

DINAMICA DEL CORPO RIGIDO

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



www.unidocs.it

www.unidocs.it



Corpo rigido: sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare

Corpo discreto



Insieme discreto di n -punti materiali

Corpo continuo



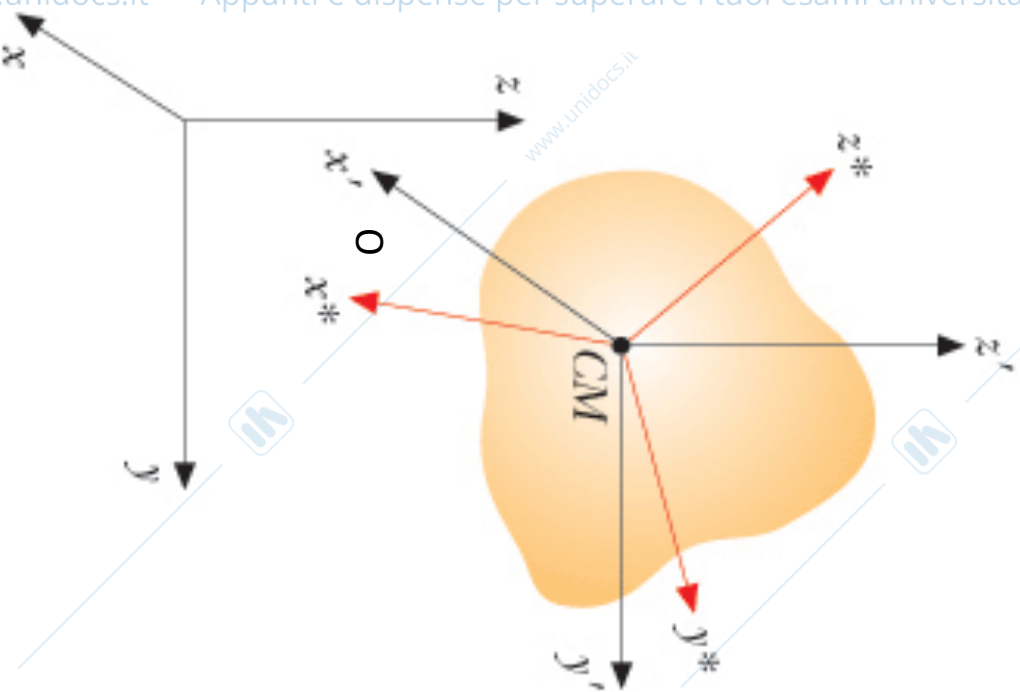
Insieme continuo di punti materiali di volume dV e massa dm

Il moto di un corpo rigido è determinato dal sistema di forze esterne, caratterizzato da una risultante $\vec{R}^{(E)} = m_{tot} \vec{a}_{CM}$ e da un momento risultante $\vec{M}_o^{(E)} = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$

N.B. Poiché le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare (\Rightarrow corpo indeformabile)

Il lavoro totale delle forze interne è nullo

$$W = W^{(E)} = \Delta E_k$$



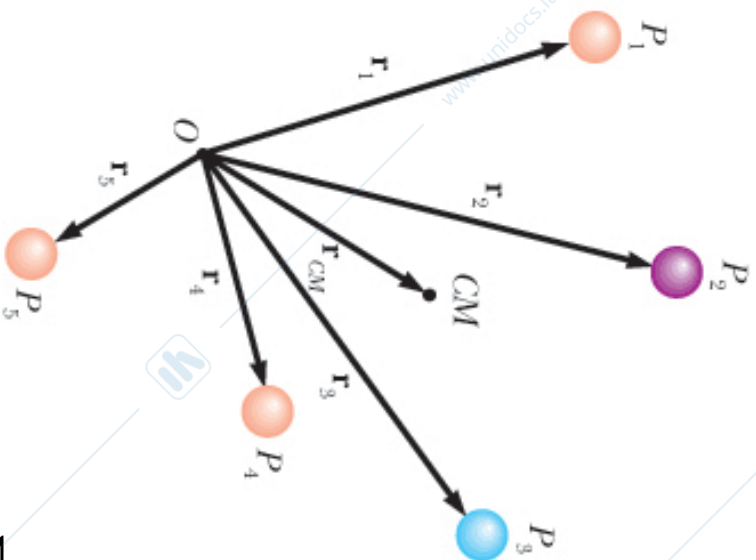
Lo studio del moto di un corpo rigido verrà fatto normalmente in un sistema di riferimento inerziale fisso (O, x, y, z) .

Un altro sistema importante è il sistema di riferimento del centro di massa (CM) del corpo rigido (CM, x', y', z') , in generale non inerziale, e con gli assi paralleli a quelli del sistema inerziale (O, x, y, z) .

Consideriamo inoltre un sistema di riferimento centrato nel CM del corpo rigido con gli assi solidali al corpo stesso (CM, x^*, y^*, z^*) , utile per visualizzare il moto di rotazione del corpo rigido rispetto agli altri due sistemi di riferimento ad assi fissi.

Corpo discreto: calcolo posizione del centro di massa

Il centro di massa è in una posizione immutabile rispetto a tutti i punti del corpo rigido



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m_{tot}}$$

Media pesata sulle masse
dei raggi vettori dei
singoli punti materiali

Dato un sistema di riferimento (O, x, y, z):

$$X_{CM} = \frac{\sum_i m_i X_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i X_i}{m_{tot}}$$

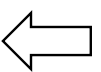
$$Y_{CM} = \frac{\sum_i m_i Y_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i Y_i}{m_{tot}}$$

$$Z_{CM} = \frac{\sum_i m_i Z_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i Z_i}{m_{tot}}$$

Corpo continuo: insieme continuo di punti materiali di volume dV e massa dm



Densità: rapporto tra la massa dm e il volume $dV \Rightarrow \rho = \frac{dm}{dV}$ (kg/m³)

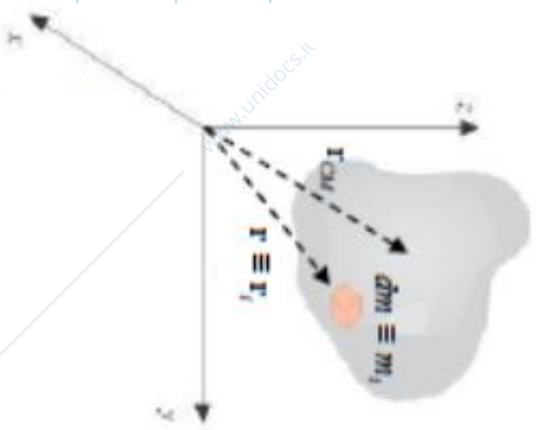


$$m = \int dm = \int_V \rho dV$$

Se $\rho = \text{costante} \Leftrightarrow$ corpo omogeneo $\Rightarrow \rho = \frac{dm}{dV} = \frac{m}{V} = \text{costante} \Rightarrow m = \rho V$

Corpo continuo: calcolo posizione del centro di massa

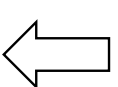
Il centro di massa è in una posizione immutabile rispetto a tutti i punti del corpo rigido



$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho dV = \frac{1}{m} \int_V \vec{r}(x, y, z) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$x_{CM} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{\int x dm}{m} \quad y_{CM} = \frac{\int y dm}{m} \quad z_{CM} = \frac{\int z dm}{m}$$

$$\text{Se } \rho = \text{costante} \Leftrightarrow \text{corpo omogeneo} \Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} \rho dV = \frac{\rho}{m} \int_V \vec{r} \rho dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} \rho dV$$

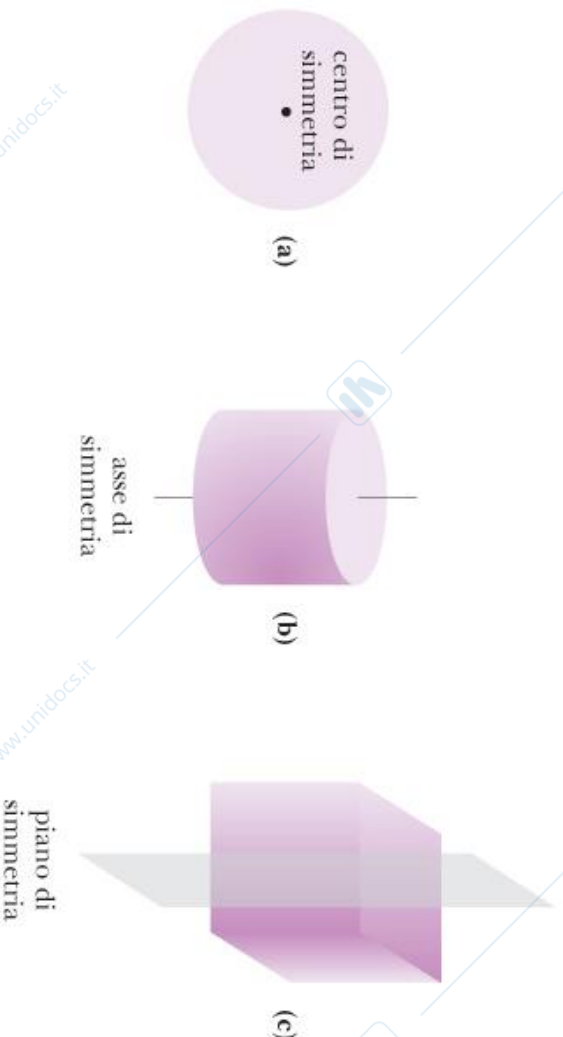


La posizione del centro di massa non dipende dalla massa del corpo rigido ma solo dalla sua forma.

Se un corpo rigido omogeneo è simmetrico rispetto ad punto o ad un asse o ad un piano



il centro di massa coincide col centro di simmetria o appartiene all'asse di simmetria o appartiene al piano di simmetria. Se esistono più assi e piani di simmetria, il centro di massa è posizionato sulla loro intersezione.



Centro di massa e forza peso

Per un sistema discreto di n -punti materiali avevamo visto che, rispetto ad un polo fisso coincidente con l'origine delle coordinate:

$$\vec{M}_0 = \sum_i \vec{M}_{0,i} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = m_{\text{tot}} \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{g} = \vec{r}_{\text{CM}} \times m_{\text{tot}} \vec{g}$$

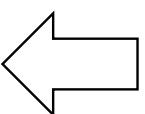
e questo vale anche per un corpo rigido discreto.

E per un corpo rigido continuo ?

Consideriamo un corpo rigido continuo soggetto alla forza peso: su ciascun elemento di massa dm agisce la forza $dm \cdot \vec{g}$ e la risultante di tutte queste forze tra di loro parallele è

$$\int_m dm \cdot \vec{g} = \vec{g} \int_m dm = m \cdot \vec{g}$$

applicata nel centro di massa del corpo rigido.



