

DINAMICA DEL PUNTO: Momenti, lavoro, energia, potenza

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.

www.unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

unidocs.it

www.unidocs.it

www.unidocs.it

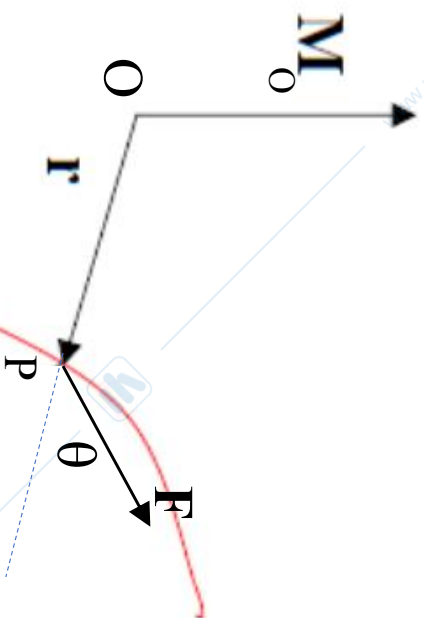
Momento di una forza \vec{M}_O

Si definisce *momento di una forza* \vec{F} rispetto ad un polo O:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

dove:

il punto O è il **polo** rispetto a cui è calcolato \vec{M}_O
 \vec{r} è il vettore che parte dal polo O e va al punto di applicazione della forza \vec{F}



Modulo: $|\vec{M}_O| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin\theta$

$$|\vec{M}_O|_{\max} = |\vec{r}| |\vec{F}| \Leftrightarrow \theta = \pi/2 \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{F}$$

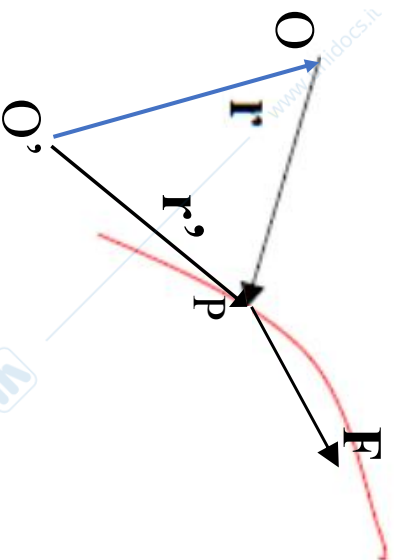
$$|\vec{M}_O|_{\min} = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{F}$$

Direzione: perpendicolare al piano generato da \vec{r} e \vec{F}

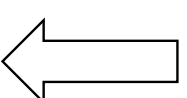
Verso: regola della mano destra

Momento di una forza $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

Se si cambia polo (da O a O') cosa succede al momento della forza ?



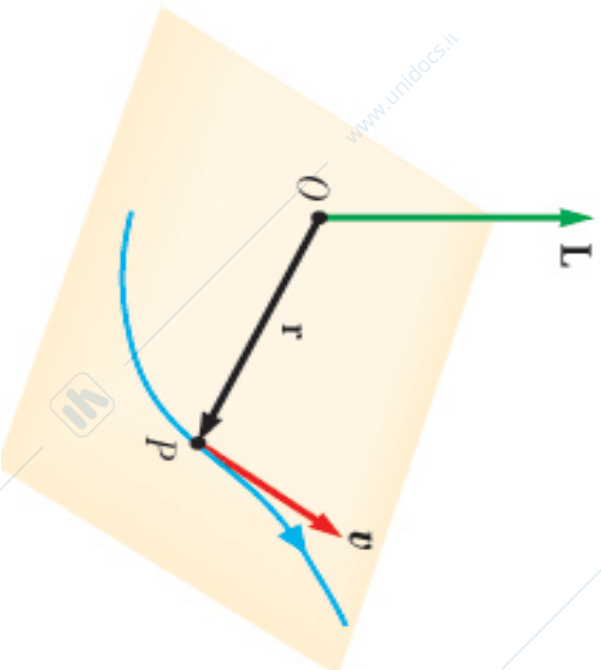
$$\begin{cases} \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{O'O} + \vec{r}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{O'O} \times \vec{F} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F} \end{cases}$$



In generale, cambiando polo cambia il momento della forza

Momento angolare o momento della quantità di moto \vec{L}_O

Si definisce *momento angolare* o *momento della quantità di moto* rispetto ad un polo O:



$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

dove:

il punto O è il **polo** rispetto a cui è calcolato \vec{L}_O
 \vec{r} è il vettore che parte dal polo O e va al punto di applicazione della quantità di moto \vec{p}

$$\text{Modulo: } |\vec{L}_O| = |\vec{r}| |m\vec{v}| \sin\theta$$

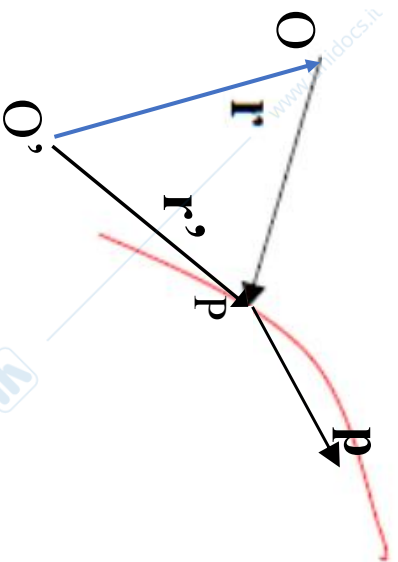
$$[L_O] = [L][M][L][T]^{-1} = [M][L]^2[T]^{-1} \rightarrow \text{kgm}^2\text{s}^{-1} = \text{Nm s}$$
$$\begin{cases} |\vec{L}_O|_{\max} = |\vec{r}| |\vec{p}| \Leftrightarrow \theta = \pi/2 \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{p} \\ |\vec{L}_O|_{\min} = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow \vec{r} \parallel \vec{p} \end{cases}$$

Direzione: perpendicolare al piano generato da \vec{r} e \vec{F}

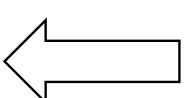
Verso: regola della mano destra

Momento angolare o momento della quantità di moto

Se si cambia polo (da O a O') cosa succede al momento della forza ?



$$\begin{cases} \vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} \\ \vec{L}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{p} = (\vec{O'O} + \vec{r}) \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{O'O} \times \vec{p} = \vec{L}_O + \vec{O'O} \times \vec{p} \end{cases}$$



In generale, cambiando polo cambia il momento angolare

Teorema del momento angolare

Dato un polo O fisso in un sistema di riferimento inerziale :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

La derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo O fisso in un sistema di riferimento inerziale.

