboli utilizzati.

5) Un gas perfetto monoatomico compie la trasformazione reversibile dallo stato A allo stato B descritta dal segmento rappresentato in figura. Sapendo che $V_B/V_A = 3/2$ e $p_B/p_A = ½$, si calcoli:

a) il calore scambiato;
b) la variazione di entropia (risultato da esprimere in funzione della costante dei gas *R* e del numero di moli *n*).



Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Soluzione Es.1

a) $x' = x_0 \beta e^{\beta t}$, $x'' = x_0 \beta^2 e^{\beta t} = \beta^2 x = a_x$

$y' = -y_0 \beta e^{-\beta t}$, $y'' = y_0 \beta^2 e^{-\beta t} = \beta^2 y = a_y$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m a_x \hat{u}_x + m a_y \hat{u}_y =$$
$$= m \beta^2 x \hat{u}_x + m \beta^2 y \hat{u}_y = m \beta^2 \vec{r}$$

b) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ in $t = 0$

$$\vec{L}(t=0) = \vec{r}(0) \times \vec{p}(0)$$
$$\vec{r}(0) = x_0 \hat{u}_x + y_0 \hat{u}_y$$
$$\vec{p}(0) = m\vec{v}(0) = m x_0 \beta \hat{u}_x - m y_0 \beta \hat{u}_y$$

$$\vec{L}(t=0) = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ x_0 & y_0 & 0 \\ m x_0 \beta & -m y_0 \beta & 0 \end{vmatrix} =$$

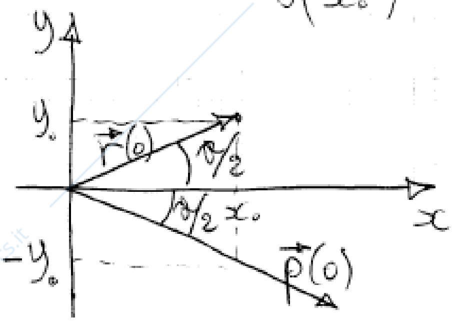
$$= -m\beta(x_0 y_0 + x_0 y_0)\hat{u}_z = -2m\beta x_0 y_0 u_z$$

Era del resto possibile calcolare $\vec{L}(t=0)$ attraverso la formula geometrica:

$$\vec{L}(t=0) = -|\vec{L}(t=0)|\,\hat{u}_z \quad \text{con}$$

$$|\vec{L}(t=0)| = |\vec{r}(0)| \cdot |\vec{p}(0)| \sin\vartheta$$

con $\vartheta = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$



Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Si trova quindi

$$\vec{L}(t=0) = -m\beta\left(x_0^2+y_0^2\right)\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{y_0}{x_0}\right)\hat{u}_z$$

Si può dimostrare che tale espressione di $\vec{L}(t=0)$ è equivalente alla precedente facendo uso di opportune formule trigonometriche e in particolare:

$$\sin(\mathrm{arctg}\,\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\ ;\ \cos(\mathrm{arctg}\,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

c) $\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L}_0$ è cost in t

osservando che $\vec{r}_0$ è $/\!/$ a $\vec{F} = m\beta^2\vec{r}$

Soluzione Es.2

2) Poichè sul sistema agiscono solo forze conservative, l'energia meccanica del sistema si conserva

$$E_i = E_f$$

$$\begin{cases} E_i = \frac{1}{2} m V_A^2 \\ E_f = \frac{1}{2}(2m)V_F^2 + \frac{1}{2}K\Delta l^2 \end{cases} \quad (1)$$

Poichè sul sistema non agiscono forze esterne la quantità di moto si conserva

$$p_i = p_f$$

$$\begin{cases} p_i = m V_A \\ p_F = 2m V_F \end{cases} \quad (2)$$

Dal sistema (2) si trova $V_F = \frac{1}{2}V_A$ che sostituito in (1) fornisce una eq. nella incognita Δl:

$$\frac{1}{\cancel{2}} m V_A^2 = \frac{1}{\cancel{2}}(2m)\left(\frac{1}{2}V_A\right)^2 + \frac{1}{\cancel{2}}K\Delta l^2$$

$$\frac{1}{2} m V_A^2 = K\Delta l^2$$

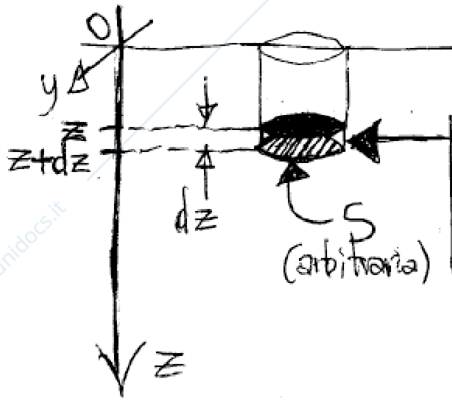
$$\Rightarrow \Delta l = \sqrt{\frac{m}{2K}}\, V_A$$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Soluzione Es.3

