

## 6.6 Teoremi di Konig

### I Teorema di Konig

Consideriamo un SdR solidale con il CM, con l'origine in esso e con orientazione fissa rispetto ad un sistema inerziale (un tale SdR è detto SdR C); il suo moto di trascinamento è traslatorio puro.

Le leggi di composizione del vettore posizione e del vettore velocità per l' $i$ -esimo punto sono:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM} \quad ; \quad \vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$$

essendo  $\vec{r}'_i$  e  $\vec{v}'_i$  la posizione e la velocità relative al sistema C,  $\vec{r}_i$  e  $\vec{v}_i$  quelle riferite al sistema inerziale (fisso),  $\vec{r}_{CM}$  e  $\vec{v}_{CM}$  quelle del centro di massa (nel sistema inerziale fisso).

Il momento angolare del sistema, nel riferimento inerziale, si scrive:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) = \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^n \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}$$

Osserviamo ora che:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i = \vec{L}'_{O'} \equiv \vec{L}'_{CM}, \text{ trovandosi l'origine } O' \text{ del SdR C nel CM;}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{CM} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} \vec{r}'_i \right) \times M \vec{v}_{CM} = \vec{r}'_{CM} \times M \vec{v}_{CM} = 0, \text{ essendo } \vec{r}'_{CM} = 0 \text{ nel SdR C;}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}'_i = M \vec{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} \vec{v}'_i = M \vec{r}_{CM} \times \vec{v}'_{CM} = 0, \text{ essendo } \vec{v}'_{CM} = 0 \text{ nel SdR C;}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} = \vec{L}_O^{(CM)}.$$

Abbiamo dimostrato il seguente teorema:

### **Thr. I Teorema di Konig**

*Il momento angolare di un sistema di punti materiali in un riferimento inerziale è pari alla somma del momento angolare del centro di massa e del momento angolare del sistema rispetto al centro di massa (cioè nel sistema di riferimento C).*

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_O^{(CM)} + \vec{L}'_{CM}}$$

### II Teorema di Konig

In modo analogo possiamo calcolare l'energia cinetica del sistema nel riferimento inerziale:

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (v_i'^2 + v_{CM}^2 + 2\vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{CM}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \vec{v}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i \end{aligned}$$

L'ultimo addendo della somma è nullo, essendo:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i = M \left( \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} \vec{v}'_i \right) = M \vec{v}'_{CM} = 0 \text{ nel SdR C.}$$

Pertanto abbiamo dimostrato il seguente teorema:

**Thr. II Teorema di König**

L'energia cinetica di un sistema di punti materiali rispetto ad un riferimento inerziale è pari alla somma dell'energia cinetica del centro di massa e dell'energia cinetica del sistema di punti rispetto al centro di massa (cioè nel sistema di riferimento C).

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = E_c^{(CM)} + E_c'$$

**Oss.** Il centro di massa, dunque, descrive le proprietà globali del sistema per quanto riguarda la quantità di moto totale e la risultante delle forze esterne, ma non per quanto riguarda il momento angolare e l'energia cinetica. Infatti:

$$\vec{p} = M \cdot \vec{v}_{CM} \quad ; \quad \vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M \cdot \vec{a}_{CM} \quad \text{mentre si può dimostrare che}$$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^{(CM)} + \vec{L}'_{CM} \quad ; \quad E_c = E_c^{(CM)} + E_c'$$

Nelle precedenti equazioni,  $\vec{L}_O^{(CM)} = \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM}$  e  $E_c^{(CM)} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2$  sono, rispettivamente, il momento angolare e l'energia cinetica del centro di massa nel sistema di riferimento considerato, mentre  $\vec{L}'_{CM}$  e  $E_c'$  sono il momento angolare e l'energia cinetica del sistema di punti materiali nel SdR C.

**6.7 Conservazione dell'energia meccanica nei sistemi**Teorema dell'energia cinetica per i sistemi

Per ciascuno dei punti del sistema vale il "Teorema delle forze vive" o "Teorema dell'energia cinetica":

$$\mathcal{L}_{A_i \rightarrow B_i, \gamma_i} = \int_{A_i, \gamma_i}^{B_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \Delta E_{c,i}(A_i, B_i),$$

dove  $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(I)} + \vec{F}_i^{(E)}$  è la risultante delle forze interne ed esterne applicate al punto  $i$ -esimo. Sommando sull'indice  $i$  si ottiene:

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B, \gamma} \triangleq \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{A_i \rightarrow B_i, \gamma_i} = \sum_{i=1}^n \Delta E_{c,i}(A_i, B_i) = \sum_{i=1}^n E_{c,i}(B_i) - \sum_{i=1}^n E_{c,i}(A_i) = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c(A, B)$$

avendo ricordato la definizione di energia cinetica totale del sistema, data in precedenza.