Teorema del momento angolare $\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$

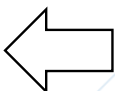
Se $\vec{M}_O = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \text{costante}$ (in direzione, verso e modulo)



Conservazione del momento angolare

Se il momento delle forze è nullo allora il momento angolare rimane costante (in direzione verso e modulo)

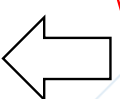
Teorema del momento angolare $\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \rightarrow \vec{M}_O dt = d\vec{L}_O \rightarrow \int_0^t \vec{M}_O dt = \int_{(\vec{L}_O)_{iniz}}^{\vec{L}_O} d\vec{L}_O = \vec{L}_O - (\vec{L}_O)_{iniz} = \Delta\vec{L}_O$$


Per produrre una variazione del momento angolare occorre l'azione, per un certo tempo, del momento della forza

Teorema del momento angolare $\Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \rightarrow \vec{M}_O dt = d\vec{L}_O \rightarrow \int_0^t \vec{M}_O dt = \int_{(\vec{L}_O)_{iniz}}^{\vec{L}_O} d\vec{L}_O = \vec{L}_O - (\vec{L}_O)_{iniz} = \Delta\vec{L}_O$$

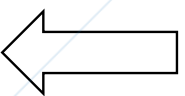


Per produrre una variazione del momento angolare occorre l'azione, per un certo tempo, del momento della forza

$$\int_0^t \vec{M}_O dt = \int_0^t (\vec{r} \times \vec{F}) dt = \vec{r} \times \int_0^t \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L}_O$$

Momento dell'impulso

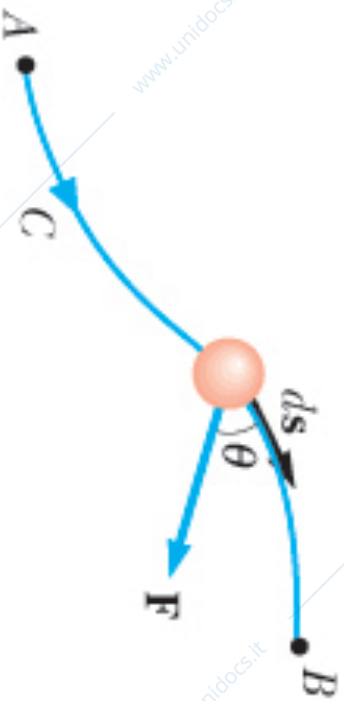
Impulso della forza



Teorema del momento dell'impulso: la variazione del momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato al punto

Lavoro W

Se il punto di applicazione di una forza subisce un certo spostamento ed esiste una componente della forza parallela allo spostamento, la forza compie un lavoro W.



Un punto materiale segue una traiettoria da A a B ed è soggetto ad una forza \vec{F} .

Definiamo con dW il lavoro fatto dalla forza \vec{F} per uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ (tangente alla traiettoria)

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}| |\vec{ds}| \cos \theta = F \cdot ds \cdot \cos \theta$$

Sommiamo \rightarrow integriamo tutti i contributi dW :

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cdot ds \cdot \cos \theta = \int_A^B F_T \cdot ds$$

Componente
tangenziale della forza

$$[W] = [F][L] \rightarrow \text{Nm} = \text{J (Joule)}$$

Lavoro W

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cdot ds \cdot \cos\theta = \int_A^B F_T \cdot ds$$

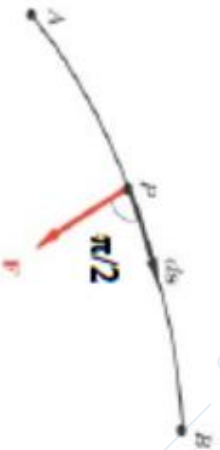
Se $\theta < \pi/2$, $\Rightarrow \cos\theta > 0 \Rightarrow$ **Lavoro positivo** \rightarrow Lavoro motore

Se $\theta > \pi/2$, $\Rightarrow \cos\theta < 0 \Rightarrow$ **Lavoro negativo** \rightarrow Lavoro resistente

Se $\theta = \pi/2$, $\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow$ **Lavoro nullo** \rightarrow Forza centripeta



Per avere lavoro non nullo bisogna che la forza provochi una variazione del modulo della velocità



Lavoro W

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cdot ds \cdot \cos\theta = \int_A^B F_T \cdot ds$$

Quando sul punto materiale agisco più forze \rightarrow il lavoro totale è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo

$$W_{\text{tot}} = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \dots + \int_A^B \vec{F}_n \cdot d\vec{s} = W_1 + \dots + W_n$$

Potenza P

La *potenza* corrisponde al lavoro per unità di tempo.

Essa risulta particolarmente importante per qualificare le prestazioni di un dispositivo o di una macchina che fornisce lavoro

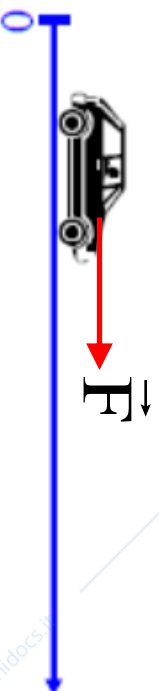
$$\text{Potenza istantanea: } P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\text{Potenza media: } P = \frac{W}{t}$$

$$[P] = [W][T]^{-1} \rightarrow Js^{-1} = W [Watt]$$

Esempio

Un'automobile ha massa $m = 800$ kg. Calcolare la potenza media che deve erogare il motore per poter andare da 0 a 100 km/h in 10 s con un'accelerazione costante.



$$100 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 100 \frac{10^3 \text{m}}{3600 \text{s}} = 27,8 \text{m/s}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\int F \hat{u}_x dx \hat{u}_x}{t} = \frac{\int F dx}{t} = \frac{\int m a dx}{t} = \frac{m a \int dx}{t} = \frac{m a x_{\text{tot}}}{t}$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato: $v(t) = 0 + at \rightarrow a = \frac{v(t=10\text{s})}{10\text{s}} = 2,78 \text{ m/s}^2$

$$a = \frac{dv(x)}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \rightarrow \int_0^{x_{\text{tot}}} a dx = \int_0^{v(t=10\text{s})} v dv \rightarrow a x_{\text{tot}} = \frac{(v(t=10\text{s}))^2}{2} = \frac{(27,8)^2}{2} = \frac{773,64}{2} = 386,42 \text{ (m}^2/\text{s}^2)$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot a \cdot x_{\text{tot}}}{t} = \frac{800 \times 386,4}{10} = 30912 \text{ W} = 30,912 \text{ kW}$$

Energia cinetica

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{s}| \cos \theta = F \cdot ds \cdot \cos \theta = F_T ds = m a_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv$$

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B m v dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Energia cinetica

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = |\vec{F}| \cdot |d\vec{s}| \cos \theta = F \cdot ds \cdot \cos \theta = F_T ds = ma_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = mvdv$$

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Se definiamo come **energia cinetica** E_k la grandezza scalare $\frac{1}{2} m v^2$

$$W_{AB} = \int_A^B dW = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

Teorema dell'energia cinetica

Il lavoro compiuto dalla forza risultante che agisce su un corpo è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo.