Rispetto ad un polo fisso, coincidente con l'origine delle coordinate:

$$\vec{M}_0 = \int_m (\vec{r} \times dm \cdot \vec{g}) = \left(\int_m \vec{r} dm \right) \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \left(\int_m dm \right) \times \vec{g} = m \vec{r}_{CM} \times \vec{g} = \vec{r}_{CM} \times m \vec{g}$$

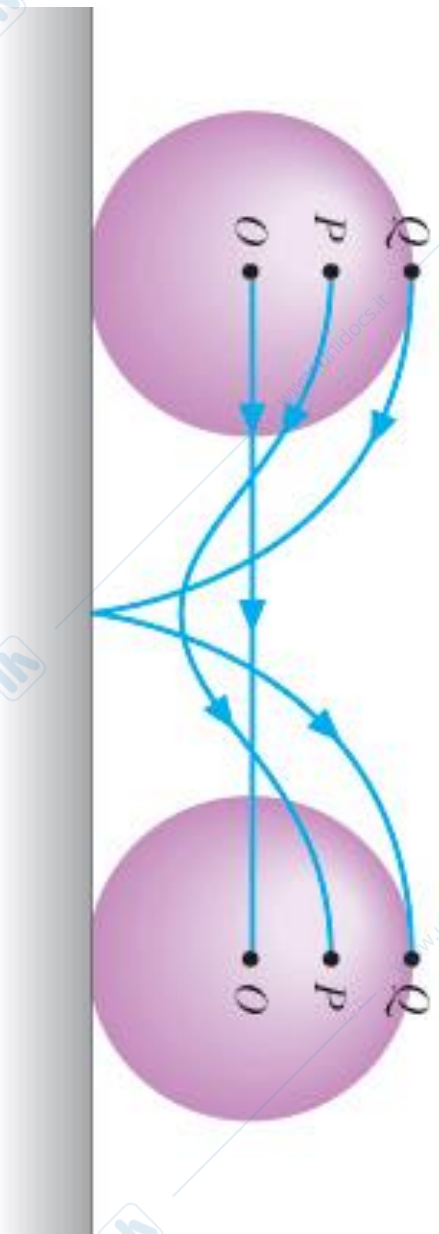
Per quanto riguarda l'energia potenziale:

$$E_p = \int_m \mathbf{g} \cdot \mathbf{z} \cdot dm = \mathbf{g} \int_m z \cdot dm = m \mathbf{g} z_{CM}$$

Moto di un corpo rigido

Per studiare il moto di un corpo rigido è possibile concentrarsi sullo spostamento globale, riconducibile al moto del centro di massa.

Tuttavia i vari punti del corpo rigido possono descrivere traiettorie diverse tra loro e da quella del centro di massa.

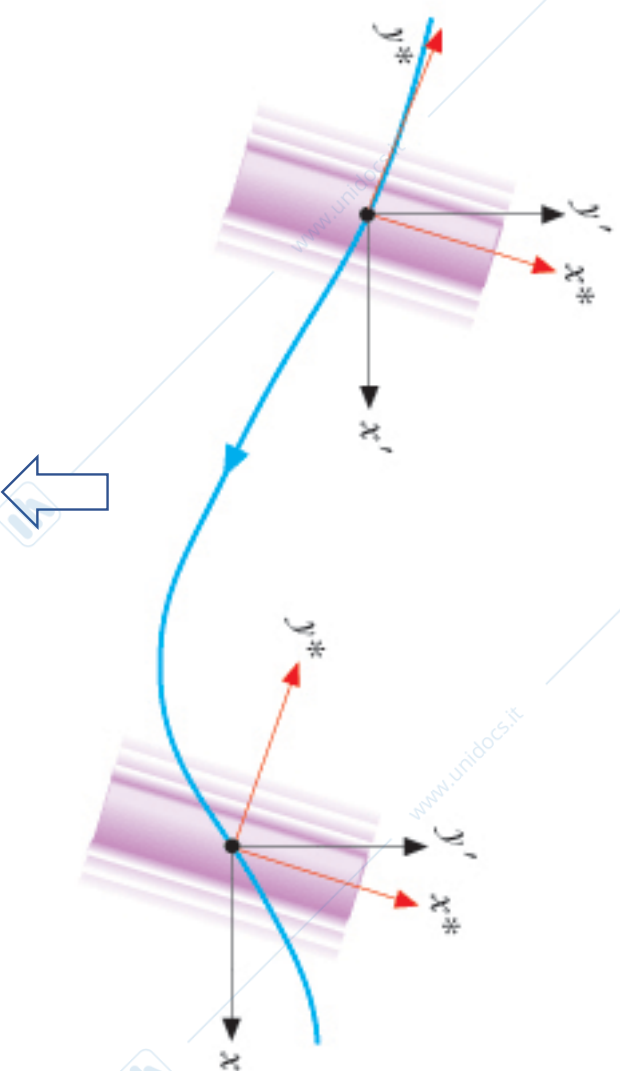


Prima di arrivare a considerare il moto più generale di un corpo rigido (*moto di rototraslazione*), iniziamo ad analizzare i due tipi di moto:

- **Moto di traslazione** del corpo rigido
- **Moto di rotazione** del corpo rigido

Moto di traslazione del corpo rigido

Tutti i punti descrivono traiettorie uguali, in generale curvilinee, percorse con la stessa velocità \vec{v}_{CM} .



L'angolo tra gli assi del sistema del centro di massa e gli assi solidali al corpo rigido non varia nel tempo.

Le grandezze significative nella traslazione di un corpo rigido sono:

Quantità di moto: $\vec{P} = m\vec{V}_{CM}$

Energia cinetica: $E_k = E_{k,CM} + E'_k = E_{k,CM} = \frac{1}{2} mV_{CM}^2$

Momento angolare: $\vec{L}_o = \vec{L}_{o,CM} + \vec{L}'_{CM} = \vec{L}_{o,CM} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{V}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$

Teorema del moto del centro di massa: $\vec{R} = m\vec{a}_{CM}$

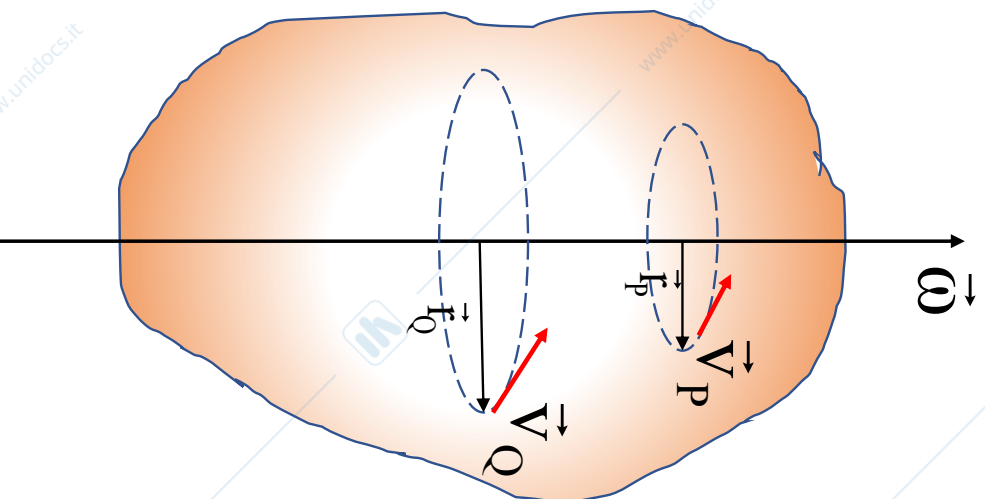
Teorema del momento angolare (polo fisso o coincidente con il CM o CM fisso):

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d(\vec{r}_{CM} \times m\vec{V}_{CM})}{dt} = \vec{r}_{CM} \times \frac{d(m\vec{V}_{CM})}{dt} + \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times m\vec{V}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{a}_{CM} + \vec{V}_{CM} \times m\vec{V}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{R} \quad (E)$$

N.B. NON c'è movimento rispetto al centro di massa: $E'_k = 0$ e $\vec{L}'_{CM} = 0$

Moto di rotazione del corpo rigido

Tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenze diverse che stanno su piani tra loro paralleli e hanno il centro sull'asse di rotazione.



$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega} \times \vec{r}_Q$$

$$|\vec{v}_Q| = \omega r_Q > |\vec{v}_P| = \omega r_P$$

L'equazione dinamica alla base del moto è il Teorema del momento angolare (polo fisso o coincidente con il CM o CM fisso):

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$$

Moto di rototraslazione

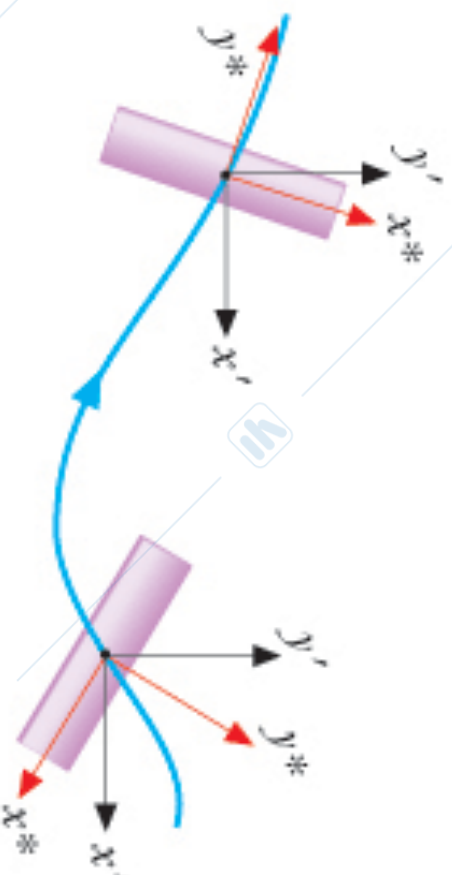


Traslazione + Rotazione



↳ spostamento infinitesimo può essere sempre considerato come la somma di una traslazione infinitesima del CM e di una rotazione infinitesima attorno ad un asse passante per il CM:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_P$$



$$\vec{v}_p = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_p$$

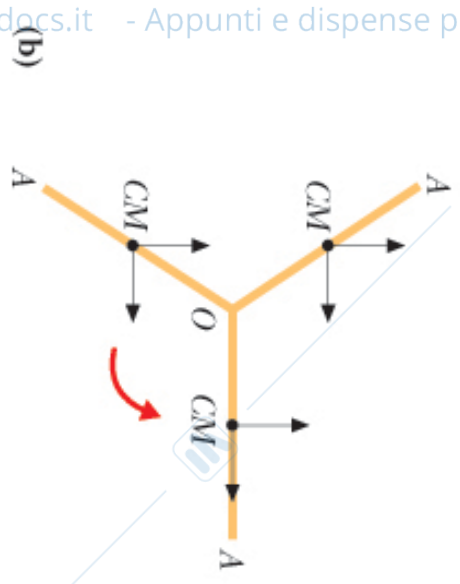
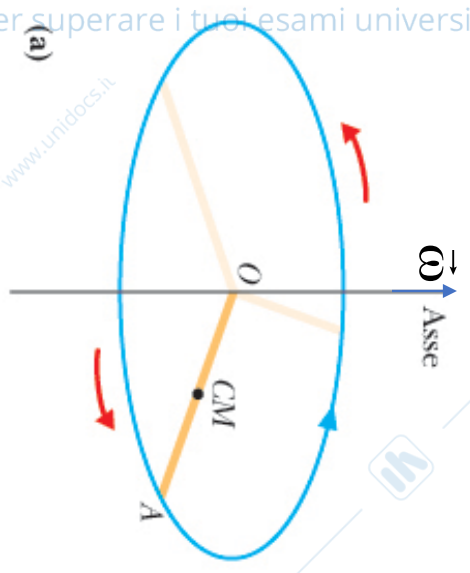
In una generica rototraslazione \vec{v}_p e $\vec{\omega}$ sono indipendenti tra loro.