3) $\rho = K p$ con $K > 0$

$p(z)$ se $p_0 = p_a = 1$ atm



volume: $S\,dz$

massa: $\rho S\,dz$

forza esercitata su S: $\rho S\,dz\,g$ dovuta alla sola forza peso dell'elemento di fluido considerato

$$\rho = K p(z)$$

$$dp = \frac{\rho S\,dz\,g}{S} = \rho g\,dz = K p(z)\, g\,dz$$

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp'}{p'} = \int_0^z K g\,dz'$$

$$\ln \frac{p(z)}{p_0} = K g z$$

$$\boxed{p(z) = p_0\, e^{K g z}}$$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Soluzione Es.4

4) $C_p = C_V + R$ $\qquad pV = nRT$

$C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V$ calore specifico molare a volume costante

$C_p = \frac{1}{n}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p$ calore specifico molare a pressione costante

$R = 8.314\ J/mol\,K$ costante universale dei gas perfetti

Dal I principio della TD si ha che

$$Q = \mathcal{L} + \Delta U$$

in forma differenziale è

$$\delta Q = \delta \mathcal{L} + dU$$

In una trasformazione isobara sarà $\delta\mathcal{L} = p\,dV$ quindi $\delta Q = p\,dV + dU$

Dalla equazione di stato dei gas perfetti è $pdV + Vdp = nRdT$ che per una trasformazione isobara si riduce a $pdV = nRdT$. Quindi, sostituendo nella precedente abbiamo

$$\delta Q = nRdT + dU$$ e infine

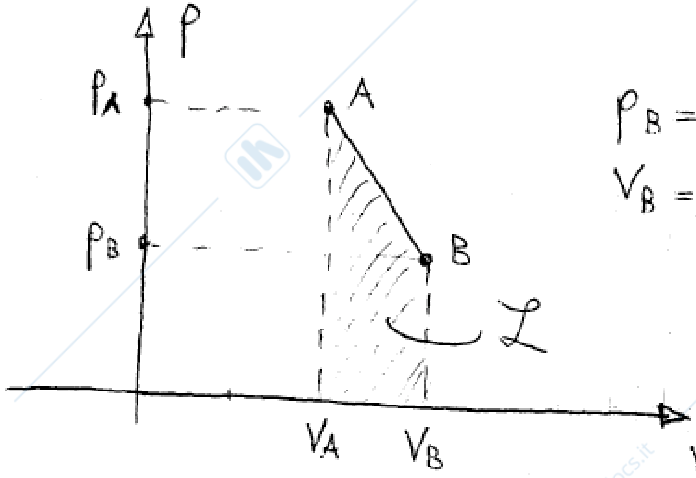
$$C_p = \frac{1}{n}\frac{\delta Q}{dT} = R + \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} = R + C_V$$

essendo $\frac{dU}{dT} = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V$ come è noto.

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Soluzione Es.5

5)



$$p_B = \frac{1}{2} p_A$$
$$V_B = \frac{3}{2} V_A$$

a) $Q = \mathcal{L} + \Delta U$ in base al I principio della termodinamica.

$\mathcal{L}$ = area del piano pV sottesa dal segmento $\overline{AB}$

$$\mathcal{L} = \frac{p_A + p_B}{2} \cdot (V_B - V_A) =$$
$$= \frac{3}{4} p_A \cdot \frac{1}{2} V_A = \frac{3}{8} p_A V_A$$

$$\Delta U = n\, c_V\, \Delta T = n \frac{3}{2} R (T_B - T_A)$$

con $T_B = p_B V_B / nR$ e $T_A = p_A V_A / nR$

$$\Delta U = \cancel{n} \frac{3}{2} \cancel{R} / \cancel{nR} (p_B V_B - p_A V_A) =$$
$$= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{3}{2} - 1 \right) p_A V_A = -\frac{3}{8} p_A V_A$$

Risulta quindi $Q = 0$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE** l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

b) Osserviamo che per una generica trasformazione reversibile da $A \to B$

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{A \to B} \overset{(*)}{=} \frac{n c_v \, dT}{T} + \frac{p \, dV}{T}$$

(*) I princ. della TD per gas perfetto

$\frac{p}{T} = \frac{nR}{V}$ per la eq. di stato quindi

$$\Delta S = \int_A^B dS = \int_{T_A}^{T_B} n c_v \frac{dT}{T} + \int_{V_A}^{V_B} nR \frac{dV}{V} =$$

$$= n c_v \ln\left(T_B/T_A\right) + nR \ln\left(V_B/V_A\right).$$

Ricordando che $V_B/V_A = \frac{3}{2}$ e $T_B/T_A = \frac{p_B V_B}{p_A V_A}$ quindi $T_B/T_A = \frac{3}{4}$, troviamo

$$\Delta S_{AB} = n \frac{3}{2} R \ln\left(\frac{3}{4}\right) + nR \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} nR \left[3 \ln\left(\frac{3}{4}\right) + 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2} nR \left[3 \ln 3 - 6 \ln 2 + 2 \ln 3 - 2 \ln 2\right]$$

$$= \frac{1}{2} nR \left[5 \ln 3 - 8 \ln 2\right]$$

Si noti che risulta $\Delta S_{AB} < 0$. Sarà allora $\Delta S_{Ext} = -\Delta S_{AB} > 0$ perchè in una trasf. reversibile è $\Delta S_{sistema} + \Delta S_{EXT} = \Delta S_U = 0$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*