Energia cinetica E_k

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

$$[E_k] = [W] \rightarrow \text{Nm} = \text{J (Joule)}$$

Se $W > 0 \implies E_{k, \text{Finale}} > E_{k, \text{Iniziale}} \implies v$ (in modulo) aumenta

Se $W < 0 \implies E_{k, \text{Finale}} < E_{k, \text{Iniziale}} \implies v$ (in modulo) diminuisce

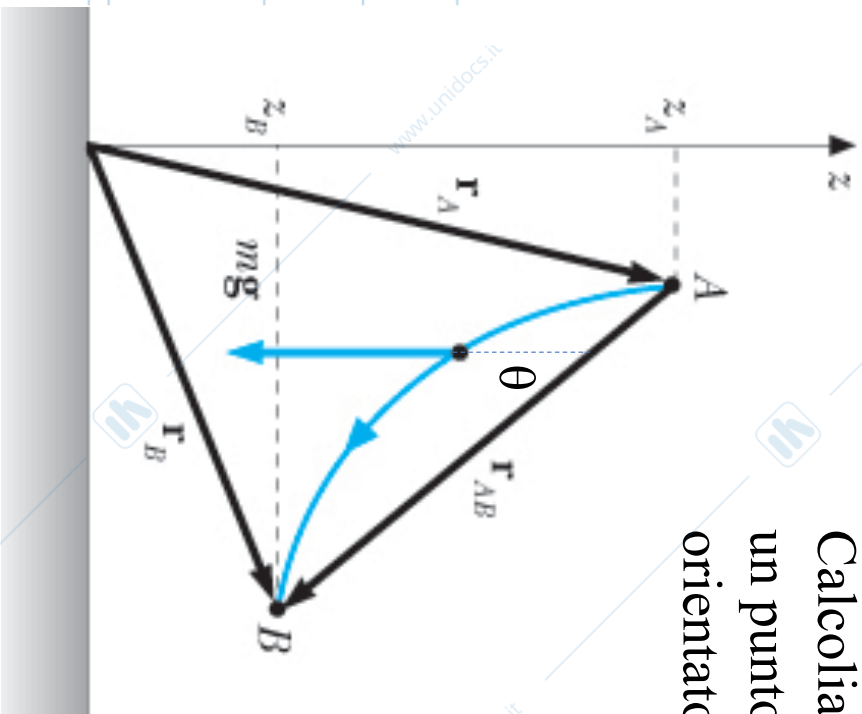
Se $W = 0 \implies E_{k, \text{Finale}} = E_{k, \text{Iniziale}} \implies v$ (in modulo) rimane costante

N.B. La nozione di lavoro e quindi la variazione di energia cinetica è legata:

- 1) allo spostamento: se non c'è spostamento non può esserci lavoro (es. forza di attrito statico)
- 2) alla variazione del modulo della velocità (es. una forza centripeta non genera lavoro)

Lavoro della forza peso

Calcoliamo il lavoro della forza peso per uno spostamento generico di un punto materiale da A a B. Prendiamo un asse z centrato sul suolo e orientato verso l'alto.



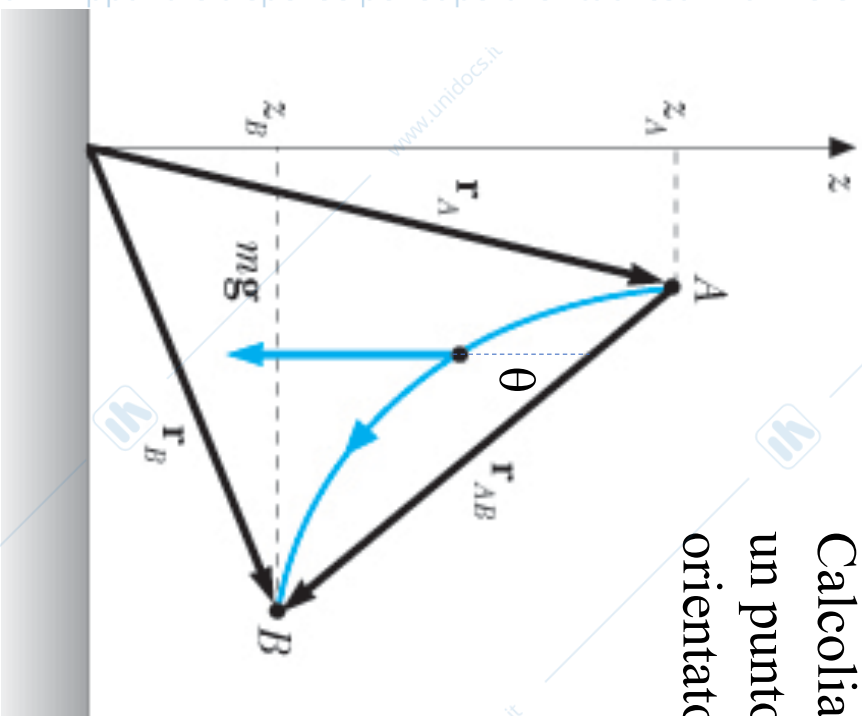
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{\text{peso}} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} = mg \int_A^B ds$$

Forza costante

Somma di tutti i vettori $d\vec{s}$
 Vettore \vec{r}_{AB}

Lavoro della forza peso

Calcoliamo il lavoro della forza peso per uno spostamento generico di un punto materiale da A a B. Prendiamo un asse z centrato sul suolo e orientato verso l'alto.