Solo in particolari situazioni \vec{v}_p e $\vec{\omega}$ sono legate da una relazione analitica, esempio: il moto di puro rotolamento (moto della ruota)

Esempio: rotazione di un'asta rigida rispetto ad un asse verticale passante per un suo estremo

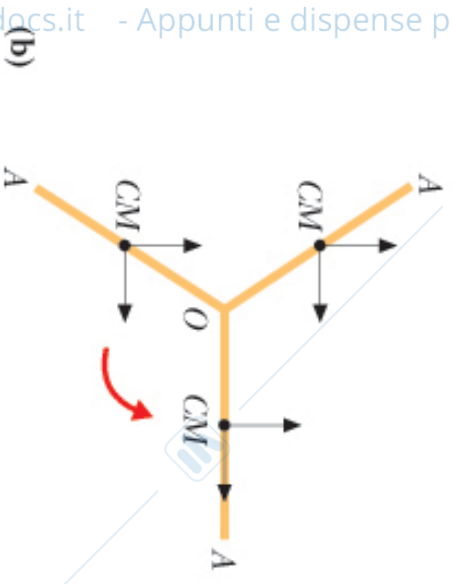
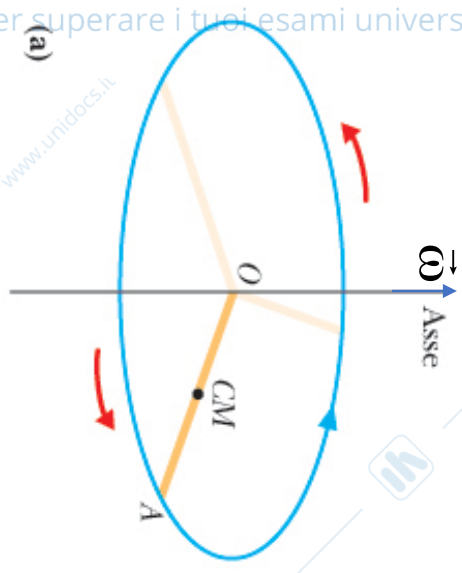
Rotazione attorno ad un asse passante per il l'estremo O con velocità angolare $\vec{\omega}$

$$\vec{v}_O = 0, \quad \vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times (\overline{O-CM}), \quad \vec{v}_A = \vec{\omega} \times (\overline{OA})$$



Vista dall'alto

Esempio: rotazione di un'asta rigida rispetto ad un asse verticale passante per un suo estremo



Vista dall'alto

Rotazione attorno ad un asse passante per il l'estremo O con velocità angolare $\vec{\omega}$

$$\vec{v}_O = 0, \quad \vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{O-CM}), \quad \vec{v}_A = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{OA})$$

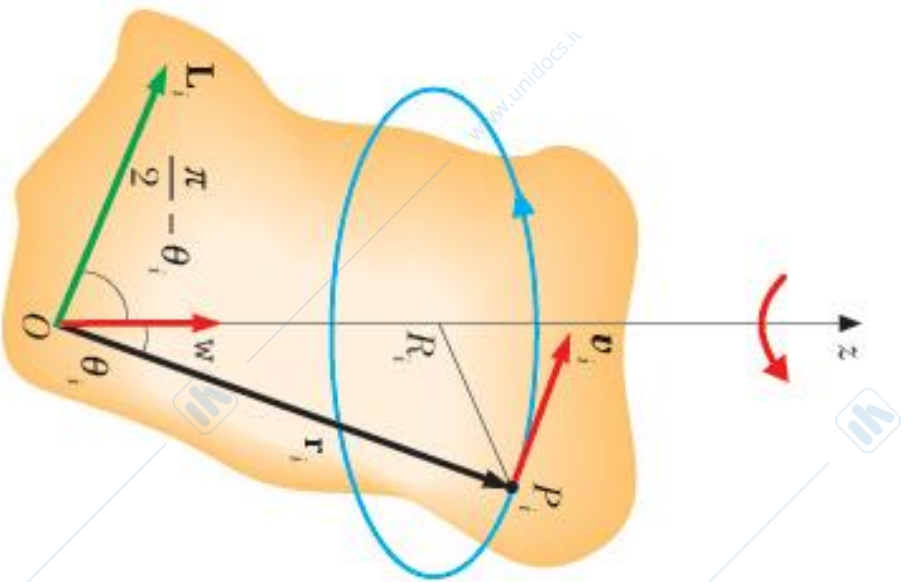
Rototraslazione: moto circolare del CM + rotazione istantanea attorno ad un asse passante per il CM e parallelo al precedente
 Quando l'asta ruota di $2\pi \Rightarrow$ i punti O e A dell'asta ruotano di 2π attorno al CM, nello stesso verso e nello stesso tempo
 \Rightarrow con la stessa velocità angolare $\vec{\omega}$

Il CM ruota attorno ad O con la stessa velocità angolare con cui i punti ruotano attorno al CM

$$\vec{v}_O = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\overrightarrow{CM-O}) = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{O-CM}) + \vec{\omega} \times (\overrightarrow{CM-O}) = 0$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\overrightarrow{CM-A}) = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{O-CM}) + \vec{\omega} \times (\overrightarrow{CM-A}) = \vec{\omega} \times (\overrightarrow{OA})$$

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale



Tutti i punti dell'asse di rotazione fisso sono punti fissi

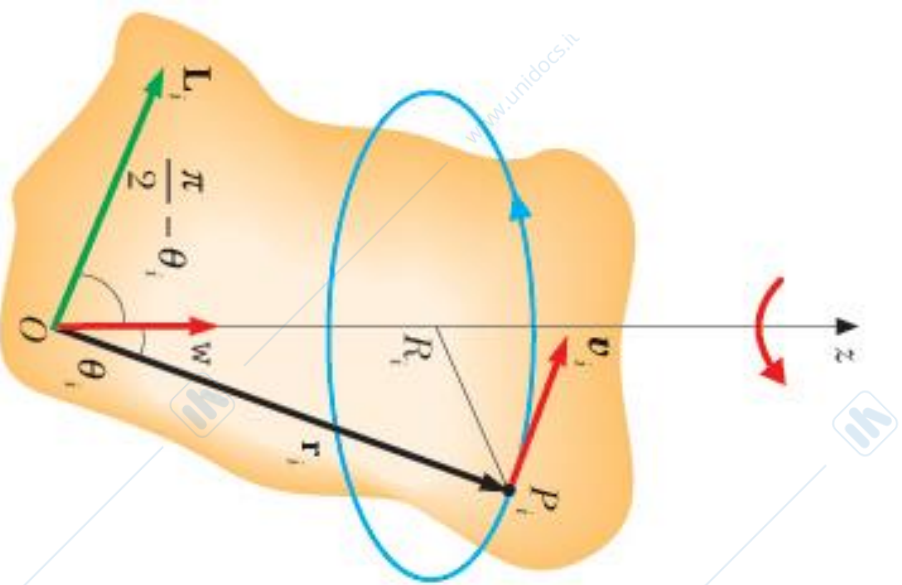
\Rightarrow possono essere utilizzati come poli per il calcolo dei momenti

L'asse di rotazione z può essere anche esterno al corpo rigido

Il centro di massa potrebbe **NON** essere un punto dell'asse di rotazione

$\vec{\omega}$ ha la direzione fissa dell'asse di rotazione e determina il verso di rotazione del corpo rigido (antiorario nell'esempio in figura).

Se cambia di modulo $\Rightarrow \alpha = d\omega/dt \neq 0$



Per semplicità di calcolo, anche se il corpo rigido è continuo, lo consideriamo formato da tanti punti materiali P_i . Il passaggio da discreto a continuo implica passare da sommatorie a integrali.

Un punto P_i descrive in un piano \perp all'asse di rotazione una traiettoria circolare, con centro sull'asse e raggio R_i .

La velocità di P_i è \vec{v}_i di modulo ωR_i

L'accelerazione di P_i è \vec{a}_i di componente tangenziale $v_i^2/R_i = \omega^2 R_i$ e centripeta ωR_i .

Calcolo del momento angolare. Momento d'inerzia

Prendiamo O come polo su cui calcolare il momento angolare e consideriamo il punto P_i appartenente al corpo rigido.

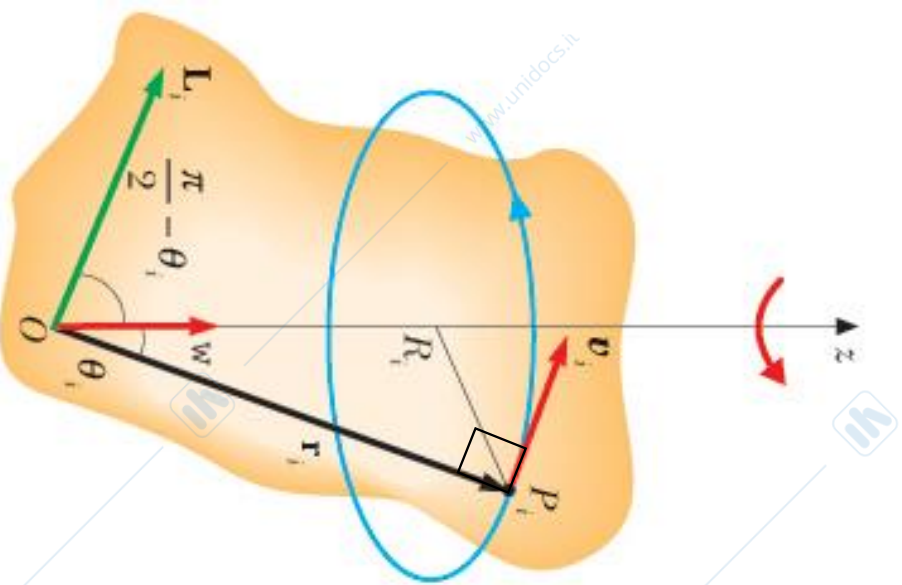
$$\vec{L}_{o,i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

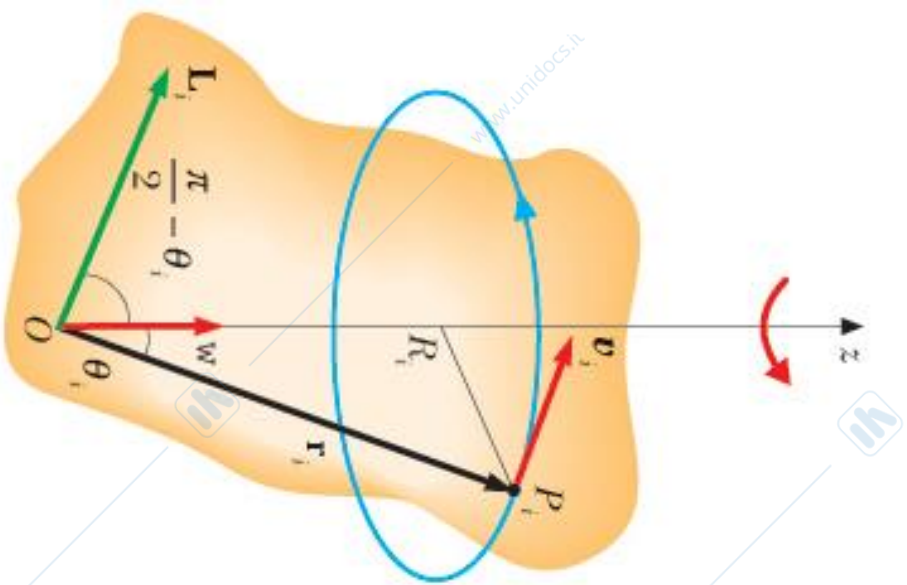
$\vec{L}_{o,i}$ è \perp al piano individuato da \vec{r}_i e da \vec{v}_i

con $\vec{v}_i \perp \vec{r}_i$ e \vec{r}_i che forma un angolo θ_i con l'asse z

$\Rightarrow \vec{L}_{o,i}$ forma un angolo $(\pi/2) - \theta_i$ con l'asse z

$$|\vec{L}_{o,i}| = |\vec{r}_i| m_i v_i \sin(\pi/2) = m_i r_i v_i = m_i r_i \omega R_i$$





$$\vec{L}_{o,i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{L}_{o,i,z} + \vec{L}_{o,i,\perp}$$

Momento angolare
assiale

Momento angolare
perpendicolare
all'asse

$$|\vec{L}_{o,i,z}| = |\vec{L}_{o,i}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)$$