Concludiamo dunque che anche per i sistemi di punti materiali vale il seguente:

**Thr. Teorema dell'energia cinetica**

Se un sistema di punti passa da una configurazione<sup>(0)</sup> A ad una configurazione B, il lavoro compiuto da tutte le forze applicate (interne ed esterne) è pari alla variazione di energia cinetica totale del sistema tra le configurazioni A e B.

$$\mathcal{L}_{A \rightarrow B, \gamma} = \Delta E_c(A, B)$$

<sup>(0)</sup> Per "configurazione" si intende l'insieme dei vettori posizione di tutti i punti materiali del sistema che individua univocamente l'insieme delle posizioni di tali punti in un dato SdR (ad un istante di tempo considerato).

Energia potenziale interna

Consideriamo un sistema di due punti materiali interagenti tra di loro e con l'esterno:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{(E)} \quad ; \quad \vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{(E)} \quad ; \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Il lavoro compiuto dalle forze  $\vec{F}_1$  ed  $\vec{F}_2$  è:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \int_A^B (\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2) = \int_A^B (\vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2) + \int_A^B (\vec{F}_1^{(E)} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{(E)} \cdot d\vec{r}_2) = \mathcal{L}^{(I)} + \mathcal{L}^{(E)}$$

Il lavoro compiuto dalle forze interne è:

$$\mathcal{L}^{(I)} = \mathcal{L}_{1,2}^{(I)} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12}$$

Se le forze interne sono *conservative* avremo:

$$\mathcal{L}_{1,2}^{(I)} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = E_{p_{12}}(A) - E_{p_{12}}(B)$$

Più in generale, in un sistema di  $n$  punti materiali, il lavoro compiuto dalle forze interne è una sommatoria (doppia) del tipo:

$$\mathcal{L}^{(I)} = \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} \mathcal{L}_{ij}^{(I)} = \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}$$

**Oss.** Per un sistema *rigido* di punti materiali (che non si muovono l'uno rispetto all'altro) il lavoro delle forze interne è sempre nullo.

Se le forze interne sono *conservative*, allora il lavoro di tali forze sarà

$$\mathcal{L}^{(I)} = \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} \mathcal{L}_{ij}^{(I)} = \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} (E_{p_{ij}}(A) - E_{p_{ij}}(B))$$

**Def.** Si dice *energia potenziale interna* di un sistema di punti materiali l'indice di stato fisico:

$$E_p^{(I)} = \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} E_{p_{ij}} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n E_{p_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E_{p_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^n E_{p_{ij}},$$

ove  $E_{p_{ij}}$  è l'energia potenziale associata alla forza interna  $\vec{F}_{ij}$ , cioè  $E_{p_{ij}}$  è tale che

$$\mathcal{L}_{ij}^{(I)} = \int_A^B \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = E_{p_{ij}}(A) - E_{p_{ij}}(B).$$

Per completezza, sono state indicate diverse espressioni di sommatoria tra loro equivalenti. Nell'ultima compare il fattore 1/2 perché ogni coppia compare due volte nella sommatoria (infatti il vincolo  $j > i$  è stato rimosso).

Energia propria del sistema

Dalla precedente definizione segue immediatamente che, *se tutte le forze interne sono conservative*, il lavoro da esse compiuto vale:

$$\mathcal{L}^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$$

Considerando ora il Teorema dell'energia cinetica abbiamo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(I)} + \mathcal{L}^{(E)} = \Delta E_c \Rightarrow \mathcal{L}^{(E)} = \Delta E_c - \mathcal{L}^{(I)} = \Delta E_c + \Delta E_p^{(I)}$$

Definiamo allora l'*energia propria* del sistema l'indice di stato fisico:

$$U \equiv E_c + E_p^{(I)}$$

**Oss.** L'energia propria del sistema dipende dal sistema di riferimento scelto ed anche dalle forze esterne applicate al sistema di punti, che ne influenzano l'energia cinetica; si dice *propria*, tuttavia, perché non dipende *esplicitamente* dall'energia potenziale delle forze esterne (ne dipende solo attraverso l'energia cinetica del sistema).