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{\text{peso}} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} = m\vec{g} \int_A^B d\vec{s}$$

Forza costante

Somma di tutti i vettori $d\vec{s}$

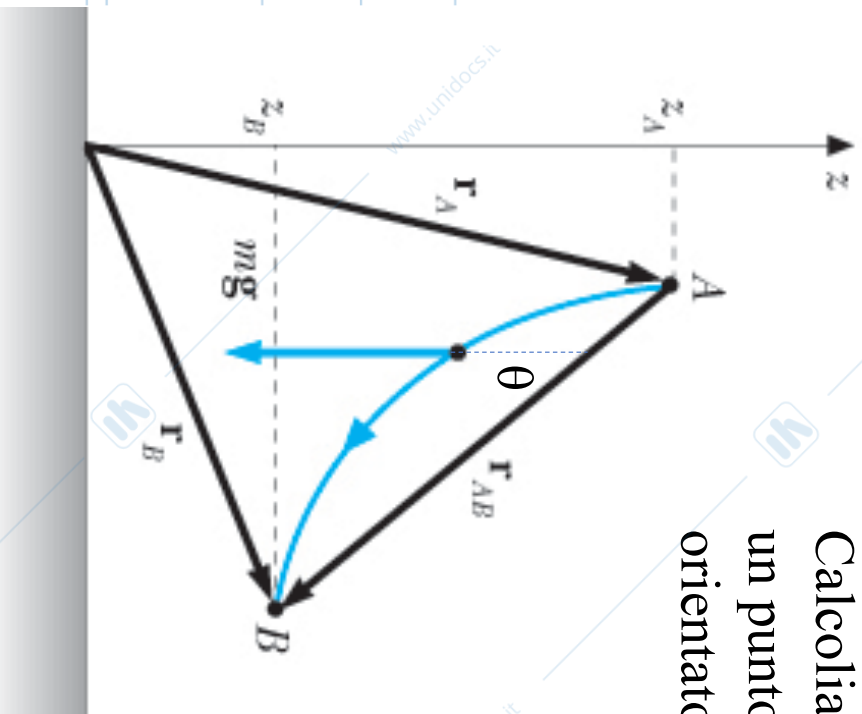
Vettore \vec{r}_{AB}

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{\text{peso}} \cdot d\vec{s} = m\vec{g} \cdot \vec{r}_{AB} = |\vec{m\vec{g}}| \cdot |\vec{r}_{AB}| \cos\theta$$

Modulo della proiezione di \vec{r}_{AB} lungo la direzione di $m\vec{g}$ → lungo z

Lavoro della forza peso

Calcoliamo il lavoro della forza peso per uno spostamento generico di un punto materiale da A a B. Prendiamo un asse z centrato sul suolo e orientato verso l'alto.



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{\text{peso}} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} = m\vec{g} \int_A^B d\vec{s}$$

Forza costante

Somma di tutti i vettori $d\vec{s}$

Vettore \vec{r}_{AB}

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{\text{peso}} \cdot d\vec{s} = m\vec{g} \cdot \vec{r}_{AB} = |\vec{m\vec{g}}| \cdot |\vec{r}_{AB}| \cos\theta$$

Modulo della

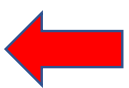
proiezione di \vec{r}_{AB} lungo la direzione di $m\vec{g}$

→ lungo z

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{\text{peso}} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} = -|\vec{m\vec{g}}| \cdot (z_B - z_A)$$

Lavoro della forza peso

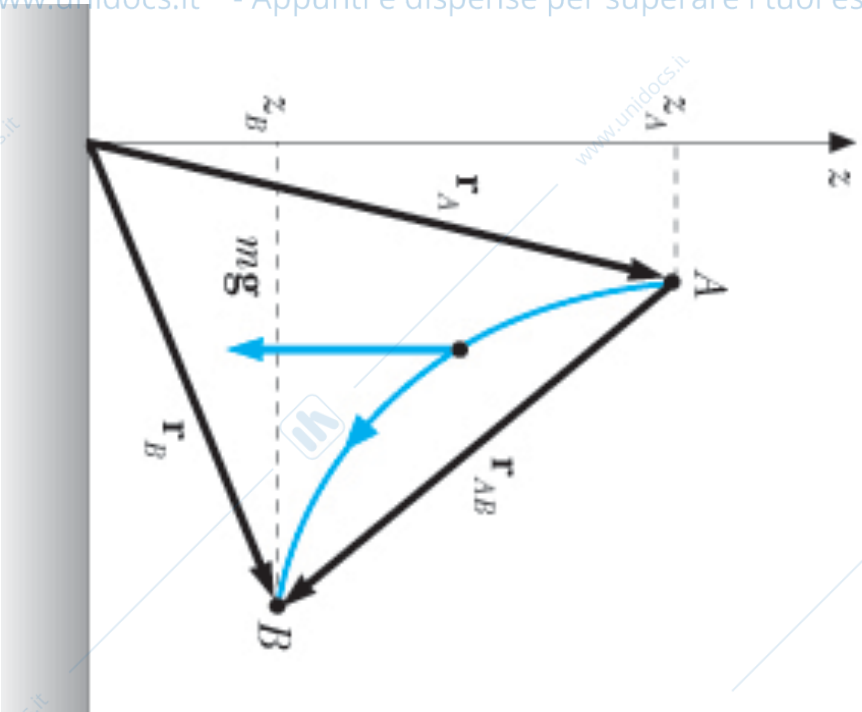
$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{\text{peso}} \cdot \vec{ds} = \int_A^B m\vec{g} \cdot \vec{ds} = |m\vec{g}| \cdot (z_A - z_B) = -|m\vec{g}| \cdot (z_B - z_A)$$



Se $z_B < z_A \rightarrow W_{AB} > 0 \leftarrow$ la forza peso ha verso concorde allo spostamento verticale

Se $z_B > z_A \rightarrow W_{AB} < 0 \leftarrow$ la forza peso ha verso contrario allo spostamento verticale

N.B. il lavoro della forza peso dipende solo dalla variazione di altezza, non dall'eventuale spostamento laterale



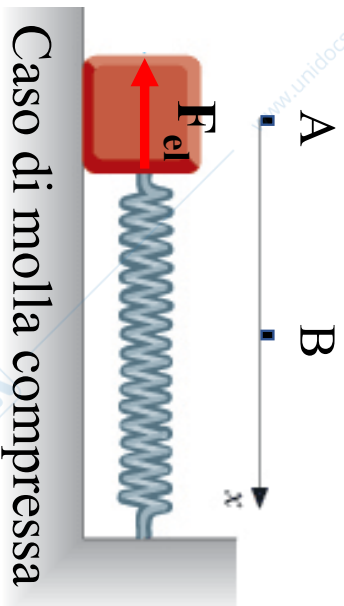
Lavoro della forza elastica

Calcoliamo il lavoro della forza elastica per uno spostamento del punto materiale lungo l'asse x da A a B .