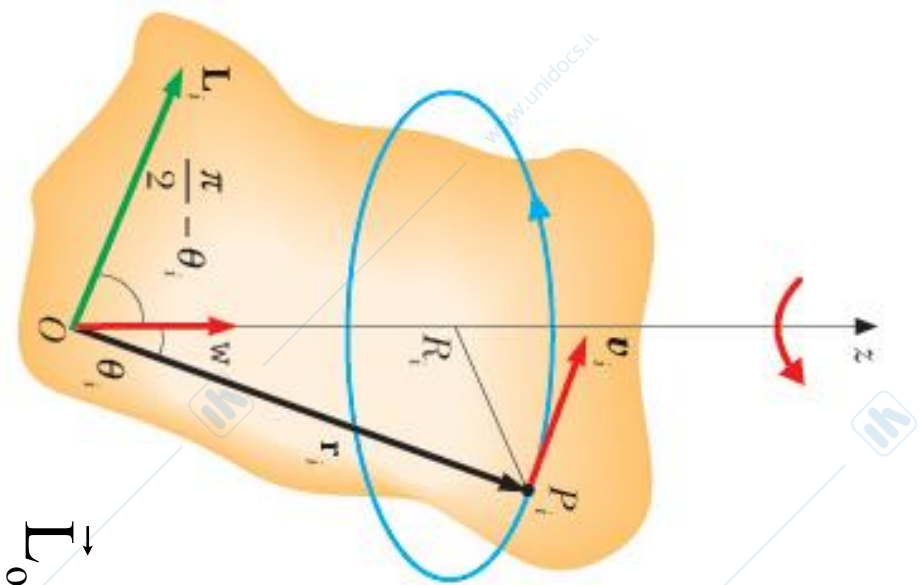
$$|\vec{L}_{o,i,\perp}| = |\vec{L}_{o,i}| \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right)$$

$$= |\vec{L}_{o,i}| \sin \theta_i = m_i r_i \omega R_i \sin \theta_i$$

$$= |\vec{L}_{o,i}| \cos \theta_i = m_i r_i R_i \omega \sin \theta_i$$

$$= m_i R_i^2 \omega$$

(essendo $R_i = r_i \sin \theta_i$)



$$\vec{L}_o = \sum_i \vec{L}_{o,i} = \sum_i \vec{L}_{o,i,z} + \sum_i \vec{L}_{o,i,\perp} = \vec{L}_{o,z} + \vec{L}_{o,\perp}$$

$$|\vec{L}_{o,z}| = \sum_i m_i R_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \omega = I_z \omega$$

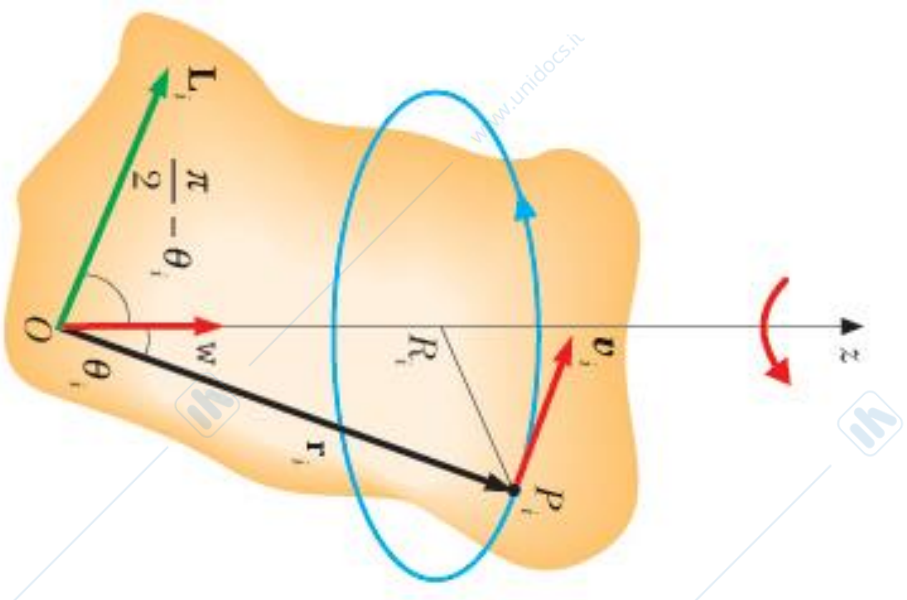
Momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione z

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 \quad (\text{corpo discreto})$$

$$I_z = \int R^2 dm \quad (\text{corpo continuo})$$

$$[I_z] = [M][L]^2 \Rightarrow \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\vec{L}_{o,z} = I_z \vec{\omega} = I_z \omega \hat{u}_z$$

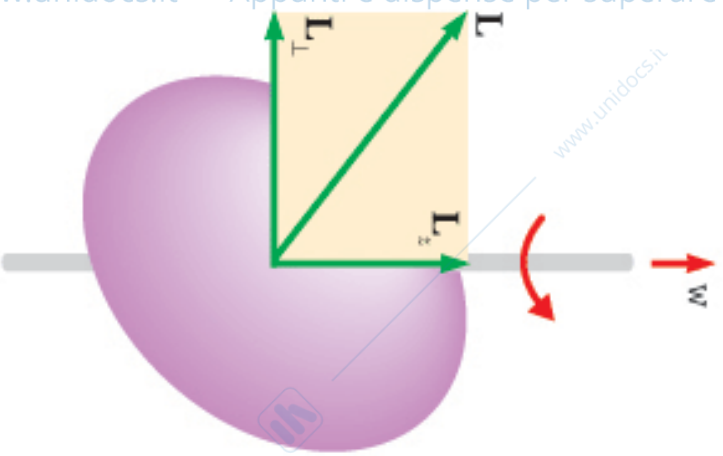


$$\vec{L}_0 = \sum_i \vec{L}_{0,i} = \sum_i \vec{L}_{0,i,z} + \sum_i \vec{L}_{0,i,\perp} = \vec{L}_{0,z} + \vec{L}_{0,\perp}$$

$$|\vec{L}_{0,\perp}| = \sum_i m_i r_i R_i \omega \sin \theta_i = \sum_i (m_i r_i R_i \omega \sin \theta_i) \omega$$

$$\vec{L}_{0,\perp} = \sum_i (m_i r_i R_i \omega \sin \theta_i) \omega \hat{u}_\perp$$

Il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse fisso qualsiasi NON è in generale parallelo all'asse di rotazione e ruota attorno a questo assieme al corpo (moto di *precessione*).



$$\vec{L}_o = \vec{L}_{o,z} + \vec{L}_{o,\perp} = I_z \omega \hat{u}_z + \sum_i (m_i r_i R_i \omega \sin \theta_i) \omega \hat{u}_\perp$$

Può variare solo in modulo, è proporzionale a ω e non dipende dalla scelta del polo

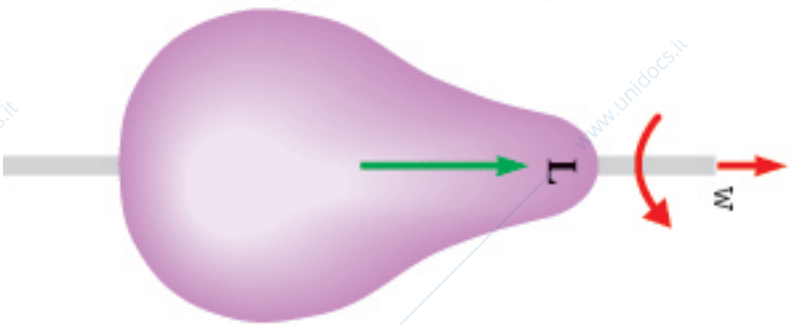
Varia in direzione, può variare in modulo e dipende dalla scelta del polo

Caso particolare: asse di rotazione è un asse di simmetria del corpo rigido

Per ogni $\vec{L}_{o,i}$ c'è un $\vec{L}_{o,j}$ simmetrico rispetto all'asse di rotazione
 \Rightarrow la loro somma vettoriale è parallela all'asse stesso



$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0,z} + \vec{L}_{0,\perp} = \vec{L}_{0,z} = I_z \vec{\omega} = I_z \omega \hat{u}_z$$



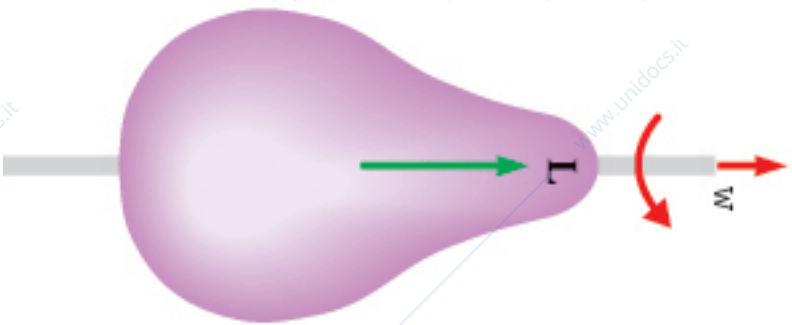
Caso particolare: asse di rotazione è un asse di simmetria del corpo rigido

Per ogni $\vec{L}_{o,i}$ c'è un $\vec{L}_{o,j}$ simmetrico rispetto all'asse di rotazione
 \Rightarrow la loro somma vettoriale è parallela all'asse stesso

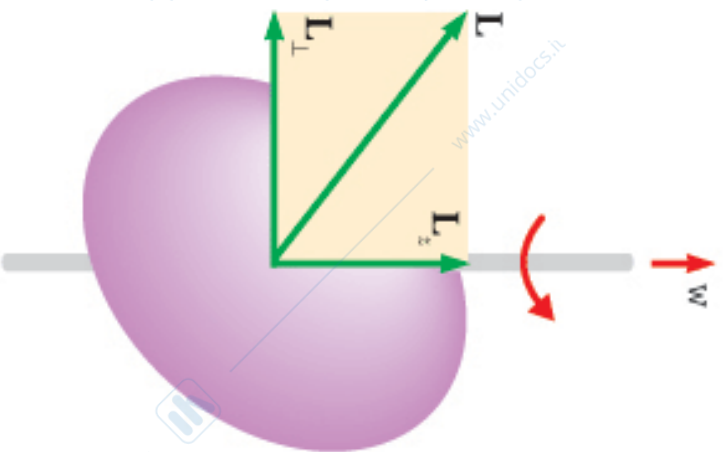
$$\vec{L}_o = \vec{L}_{o,z} + \vec{L}_{o,\perp} = \vec{L}_{o,z} = I_z \vec{\omega} = I_z \omega \hat{u}_z$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha} = \vec{M}_o$$

Equazione del moto di rotazione



Caso generale: asse di rotazione qualsiasi



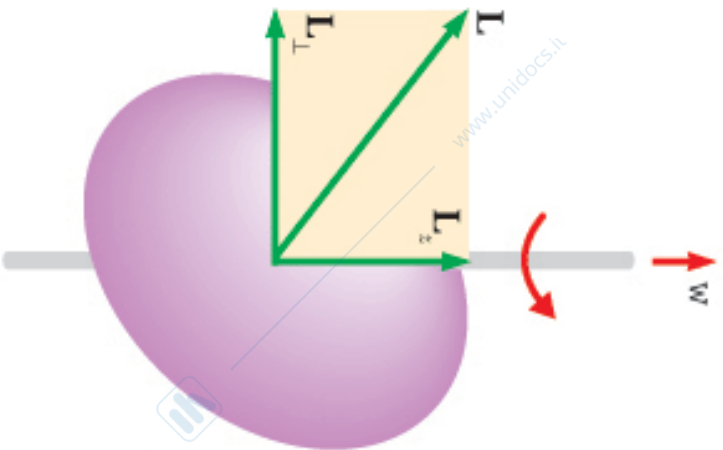
$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0,z} + \vec{L}_{0,\perp}$$

Può variare solo
in modulo

Varia in direzione e
può variare in modulo

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= \frac{d(\vec{L}_{0,z} + \vec{L}_{0,\perp})}{dt} = \frac{d\vec{L}_{0,z}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{0,\perp}}{dt} \\ &= \left(\frac{d|\vec{L}_{0,z}|}{dt} \hat{u}_z + \cancel{\frac{d\hat{u}_z}{dt}} \right) + \left(\frac{d|\vec{L}_{0,\perp}|}{dt} \hat{u}_\perp + |\vec{L}_{0,\perp}| \frac{d\hat{u}_\perp}{dt} \right) \\ &= \vec{M}_{0,z} + \vec{M}_{0,\perp} + |\vec{L}_{0,\perp}| \omega \hat{u}_\phi = \vec{M}_{0,z} + \vec{M}_{0,\perp} + \vec{M}_{0,\phi} \end{aligned}$$

Caso generale: asse di rotazione qualsiasi



$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{0,z} + \vec{L}_{0,\perp}$$