Questa definizione è stata introdotta per ottenere l'equazione:

$$\mathcal{L}^{(E)} = \Delta U$$

*Se le forze interne sono tutte conservative, il lavoro delle forze esterne è uguale alla variazione di energia propria del sistema*

**Oss.** L'energia propria, dunque, si conserva se il sistema è isolato, oppure se è soggetto a forze esterne di risultante nulla, oppure ancora se le forze esterne, pur con risultante non nulla, non compiono lavoro (ad esempio perché risultano, in ogni istante del moto, ortogonali agli spostamenti di ciascun punto).

#### Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Se anche le forze esterne sono tutte conservative, si può definire un'energia potenziale delle forze esterne  $E_p^{(E)}$ , analogamente a quanto fatto per le forze interne, tale che:

$$\mathcal{L}^{(E)} = E_p^{(E)}(A) - E_p^{(E)}(B) = -\Delta E_p^{(E)}$$

Definiamo inoltre, in questo caso, l'*energia (meccanica) totale* del sistema come

$$E \equiv U + E_p^{(E)} = E_c + E_p^{(I)} + E_p^{(E)} = E_c + E_p$$

Se dunque le forze interne ed esterne agenti sono *tutte conservative*, avremo:

$$\mathcal{L}^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)} = \Delta U \Rightarrow \Delta E = \Delta U + \Delta E_p^{(E)} = 0$$

Quest'ultima equazione esprime il

#### **Thr. Teorema di conservazione dell'energia meccanica per un sistema di punti**

*L'energia meccanica totale di un sistema di punti materiali soggetto a sole forze conservative rimane costante nel tempo.*

**OSS.** Non è detto che in un sistema *isolato* si conservi l'energia meccanica totale, perché anche le forze interne possono essere non conservative.

#### Energia interna del sistema

Infine, si dice *energia interna* di un sistema di punti l'energia propria calcolata nel sistema solidale col centro di massa, cioè la somma dell'energia cinetica relativa al centro di massa e dell'energia potenziale interna:  $U_{\text{int}} \equiv E'_c + E_p^{(I)}$ .

Esempio (facoltativo): Due punti materiali di masse  $m_1$  ed  $m_2$  uniti da una molla di costante elastica  $k$  sono lanciati in aria nel campo gravitazionale terrestre.

L'energia cinetica rispetto ad un riferimento (quasi inerziale) solidale con la Terra è:

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$$

L'energia potenziale interna è quella della forza elastica:

$$E_p^{(I)} = \frac{1}{2} k r_{12}^2, \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

L'unica forza esterna che consideriamo è la forza peso, che è conservativa; l'energia potenziale delle forze esterne è dunque

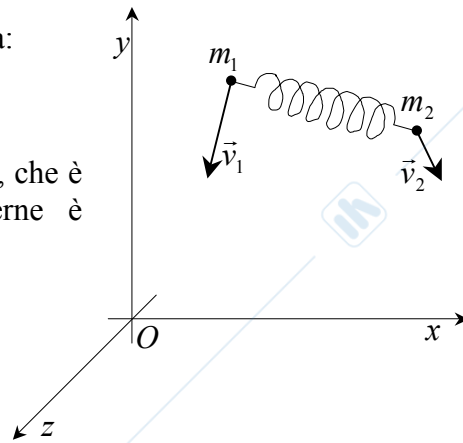
$$E_p^{(E)} = g(m_1 y_1 + m_2 y_2)$$

L'energia propria del sistema è:

$$U = E_c + E_p^{(I)} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + k r_{12}^2)$$

L'energia totale del sistema si conserva:

$$E = U + E_p^{(E)} = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + k r_{12}^2) + g(m_1 y_1 + m_2 y_2) = \text{cost.}$$



## 6.8 Applicazione: gli urti

I fenomeni di urto rappresentano una vasta schiera di fenomeni particolarmente importanti nella fisica sperimentale, poiché attraverso di essi è possibile studiare le proprietà della materia e la natura delle interazioni tra le particelle interagenti.

In generale occorre servirsi di teorie complesse quali la Meccanica quantistica e la Relatività per ottenere tali informazioni, tuttavia urti tra punti materiali a velocità non relativistiche possono essere ben descritti anche attraverso la Meccanica Classica, ed i problemi d'urto possono riguardarsi come un'applicazione della dinamica dei sistemi di particelle.