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot \vec{ds} = \int_A^B -kx\hat{u}_x \cdot dx\hat{u}_x = -k \int_A^B x dx = -k \left(\frac{x_B^2}{2} - \frac{x_A^2}{2} \right)$$

Nel caso di molla allungata la forza elastica ha lo stesso verso dello spostamento

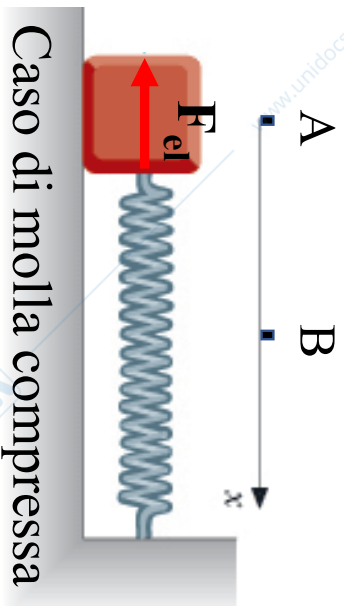
$$\Rightarrow W_{AB} > 0$$



Caso di molla allungata

Nel caso di molla compressa la forza elastica ha verso opposto allo spostamento

$$\Rightarrow W_{AB} < 0$$



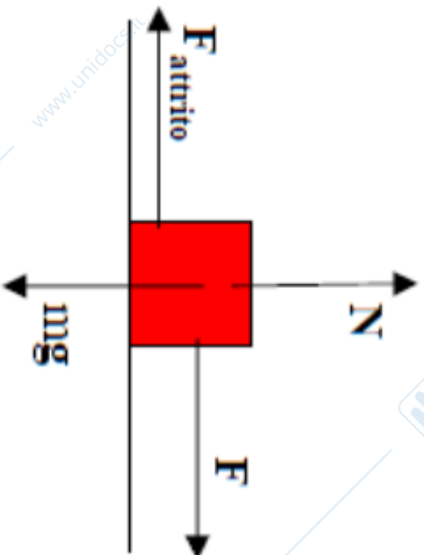
Caso di molla compressa

Lavoro della forza di attrito dinamico

Calcoliamo il lavoro della forza di attrito dinamico per uno spostamento del punto materiale da A a B lungo una traiettoria qualsiasi.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{ad} \cdot \vec{ds} = \int_A^B -\mu_d N \hat{u}_s \cdot ds \hat{u}_s = -\mu_d N \int_A^B ds = -\mu_d N L$$

Lunghezza del percorso da A a B



Il lavoro della forza di attrito dinamico è sempre negativo perché la forza di attrito dinamico è sempre di verso opposto allo spostamento del punto materiale.

Ricapitolando:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{\text{peso}} \cdot \vec{ds} = |m\vec{g}| \cdot (z_A - z_B) = -|m\vec{g}| \cdot (z_B - z_A)$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot \vec{ds} = -k \left(\frac{x_B^2}{2} - \frac{x_A^2}{2} \right)$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{ad} \cdot \vec{ds} = -\mu_d NL$$



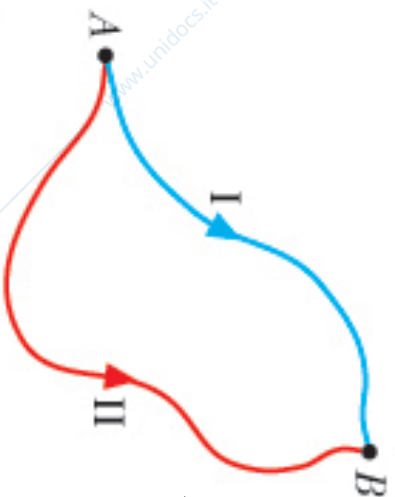
Il lavoro dipende solo dalle coordinate delle posizioni A e B e non dipende dal percorso



Il lavoro dipende dal percorso per andare da A a B

Forze conservative

Le forze per cui il lavoro non dipende dal percorso effettuato ma dipende solo dalle coordinate spaziali del punto di partenza e del punto di arrivo si chiamano **forze conservative**



⇒ Il lavoro calcolato lungo due diversi percorsi che uniscono i punti A e B è lo stesso se la forza è conservativa

$$W_{AB} = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = f(B) - f(A)$$

Funzione delle coordinate del punto B e del punto A

Se consideriamo il percorso chiuso formato dal percorso I più il percorso II effettuato al contrario

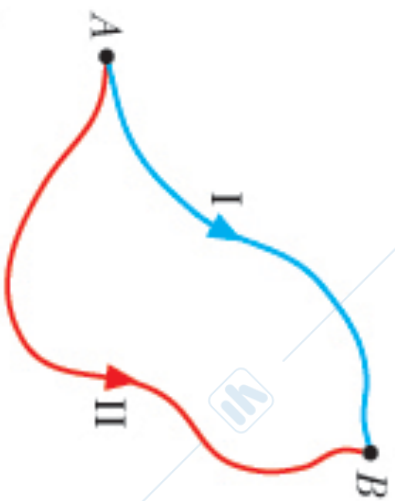
$$W_{ABA} = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s}) + \int_B^A (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s}) - \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = 0 \Rightarrow \oint_{\vec{F}} ds = 0$$



Il lavoro lungo un qualsiasi percorso chiuso è nullo

Energia potenziale E_p

Nel solo caso di forze conservative (es. forza peso e forza elastica)



$$W_{AB} = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s}) = f(B) - f(A) = -\Delta E_{\text{potenziale}}$$

L'energia potenziale:

-) è definita a meno di una costante
-) la sua espressione analitica è funzione delle coordinate spaziali in cui si trova il punto materiale e dipende dalla forza conservativa

Esempi:

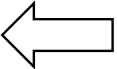
$$\text{Forza peso} \rightarrow E_{p,\text{peso}} = mgz + \text{costante} \rightarrow W_{AB,\text{peso}} = -\Delta E_{p,\text{peso}} = -(E_{p,\text{peso}}(B) - E_{p,\text{peso}}(A)) = -(mgz_B - mgz_A)$$

$$\text{Forza elastica} \rightarrow E_{p,\text{elast}} = \frac{1}{2}kx + \text{costante} \rightarrow W_{AB,\text{peso}} = -\Delta E_{p,\text{elast}} = -(E_{p,\text{elast}}(B) - E_{p,\text{elast}}(A)) = -\left(\frac{1}{2}kx_B - \frac{1}{2}kx_A\right)$$

Energia meccanica E_m

Se agiscono **solo forze conservative**:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{AB} = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \\ W_{AB} = -\Delta E_p = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = E_{p,A} - E_{p,B} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} \Rightarrow E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B}$$


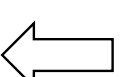
La somma dell'energia cinetica e di quella potenziale di un punto materiale soggetto all'azione di forze conservative si conserva.

Energia meccanica E_m

Se agiscono solo forze conservative:

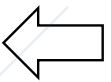
$$\begin{cases} W_{AB} = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \\ W_{AB} = -\Delta E_p = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = E_{p,A} - E_{p,B} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} \Rightarrow E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B}$$



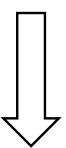
Se definiamo l'**energia meccanica** come:

$$E_m = E_k + E_p$$



$$E_m = \text{costante}$$

$$\Delta E_m = 0$$



Principio di conservazione dell'energia meccanica

In presenza di sole forze conservative l'energia meccanica si conserva

La somma dell'energia cinetica e di quella potenziale di un punto materiale soggetto all'azione di forze conservative si conserva.