Può variare solo
in modulo

Varia in direzione e
può variare in modulo

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d(\vec{L}_{0,z} + \vec{L}_{0,\perp})}{dt} = \frac{d\vec{L}_{0,z}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{0,\perp}}{dt}$$

$$= \left(\frac{d|\vec{L}_{0,z}|}{dt} \hat{u}_z + \cancel{\left| \vec{L}_{0,z} \right| \frac{d\hat{u}_z}{dt}} \right) + \left(\frac{d|\vec{L}_{0,\perp}|}{dt} \hat{u}_\perp + \left| \vec{L}_{0,\perp} \right| \frac{d\hat{u}_\perp}{dt} \right)$$

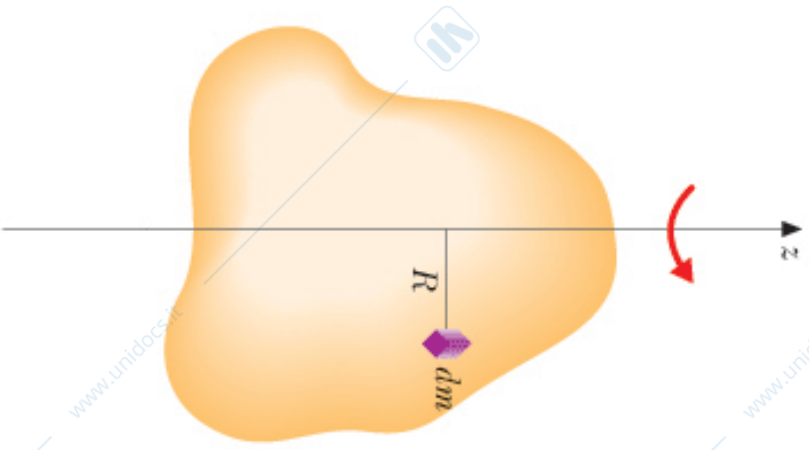
$$= \vec{M}_{0,z} + \vec{M}_{0,\perp} + \omega \hat{u}_\phi = \vec{M}_{0,z} + \vec{M}_{0,\perp} + \vec{M}_{0,\phi} = I_z \alpha \hat{u}_z + \vec{M}_{0,\perp} + \vec{M}_{0,\phi}$$

Momento d'inerzia

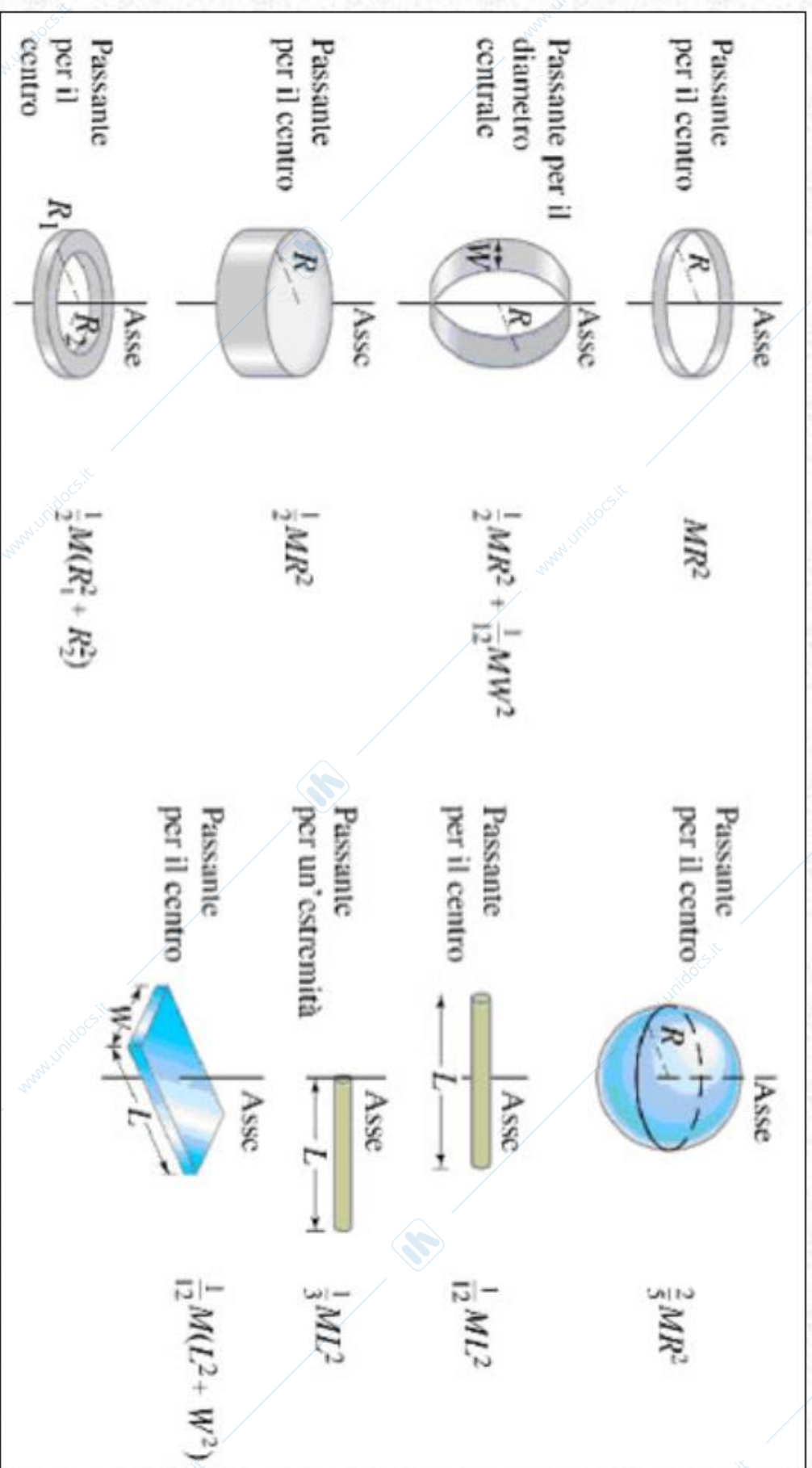
A parità di momento parallelo all'asse di rotazione $\vec{M}_{0,z}$ applicato al corpo rigido, esso assume un'accelerazione angolare maggiore o minore a seconda del valore del momento di inerzia riferito all'asse di rotazione stesso.

$$I_z = \int R^2 dm = \int_V R^2 \rho dV = \int_V (x^2 + y^2) \rho dV$$

Se il corpo rigido può essere suddiviso in sottoparti, il momento d'inerzia totale è la somma dei momenti di inerzia parziali, calcolati tutti rispetto allo stesso asse di rotazione.

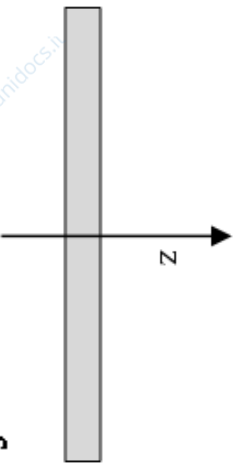


Il momento di inerzia di un oggetto dipende non solo dalla sua massa, ma anche da come la massa è distribuita rispetto all'asse di rotazione. Cambiando asse di rotazione cambia il momento di inerzia.



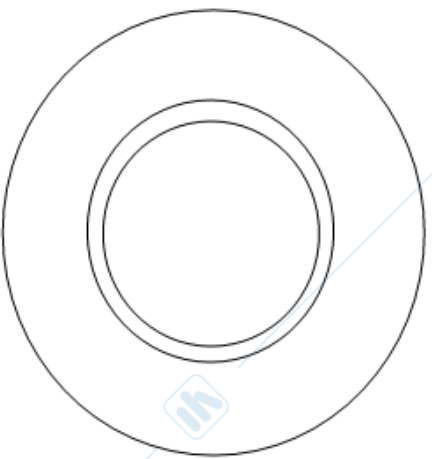
Esempio di calcolo di momento di inerzia:

Calcolo del momento di inerzia di un disco omogeneo, di massa m raggio R spessore h e densità ρ , rispetto ad un asse z ortogonale al disco e passante per il suo centro di massa.



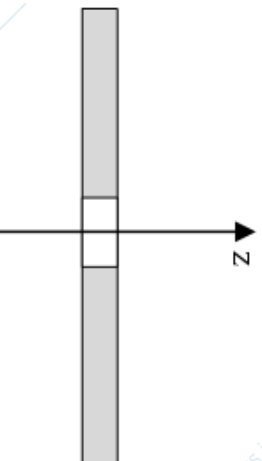
$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \int_0^R r^2 \rho \cdot 2\pi r \cdot h \cdot dr = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 \cdot dr = 2\pi \rho h \frac{R^4}{4}$$

$$2\pi \frac{m}{\pi R^2 h} h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$



Esempio di calcolo di momento di inerzia:

Momento di inerzia di un disco omogeneo forato di massa M , densità ρ , spessore h , raggio esterno R_{est} e raggio interno R_{int} , rispetto ad un asse passante per il CM e ortogonale al disco stesso



$$\begin{aligned}
 I_{\text{disco_forato}} &= I_{\text{disco.esterno}} - I_{\text{disco.int.erno}} = \frac{M_{\text{disco.esterno}} R_{\text{est}}^2}{2} - \frac{M_{\text{disco.int.erno}} R_{\text{int}}^2}{2} = \frac{1}{2} \rho \pi R_{\text{est}}^2 h \cdot R_{\text{est}}^2 - \frac{1}{2} \rho \pi R_{\text{int}}^2 h \cdot R_{\text{int}}^2 = \\
 &= \frac{1}{2} \rho \pi h (R_{\text{est}}^4 - R_{\text{int}}^4) = \frac{1}{2} \rho \pi h (R_{\text{est}}^2 - R_{\text{int}}^2)(R_{\text{est}}^2 + R_{\text{int}}^2) = \rho \pi h (R_{\text{est}}^2 - R_{\text{int}}^2) \cdot \frac{R_{\text{est}}^2 + R_{\text{int}}^2}{2} = M \cdot \frac{R_{\text{est}}^2 + R_{\text{int}}^2}{2}
 \end{aligned}$$

Calcolo dell'energia cinetica, del lavoro e della potenza

$$E_k = \int \frac{1}{2} dm \cdot v^2 = \int \frac{1}{2} dm \cdot \omega^2 R^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int R^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{fn}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2$$

$$dW = dE_k = I_z \omega \cdot d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} d\omega = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt = I_z \alpha d\theta = M_z d\theta \Rightarrow W = \int_{\theta_0}^{\theta} M_z d\theta$$

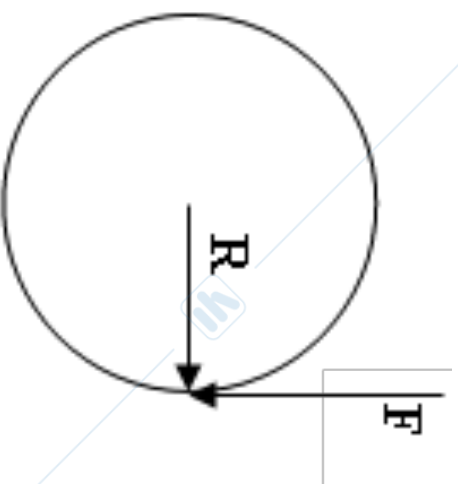
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{M_z d\theta}{dt} = M_z \frac{d\theta}{dt} = M_z \omega$$

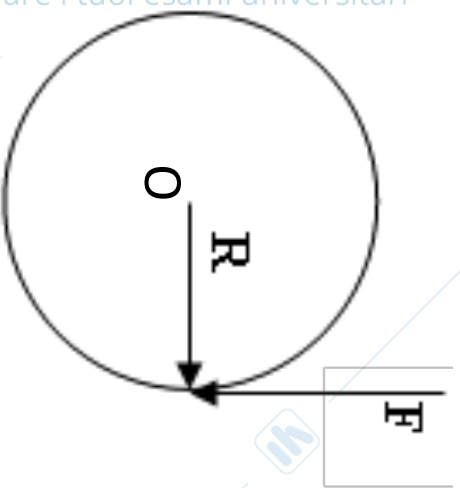
Esempio

Un disco omogeneo di raggio R e massa m ruota in senso antiorario con velocità angolare costante ω_0 intorno al proprio asse (in senso antiorario). Ad un tratto il disco viene frenato con una forza periferica F costante perpendicolare al raggio e all'asse del disco. Calcolare:

- 1) dopo quanto tempo e dopo quanti giri il disco si ferma
- 2) il lavoro fatto dalla forza F

Dati: $R = 0.5 \text{ m}$, $m = 100 \text{ kg}$, $\omega_0 = 20 \text{ rad/s}$, $F = 100 \text{ N}$, $I = (1/2)mR^2$





1) Essendo l'asse di rotazione un asse di simmetria per il disco, prendendo O come polo, allora l'equazione vettoriale del moto di rotazione del disco risulta:

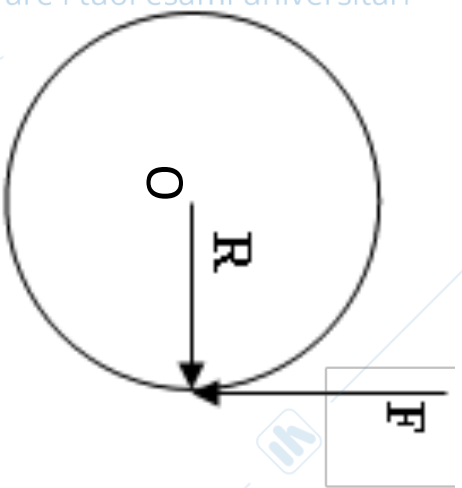
$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F} = I \cdot \boldsymbol{\alpha}$$

che proiettata sull'asse di rotazione (verso positivo uscente dal foglio) risulta: $M = I\alpha = -RF$

dove il segno meno sta ad indicare che si tratta di un momento frenante, avendo preso come positivo il verso uscente dal foglio

da cui $\alpha = -\frac{RF}{I} \Rightarrow$ accelerazione angolare costante negativa

\Rightarrow moto circolare uniformemente accelerato

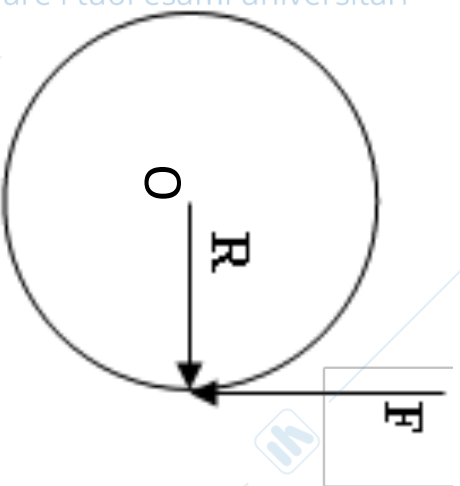


$$\alpha = -\frac{RF}{I}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{RF}{I} \Rightarrow d\omega = -\frac{RF}{I} dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t -\frac{RF}{I} dt \Rightarrow \omega(t) - \omega_0 = -\frac{RF}{I} t \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 - \frac{RF}{I} t$$

Il disco si ferma al tempo t_{stop} cui corrisponde una velocità angolare $\omega(t_{\text{stop}}) = 0$:

$$0 = \omega_0 - \frac{RF}{I} t_{\text{stop}} \Rightarrow t_{\text{stop}} = \frac{\omega_0 I}{RF} = 5 \text{ s}$$



$$\alpha = -\frac{RF}{I}$$

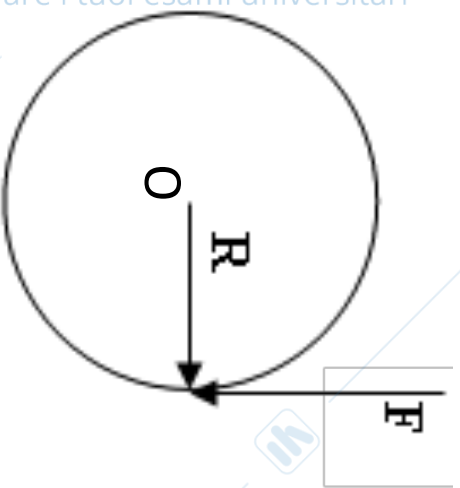
$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{RF}{I}t$$

Determiniamo ora dopo quanti giri il disco si ferma:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 - \frac{RF}{I}t \Rightarrow d\theta = \left(\omega_0 - \frac{RF}{I}t \right) dt \Rightarrow \int_0^\theta d\theta = \int_0^t \left(\omega_0 - \frac{RF}{I}t \right) dt \Rightarrow \theta = \omega_0 t - \frac{RF}{I} \frac{t^2}{2}$$

Al tempo t_{stop} il disco si è spostato angularmente di $\theta_{\text{stop}} = \omega_0 t_{\text{stop}} - \frac{RF}{I} \frac{t_{\text{stop}}^2}{2} = 50 \text{ rad}$

a cui corrispondono $n = \frac{\theta_{\text{stop}}}{2\pi} = 8 \text{ giri}$



2) Per il calcolo del lavoro della forza costante F utilizziamo il teorema dell'energia cinetica:

$$W_{\text{Tot}} = W_F = \Delta E_k = \frac{1}{2} I \omega_{\text{Fin}}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{\text{Iniz}}^2 = 0 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = -25000 \text{ J}$$

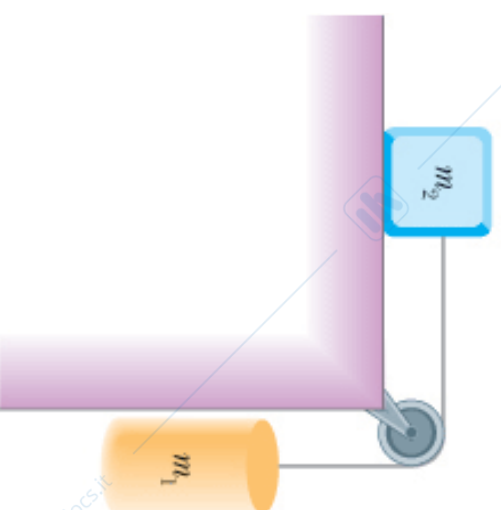
$$\text{Oppure: } W_F = \int_0^{\theta_{\text{stop}}} M_F d\theta = \int_0^{\theta_{\text{stop}}} -RF d\theta = -RF\theta_{\text{stop}} = -25000 \text{ J}$$

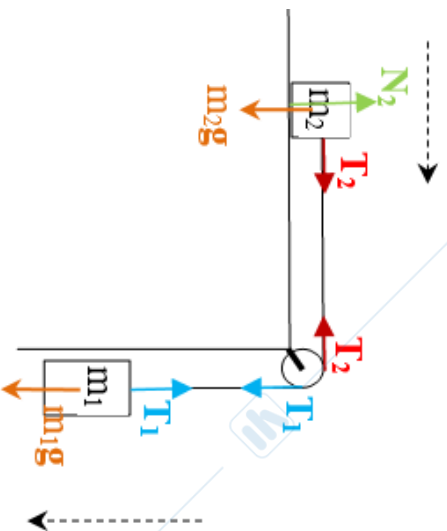
Esempio

Un cilindro di massa m_1 è collegato ad una massa m_2 , con $m_1 > m_2$, tramite una fune inestensibile di massa trascurabile che passa attraverso una carrucola di raggio R . La massa m_2 scivola su un piano orizzontale senza attrito. Partendo da fermo, calcolare l'accelerazione a delle due masse nei due seguenti casi:

- 1) la carrucola ha massa trascurabile;
- 2) la carrucola ha una massa non trascurabile e momento di inerzia I_0 rispetto al suo asse di rotazione (di simmetria).

In entrambi i casi si ipotizzi che la fune non strisci sulla carrucola





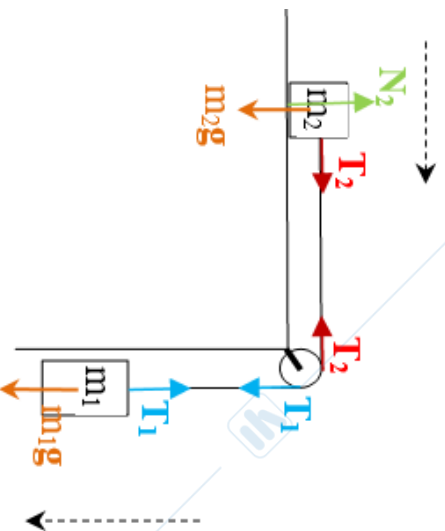
1) la carrucola ha massa trascurabile

Poiché la carrucola ha massa trascurabile

⇒ il suo momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione risulta trascurabile

⇒ il sistema in esame risulta composto:

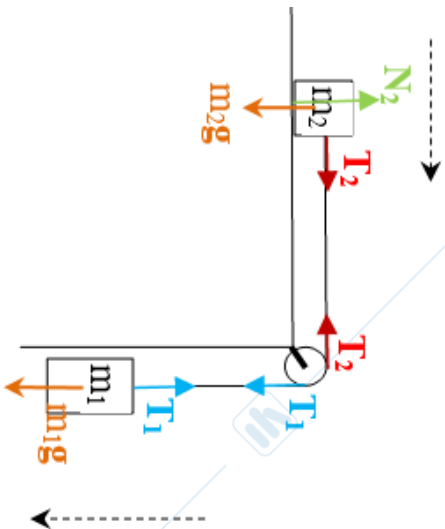
- dalla massa m_2 che si muove sul piano orizzontale
- dalla massa m_1 che si muove verticalmente
- dalla fune di massa trascurabile
- dalla carrucola di massa trascurabile, la cui unica azione è di trasformare un moto orizzontale in un moto verticale.



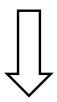
Applichiamo le equazioni vettoriali cardinali della dinamica, opportunamente proiettate:

- traslazione orizzontale verso destra per la massa m_2
- traslazione verticale verso il basso per la massa m_1
- rotazione in verso orario della puleggia si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{T}_2 + m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 = m_2 \vec{a}_2 \\ \vec{T}_1 + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{R}_x \vec{T}_1 + \vec{R}_x \vec{T}_2 = I_0 \vec{\alpha} = 0 \end{cases}$$

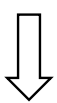


$$\begin{cases} \vec{T}_2 + m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 = m_2 \vec{a}_2 \\ \vec{T}_1 + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{R}_x \vec{T}_1 + \vec{R}_x \vec{T}_2 = I_o \vec{\alpha} = 0 \end{cases}$$

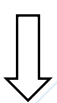


$$\begin{cases} T_2 = m_2 a_2 \\ N_2 = m_2 g \\ -T_1 + m_1 g = m_1 a_1 \\ RT_1 - RT_2 = 0 \end{cases}$$

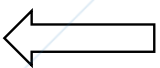
Essendo la fune inestensibile, si ha anche: $a_1 = a_2 = a$ (in modulo).