### Urto tra punti materiali

**Def.** Un urto è un'interazione molto breve e molto intensa tra punti materiali (particelle).

**Oss.** Possiamo distinguere diverse fasi di un urto:

1. moto indipendente iniziale;
2. interazione (contatto + deformazione + rilascio della deformazione);
3. moto indipendente finale.

Quindi in particolare si identificano un istante iniziale  $t_0$ , appena prima dell'urto, ed un istante finale  $t_0 + \Delta t$ , appena dopo l'urto, separati di un intervallo temporale  $\Delta t$ .

Durante l'urto, che ha in generale una durata  $\Delta t$  molto breve, si sviluppano delle *forze di interazione interna al sistema* di punti materiali urtanti, di tipo *impulsivo*.

Sulla  $i$ -esima particella agirà in generale una forza risultante interna impulsiva  $\vec{F}_i^{(I)}$  di impulso

$$\vec{I}_i = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \vec{F}_i^{(I)}(t) dt = \Delta \vec{p}_i$$

In questa espressione,  $\vec{F}_i^{(I)}$  indica la forza esercitata durante l'urto dai restanti corpi sul corpo  $i$ -esimo,  $\Delta \vec{p}_i$  rappresenta la variazione di quantità di moto del corpo  $i$ -esimo.

**Oss.** In generale, le particelle o punti materiali interagenti tra loro durante l'urto **non sono isolati**, tuttavia data la breve durata  $\Delta t$  dell'urto, le eventuali forze esterne agenti di natura non impulsiva (come la forza peso, le forze elastiche, le forze elettrostatiche, ecc.) danno un contributo trascurabile alla variazione della quantità di moto totale del sistema (che è pari appunto all'impulso delle sole forze esterne, come stabilito dal teorema dell'impulso per i sistemi di punti materiali).

**Oss.** Forze esterne dovute a reazioni vincolari possono invece manifestare un comportamento impulsivo. In presenza di vincoli con l'esterno non possiamo quindi assumere che la quantità di moto totale del sistema si conservi in un urto.

### Conservazione della quantità di moto

Dunque, in base al teorema dell'impulso se, come avviene quasi sempre, *tutte le forze esterne sono di natura non impulsiva*, la *quantità di moto totale del sistema si conserva* durante l'urto, indipendentemente dalla natura dell'urto stesso (più o meno dissipativa, ad esempio).

**Ex.** Consideriamo ad esempio il caso di *due* particelle urtanti, avremo allora:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{cost.} \quad \text{ovvero}$$

$$\vec{P}_i = \vec{p}_{1,i} + \vec{p}_{2,i} = \vec{p}_{1,f} + \vec{p}_{2,f} = \vec{P}_f \quad \text{ovvero}$$

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$$

### Classificazione degli urti e conservazione dell'energia cinetica

In generale, gli urti si classificano in base alla conservazione dell'energia cinetica del sistema di particelle urtanti.

- Se l'energia cinetica (totale) del sistema è conservata nell'urto, allora si dice che l'urto è (perfettamente) **elastico** (poiché questo è il caso in cui due palline perfettamente elastiche urtano tra loro).

- Se l'energia cinetica (totale) del sistema non è conservata nell'urto ma diminuisce, allora si dice che l'urto è **anelastico** (poiché questo è il caso in cui due palline non perfettamente elastiche urtano tra loro).

**Oss.1** In un urto anelastico la diminuzione di energia cinetica è da imputare evidentemente al lavoro di forze interne di natura non conservativa.

Vi è un limite al massimo lavoro che queste forze possono compiere, e ciò si deve alla conservazione della quantità di moto del sistema. Infatti dire che la quantità di moto del sistema si conserva, equivale a dire che si conserva la velocità del centro di massa, per il teorema del centro di massa, quindi l'energia cinetica finale non potrà essere inferiore all'energia cinetica del centro di massa  $\frac{1}{2} M v_C^2$ , che deve conservarsi.

**Oss.2** In base a quanto detto nell'osservazione precedente, segue che l'urto più anelastico (che conservi la quantità di moto totale) che si possa avere è un urto in cui l'energia cinetica finale interna è nulla, cioè le particelle urtanti dopo l'urto non hanno più alcun moto relativo, ma procedono come un unico punto materiale di massa pari alla loro massa totale (il centro di massa appunto). Tale urto anelastico si dice **perfettamente anelastico**.

**Oss.3** Esistono urti in cui l'energia cinetica finale è maggiore di quella iniziale, per via della conversione di una qualche forma di energia interna al sistema in energia cinetica delle particelle urtanti. Tali urti sono detti **superelastici**.