E se il punto materiale fosse soggetto anche a forze non conservative ?

Energia meccanica E_m

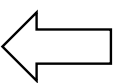
Energia meccanica E_m

E se il punto materiale fosse soggetto anche a forze non conservative ?

Il lavoro totale sarà la somma del lavoro delle forze conservative e del lavoro delle forze non conservative

$$W_{\text{tot}} = W_c + W_{nc} = \Delta E_k \quad (\text{per il teorema dell'energia cinetica})$$

$$W_c = -\Delta E_p$$



$$W_{nc} = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_m$$



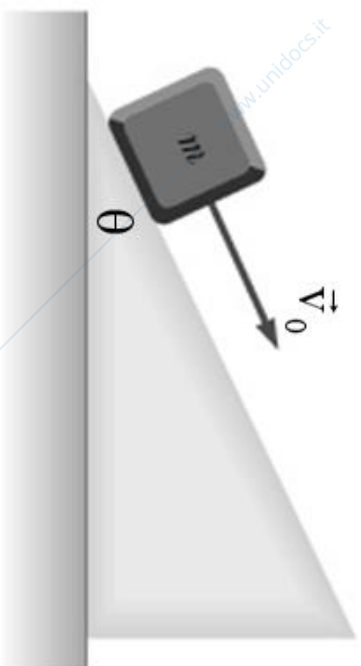
In presenza anche di forze non conservative l'energia meccanica non si conserva e la sua variazione è uguale al lavoro delle forze non conservative

Esempio 1: corpo che sale su un piano inclinato

Un corpo di volume trascurabile e massa m si trova inizialmente alla base di un piano inclinato, caratterizzato da un angolo θ . La velocità iniziale \vec{v}_0 del corpo è diretta lungo il piano inclinato.

Calcolare a quale altezza h , rispetto alla base, il punto si ferma:

- in assenza di attrito
- in presenza di attrito dinamico, caratterizzato dal coefficiente di attrito dinamico μ_d

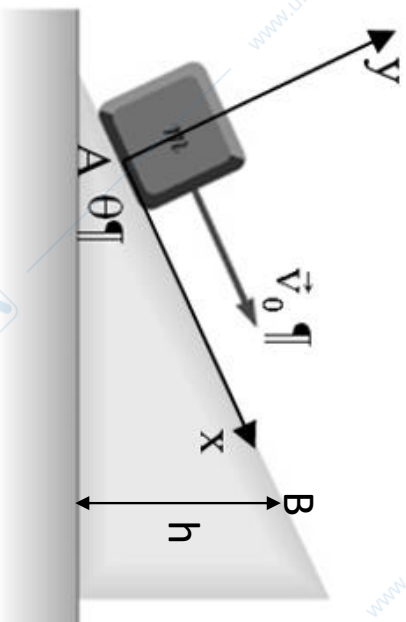


Esempio 1: corpo che sale su un piano inclinato

Un corpo di volume trascurabile e massa m si trova inizialmente alla base di un piano inclinato, caratterizzato da un angolo θ . La velocità iniziale \vec{v}_0 del corpo è diretta lungo il piano inclinato.

Calcolare a quale altezza h , rispetto alla base, il punto si ferma:

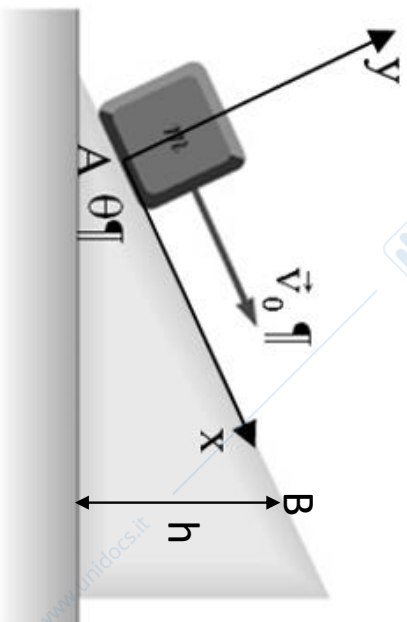
- in assenza di attrito
- in presenza di attrito dinamico, caratterizzato dal coefficiente di attrito dinamico μ_d



Indichiamo con A il punto di partenza del corpo (alla base del piano inclinato), con B il punto sul piano inclinato in cui il corpo si ferma e con h l'altezza di B rispetto ad A.

Prendiamo un sistema di riferimento $O(x, y)$ centrato nel punto A (punto di partenza del corpo alla base del piano inclinato)

a) in assenza di attrito. Metodo: *dinamica* + *cinematica*



Sul corpo agiscono le seguenti forze: la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare \vec{N} , per cui:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

che, proiettando sugli assi x e y , da luogo alle due relazioni scalari:

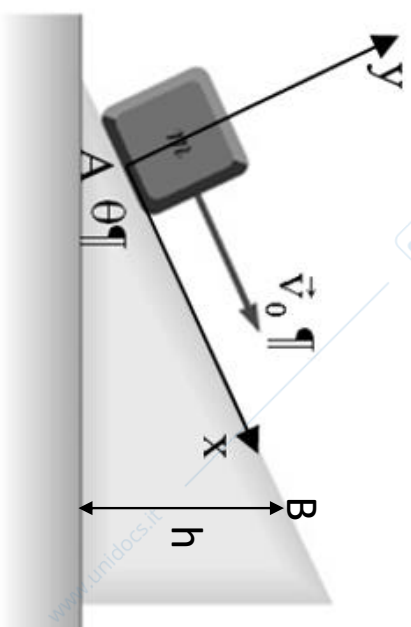
$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = 0 \\ -mg \sin \theta = ma \end{cases}$$

da cui:

$$a = -g \sin \theta < 0$$

il moto del corpo lungo il piano inclinato è quindi un moto rettilineo uniformemente decelerato.

a) in assenza di attrito. Metodo: *dinamica + cinematica*



$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \Rightarrow \int_0^x a dx = \int_0^v v dv \quad \text{con } a = -g \sin \theta$$

$$\Rightarrow -g \sin \theta \cdot x = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} =$$

che applicata per $x=x_B$ e $v=v_B=0 \Rightarrow x_B = \frac{v_0^2}{2g \sin \theta} = \frac{h}{\sin \theta}$

$$\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$$

a) in assenza di attrito. Metodo: *considerazioni energetiche*

Le forze che agiscono sul corpo di massa m , sono la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione vincolare \vec{N} .