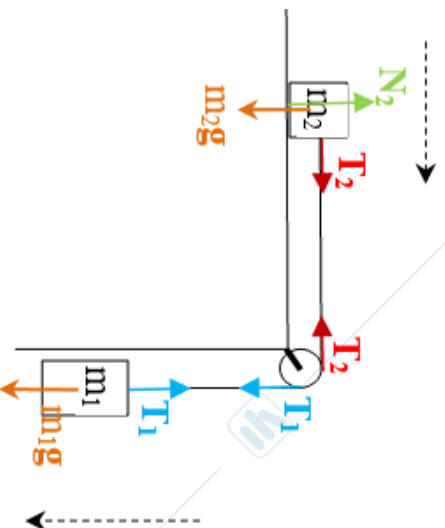
$$\begin{cases} T = m_2 a \\ N_2 = m_2 g \\ -T + m_1 g = m_1 a \\ RT_1 - RT_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = T \end{cases}$$



$$\begin{cases} T = m_2 a \\ N_2 = m_2 g \\ -m_2 a + m_1 g = m_1 a \\ RT_1 - RT_2 = 0 \Rightarrow T_1 = T_2 = T \end{cases}$$



$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}$$



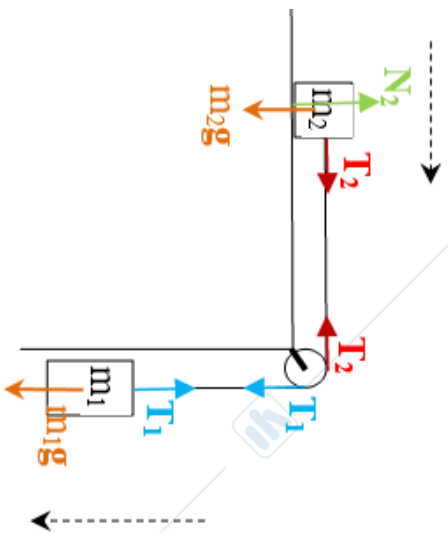
2) la carrucola ha una massa non trascurabile e momento di inerzia I_0 rispetto al suo asse di rotazione (di simmetria).

In questo caso la massa della carrucola NON è più trascurabile e quindi possiede un momento di inerzia I_0 rispetto al suo asse di rotazione (di simmetria).

Applichiamo le equazioni vettoriali cardinali della dinamica, opportunamente proiettate:

- traslazione orizzontale verso destra per la massa m_2
- traslazione verticale verso il basso per la massa m_1
- rotazione in verso orario della puleggia si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{T}_2 + m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 = m_2 \vec{a}_2 \\ \vec{T}_1 + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{R}_x \vec{T}_1 + \vec{R}_x \vec{T}_2 = I_0 \vec{\alpha} \end{cases}$$



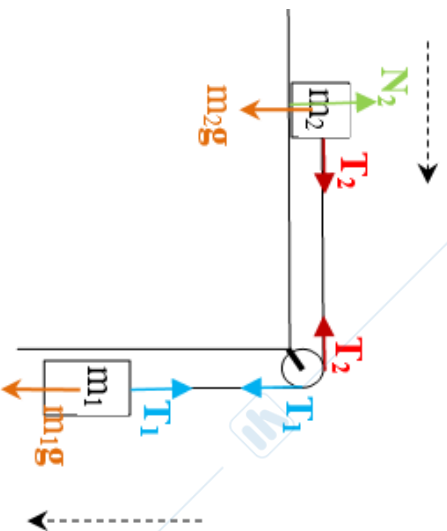
$$\begin{cases} \vec{T}_2 + m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 = m_2 \vec{a}_2 \\ \vec{T}_1 + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1 \\ \vec{R} \times \vec{T}_1 + \vec{R} \times \vec{T}_2 = I_0 \vec{\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_2 = m_2 a_2 \\ N_2 = m_2 g \\ -T_1 + m_1 g = m_1 a_1 \\ RT_1 - RT_2 = I\alpha \end{cases}$$

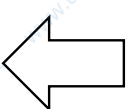
Essendo la fune inestensibile, si ha $a_1 = a_2 = a$ (in modulo) e, poiché la fune non striscia sulla carrucola, si ha $a_1 = a_2 = a = \alpha R$

$$\begin{cases} T_2 = m_2 a \\ N_2 = m_2 g \\ T_1 = m_1 (g - a) \\ Rm_1 (g - a) - Rm_2 a = I_0 \alpha = I_0 \frac{a}{R} \end{cases}$$

$$a = \frac{m_1 R^2 g}{I_0 + m_1 R^2 + m_2 R^2} = \frac{m_1 g}{\frac{I_0}{R^2} + m_1 + m_2}$$



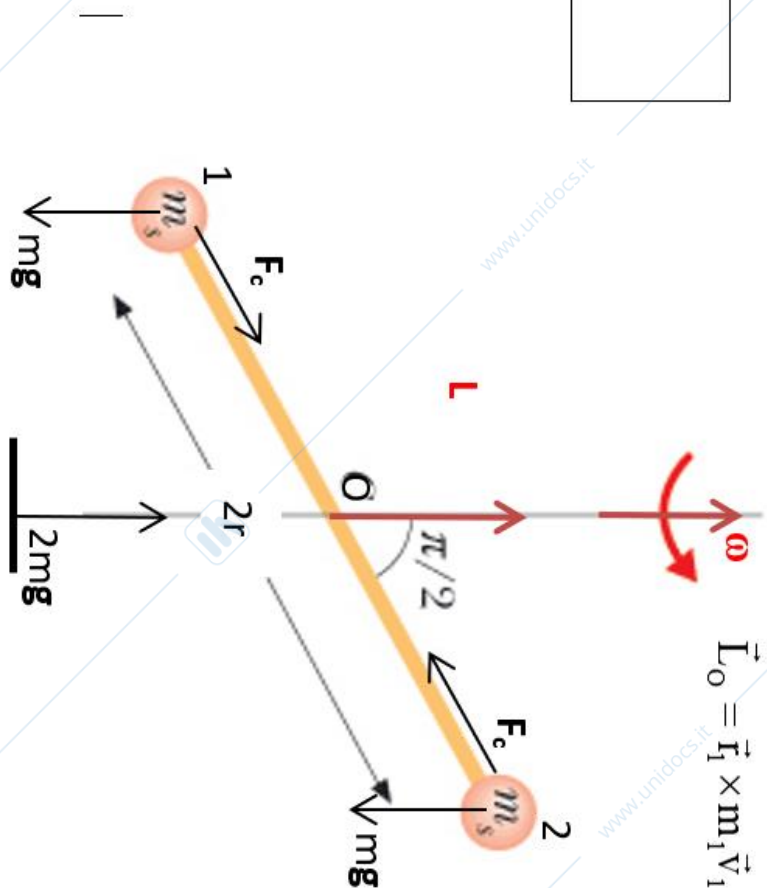
$$a = \frac{m_1 R^2 g}{I_0 + m_1 R^2 + m_2 R^2} = \frac{m_1 g}{\frac{I_0}{R^2} + m_1 + m_2}$$



Poiché $\frac{I_0}{R^2}$ è una quantità positiva allora il valore dell'accelerazione relativa a questo caso è minore del valore dell'accelerazione relativa al caso precedente $a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}$

Esempi di parallelismo e non parallelismo tra momento angolare e velocità angolare

Asse di simmetria verticale
ortogonale all'asta (asse z)



$$\vec{L}_O = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = 2mr v \hat{u}_z = 2mr^2 \omega \hat{u}_z = I_z \vec{\omega}$$

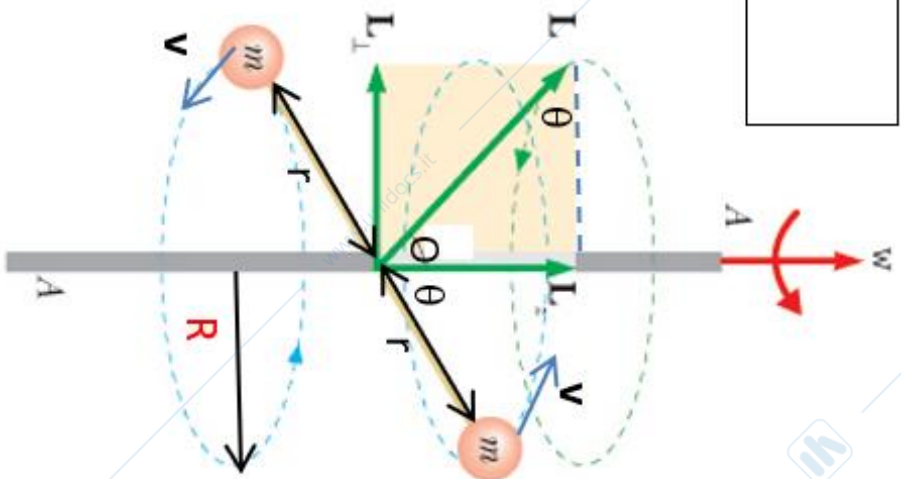
Se $\vec{\omega}$ è costante $\rightarrow \vec{L}_O$ è costante

$$\rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = 0$$

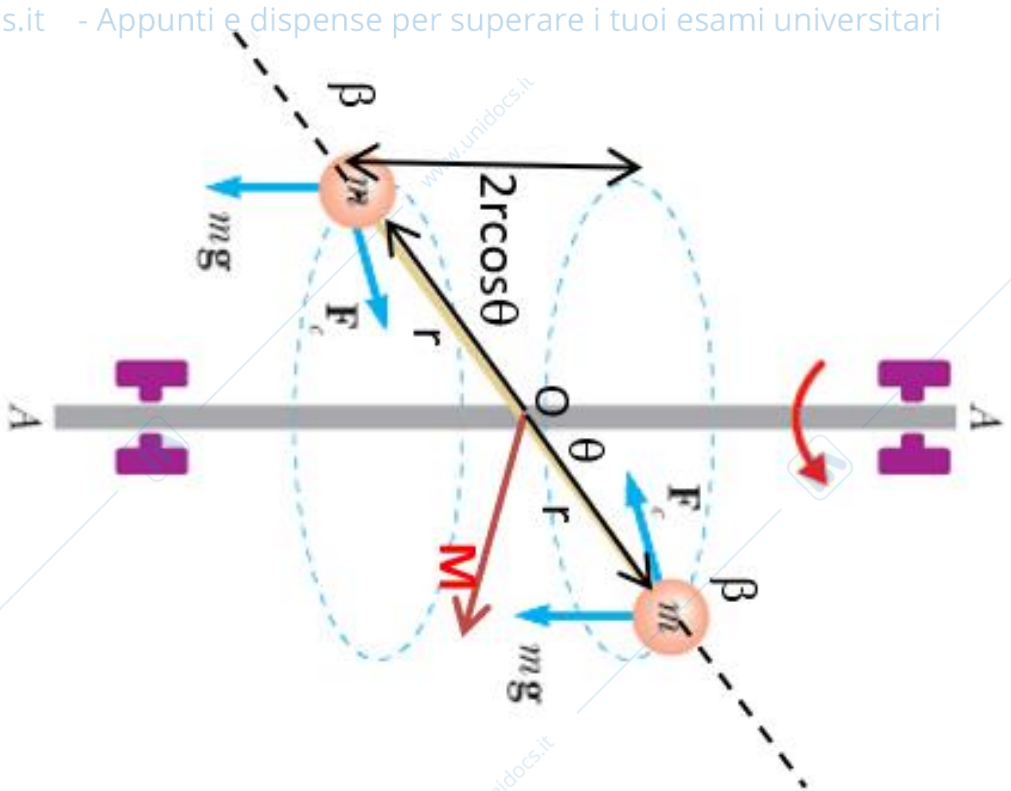
Sulle due masse sono applicate la forza peso $m\vec{g}$ e la forza centripeta \vec{F}_c (tramite l'aggancio all'asta) di modulo $m\omega^2 r$

$$\vec{M}_{mg} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{g} = 0$$

Asse formante un angolo $\theta (\neq \pi/2)$ con l'asta (asse z)



$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= \vec{r}_1 \times m_1 \vec{V}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{V}_2 = 2mrR \omega \hat{u}_1 = \vec{L}_z + \vec{L}_\perp \\ \vec{L}_z &= 2mrR \omega \sin \theta \hat{u}_z = 2mrR^2 \omega \hat{u}_z = I_z \vec{\omega} \\ \vec{L}_\perp &= 2mrR \omega \cos \theta \hat{u}_\perp \end{aligned}$$



Se $\vec{\omega}$ è costante: \vec{L}_z è costante in direzione e modulo, \vec{L}_\perp è costante solo in modulo