La reazione vincolare \vec{N} non genera lavoro perché \vec{N} è perpendicolare allo spostamento lungo

il piano inclinato: $W_N = \int_A^B \vec{N} \cdot d\vec{s} = 0$

e la forza peso $m\vec{g}$ è una forza conservativa \Rightarrow possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_{mecc} = 0$$

a) in assenza di attrito. Metodo: *considerazioni energetiche*

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_{\text{mecc}} = 0$$

Prendendo come riferimento il punto A (base di partenza) e il punto B (punto in cui il corpo si ferma):

$$\Delta E_k + \Delta E_p = (E_{k,B} - E_{k,A}) + (E_{p,B} - E_{p,A}) = 0$$

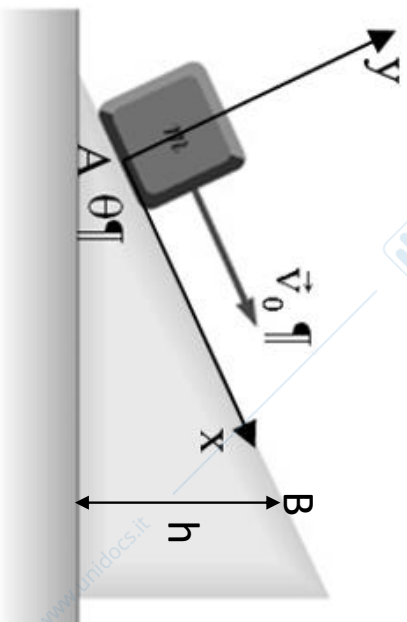
L'energia potenziale è definita a meno di una costante, per cui

$$(E_{p,B} - E_{p,A}) = (mgz_B + \cos \text{tan te}) - (mgz_A + \cos \text{tan te}), \text{ ma essendo la costante uguale nei due casi} \\ \Rightarrow (E_{p,B} - E_{p,A}) = mgz_B - mgz_A = mg(z_B - z_A)$$

Per il calcolo dell'energia potenziale relativa alla forza peso, prendiamo come punto di riferimento su cui calcolare i valori la base del piano inclinato:

$$(E_{k,B} - E_{k,A}) + (E_{p,B} - E_{p,A}) = (0 - \frac{1}{2}mv_0^2) + (mgh - 0) = 0 \\ \Rightarrow h = \frac{1}{2g}v_0^2$$

b) in presenza di attrito dinamico. Metodo: *dinamica* + *cinematica*



Sul corpo agiscono le seguenti forze: la forza peso $m\vec{g}$, la reazione vincolare \vec{N} e la forza di attrito dinamico \vec{f}_{ad} , per cui:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_{ad} = m\vec{a}$$

che, proiettando sugli assi x e y , da luogo alle due relazioni scalari:

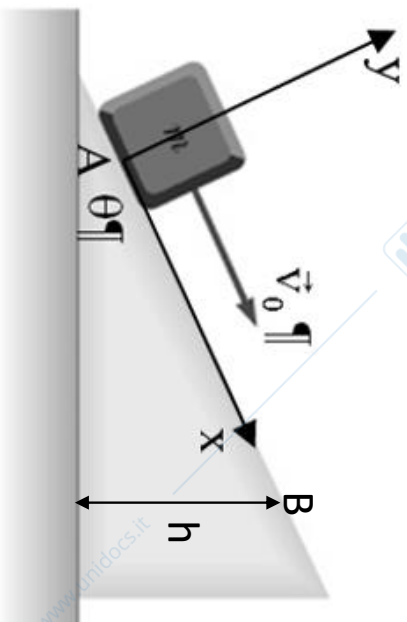
$$\begin{cases} N - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta - \mu_d N = ma \Rightarrow -mg \sin \theta - \mu_d mg \cos \theta = ma \end{cases}$$

da cui:

$$a = -g \sin \theta - \mu_d g \cos \theta < 0$$

il moto del corpo lungo il piano inclinato è quindi un moto rettilineo uniformemente decelerato.

b) in presenza di attrito dinamico. Metodo: *dinamica* + *cinematica*



$$a = -g \sin \theta - \mu_d g \cos \theta < 0$$

Considerando che la velocità noi la conosciamo in funzione di x piuttosto che del tempo t , si ha:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \Rightarrow \int_0^x a dx = \int_{v_0}^v v dv$$

$$\Rightarrow ax = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = (-g \sin \theta - \mu_d g \cos \theta) \cdot x \quad \text{che applicata per } x=x_B \text{ e } v=v_B=0 \Rightarrow$$

$$x_B = \frac{v_0^2}{2g \sin \theta + \mu_d g \cos \theta} = \frac{h}{\sin \theta} \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{1}{1 + \frac{\mu_d}{\tan \theta}} \right)$$

b) in presenza di attrito dinamico. Metodo: *considerazioni energetiche*

Le forze che agiscono sul corpo di massa m , sono la forza peso $m\vec{g}$, la reazione vincolare \vec{N} e la forza di attrito dinamico \vec{f}_{ad} . Poiché la reazione vincolare \vec{N} non genera lavoro, la forza peso $m\vec{g}$ è una forza conservativa e la forza di attrito dinamico \vec{f}_{ad} NON è una forza conservativa \Rightarrow possiamo utilizzare la formula per il calcolo del lavoro delle forze non conservative:

$$W_{\text{nc}} = \Delta E_{\text{mecc}} = \Delta E_{\text{k}} + \Delta E_{\text{p}}$$

da cui, prendendo come riferimento il punto A (base di partenza) e il punto B (punto in cui il corpo si ferma):

$$W_{\text{nc}} = W_{\text{fad}} = \int_A^B -\mu_{\text{d}} N \hat{u}_x \cdot dx \hat{u}_x = \int_A^B -\mu_{\text{d}} mg \cos \theta \cdot dx = -\mu_{\text{d}} mg \cos \theta \cdot (x_{\text{B}} - x_{\text{A}}) = -\mu_{\text{d}} mg \cos \theta \cdot x_{\text{B}}$$

b) in presenza di attrito dinamico. Metodo: *considerazioni energetiche*

Per il calcolo dell'energia potenziale relativa alla forza peso, prendiamo come punto di riferimento su cui calcolare i valori la base del piano inclinato:

$$\Delta E_{\text{mecc}} = \Delta E_k + \Delta E_p = (E_{k,B} - E_{k,A}) + (E_{p,B} - E_{p,A}) = (0 - \frac{1}{2}mv_0^2) + (mgh - 0)$$

$$W_{\text{nc}} = -\mu_d mg \cos \theta \cdot X_B = \Delta E_k + \Delta E_p = -\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

$$-\mu_d g \cos \theta \cdot X_B = -\mu_d g \cos \theta \frac{h}{\sin \theta} = -\frac{1}{2}v_0^2 + gh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} \left(\frac{1}{1 + \frac{\mu_d}{\text{tg} \theta}} \right)$$

Esempio 2: corpo vincolato ad una molla

Un corpo di volume trascurabile e massa m è fissato ad una molla di costante elastica k . L'altro estremo (destra) della molla è vincolato al muro. Il corpo e la molla sono inizialmente in quiete. Ad un certo istante si applica al corpo una forza orizzontale costante in modulo, direzione e verso che spinge il corpo a destra, comprimendo la molla.