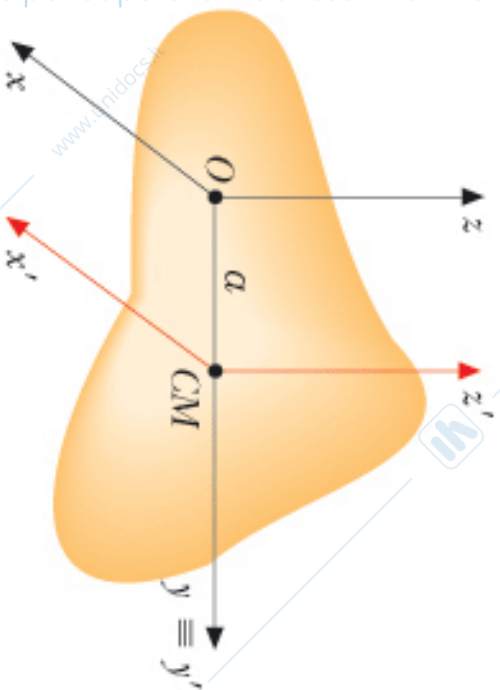
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{L}_z}{dt} + \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = L_\perp \omega \hat{u}_\phi = 2mrR\omega^2 \cos\theta \hat{u}_\phi$$

$$\vec{M}_{mg} = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{g} = 0$$

$$\vec{M}_{F_c} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_c + \vec{r}_2 \times \vec{F}_c = 2rF_c \sin\beta \hat{u}_\phi = 2rF_c \sin(\pi - (\frac{\pi}{2} - \theta)) \hat{u}_\phi =$$

$$= 2rF_c \sin(\frac{\pi}{2} + \theta) \hat{u}_\phi = 2rF_c \cos\theta \hat{u}_\phi = 2rm\omega^2 R \cos\theta \hat{u}_\phi =$$

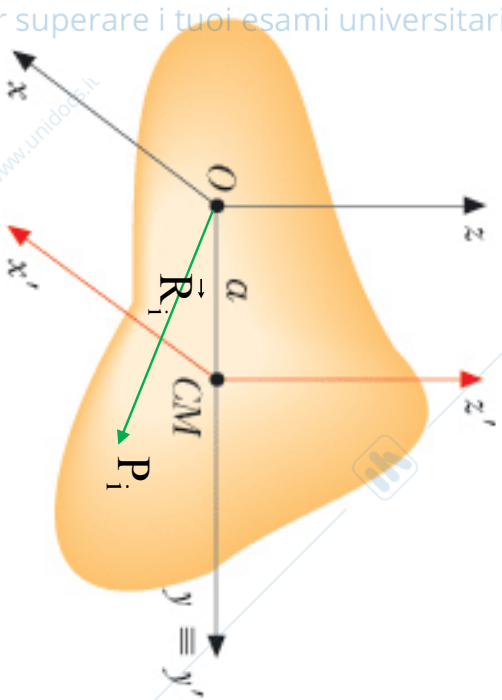
Teorema di Huygens-Steiner



Il momento di inerzia di un corpo rigido di massa m rispetto ad un asse che si trova ad una distanza a dal centro di massa del corpo stesso è dato da:

$$I = I_{CM} + ma^2$$

dove I_{CM} è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa del corpo stesso.



Dimostrazione:

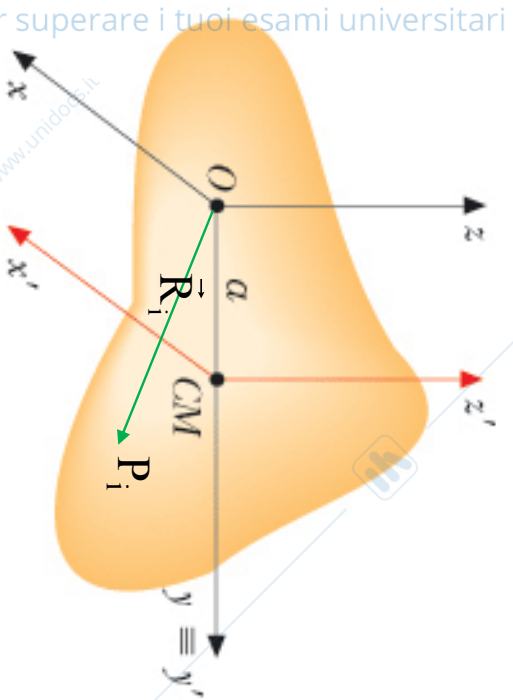
consideriamo due sistemi di riferimento (O, x, y, z) e (CM, x', y', z') con z e z' tra loro paralleli e distanti a :

$$x = x', \quad y = y' + a, \quad z = z'$$

Il momento d'inerzia di un punto P_i rispetto a z è:

$$I_{z_i} = m_i R_i^2 = m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\Rightarrow I_z = \sum_i I_{z_i} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$



Dimostrazione:

consideriamo due sistemi di riferimento (O, x, y, z) e (CM, x', y', z') con z e z' tra loro paralleli e distanti a :

$$x = x', \quad y = y' + a, \quad z = z'$$

Il momento d'inerzia di un punto P_i rispetto a z è:

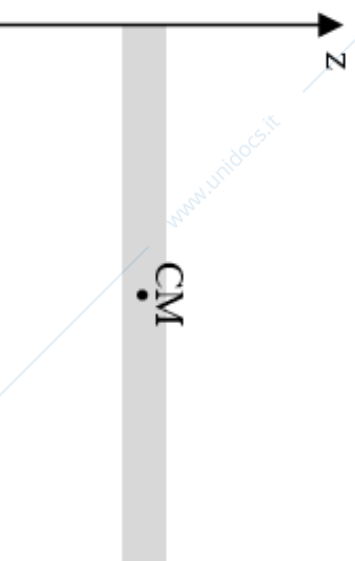
$$I_{z_i} = m_i R_i^2 = m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_z &= \sum_i I_{z_i} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i (x_i'^2 + (y_i' + a)^2) = \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + 2ay_i' + a^2) = \\ &= \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum_i m_i a^2 + 2a \sum_i m_i y_i' \\ I_{z'} &\equiv I_{CM} \quad ma^2 \quad \sum_i m_i y_i' = my'_{CM} = 0 \end{aligned}$$

Esempio

Dato un disco omogeneo di massa m e raggio R che ruota rispetto ad un asse ortogonale al disco e passante per il bordo con velocità angolare $\vec{\omega}$, determinare:

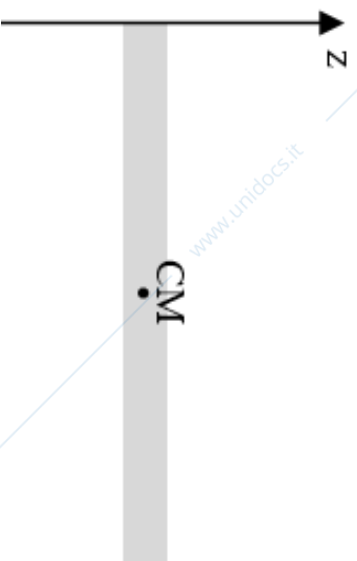
- 1) il suo momento di inerzia
- 2) la sua energia cinetica



Esempio

Dato un disco omogeneo di massa m e raggio R che ruota rispetto ad un asse ortogonale al disco e passante per il bordo con velocità angolare $\vec{\omega}$, determinare:

- 1) il suo momento di inerzia
- 2) la sua energia cinetica

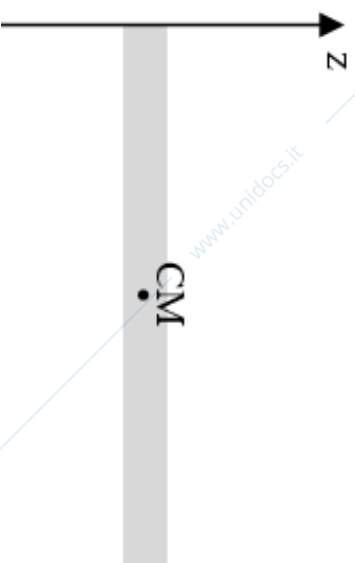


1) Per il Teorema di H.-S. (Huygens-Steiner): $I_z = I_{CM} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

Esempio

Dato un disco omogeneo di massa m e raggio R che ruota rispetto ad un asse ortogonale al disco e passante per il bordo con velocità angolare $\vec{\omega}$, determinare:

- 1) il suo momento di inerzia
- 2) la sua energia cinetica

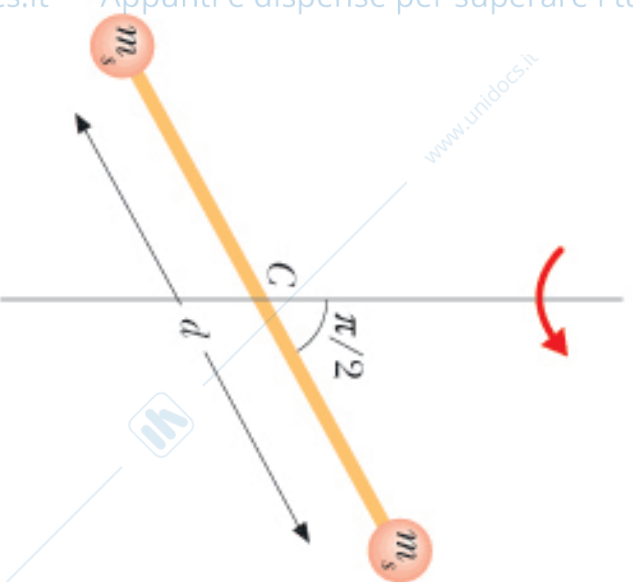


1) Per il Teorema di H.-S. (Huygens-Steiner): $I_z = I_{CM} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$

2) $E_k = \frac{1}{2}I_z\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\omega^2\right) = \frac{3}{4}mR^2\omega^2$

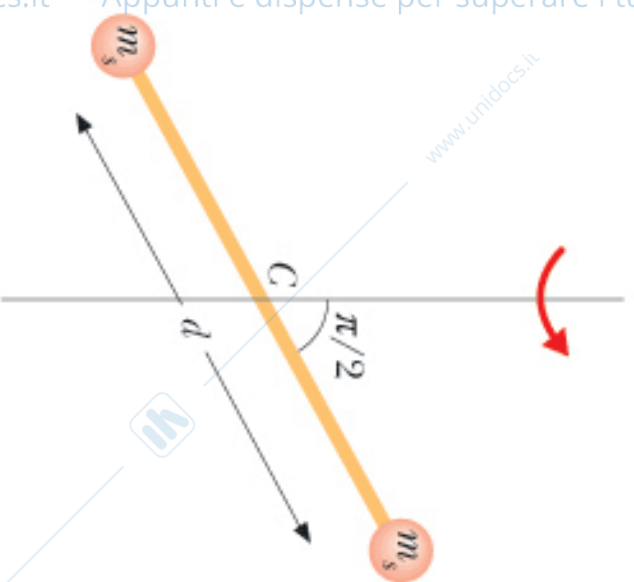
Esempio

Calcolare il momento di inerzia di un sistema formato da un'asta omogenea, di lunghezza d e massa m , con agli estremi due sfere omogenee di raggio R e massa m_s , rispetto ad un asse passante per il CM dell'asta e a questa ortogonale.



Esempio

Calcolare il momento di inerzia di un sistema formato da un'asta omogenea, di lunghezza d e massa m , con agli estremi due sfere omogenee di raggio R e massa m_s , rispetto ad un asse passante per il CM dell'asta e a questa ortogonale.



Il momento di inerzia è una grandezza additiva $\Rightarrow I_z = I_{\text{asta}} + 2I_{\text{sfera}}$

$$1) I_{\text{asta}} = \frac{1}{12} md^2$$

$$2) \text{ Per il Teorema di H.-S. } I_{\text{sfera}} = I_{\text{sfera, CM}} + m_s \left(R + \frac{d}{2} \right)^2$$

$$I_z = I_{\text{asta}} + 2I_{\text{sfera}} = \frac{1}{12} md^2 + 2 \left(\frac{2}{5} m_s R^2 + m_s \left(R + \frac{d}{2} \right)^2 \right)$$