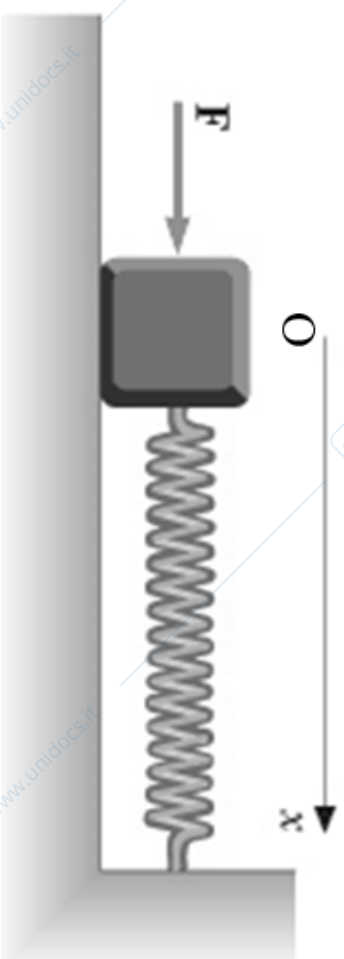
- A) Trascurando l'attrito tra il corpo e il piano di appoggio, determinare la posizione in cui il corpo si ferma.
- B) Se fossimo in presenza di attrito dinamico, caratterizzato dal coefficiente di attrito dinamico μ_d , come cambierebbe il risultato?

Esempio 2: corpo vincolato ad una molla

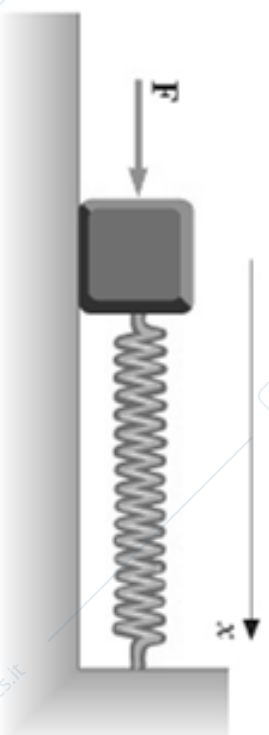
Un corpo di volume trascurabile e massa m è fissato ad una molla di costante elastica k . L'altro estremo (destra) della molla è vincolato al muro. Il corpo e la molla sono inizialmente in quiete. Ad un certo istante si applica al corpo una forza orizzontale costante in modulo, direzione e verso che spinge il corpo a destra, comprimendo la molla.

- A) Trascurando l'attrito tra il corpo e il piano di appoggio, determinare la posizione in cui il corpo si ferma.
- B) Se fossimo in presenza di attrito dinamico, caratterizzato dal coefficiente di attrito dinamico μ_d , come cambierebbe il risultato?

Consideriamo un sistema di riferimento uniassiale x con l'origine O nel punto occupato dal corpo all'istante iniziale e verso rivolto a destra. Indichiamo con A il punto in cui il corpo si ferma.

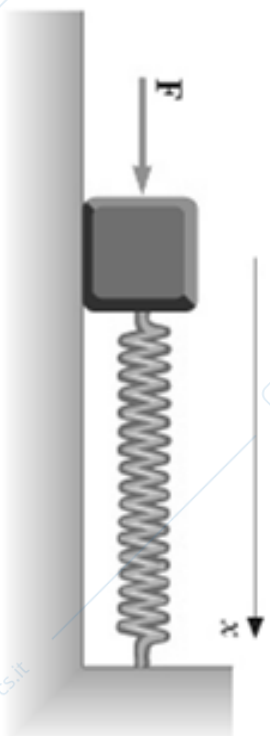


A) in assenza di attrito. Metodo: *dinamica* + *cinematica*



Sul corpo di massa m agiscono quattro forze: la forza costante orizzontale \vec{F} (rivolta a destra), la forza elastica orizzontale \vec{F}_{el} (rivolta a sinistra), la forza peso verticale $m\vec{g}$ (rivolta in basso) e la reazione vincolare verticale \vec{N} (rivolta in alto).

A) in assenza di attrito. Metodo: *dinamica* + *cinematica*



$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$$

proiettando sull'asse x si ottiene: $|F| - kx = ma$

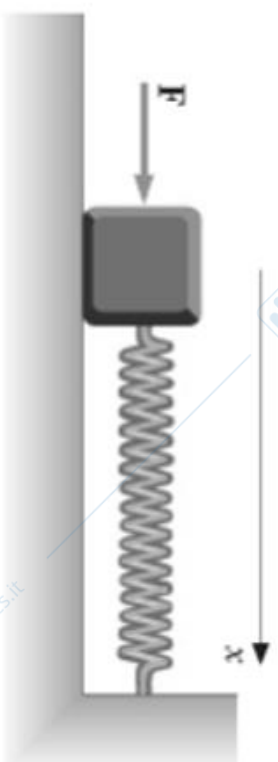
$$\Rightarrow a = \frac{|F| - kx}{m} = \frac{dv(x(t))}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \Rightarrow \left(\frac{|F| - kx}{m} \right) dx = v dv$$

$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{|F| - kx}{m} \right) dx = \int_{v_{iniziale}}^v v dv \Rightarrow \frac{|F|}{m} x - \frac{k}{2m} x^2 = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_{iniziale}^2 = \frac{1}{2} v^2$$

poiché la massa è inizialmente ferma.

$$\text{Quando } x = x_A \Rightarrow v_A = 0 \quad \text{da cui} \quad \frac{|F|}{m} x_A - \frac{k}{2m} x_A^2 = \frac{1}{2} v_A^2 = 0 \Rightarrow x_A = \frac{2|F|}{k}$$

A) in assenza di attrito. Metodo: *considerazioni energetiche*



$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{el} = m\vec{a}$$

Delle due forze che generano lavoro sul corpo di massa m , ossia la forza costante orizzontale \vec{F} e la forza elastica orizzontale \vec{F}_{el} , solamente la seconda è conservativa. Di conseguenza possiamo utilizzare la formula per il calcolo del lavoro delle forze non conservative:

$$W_{nc} = \Delta E_{mecc} = \Delta E_k + \Delta E_p$$

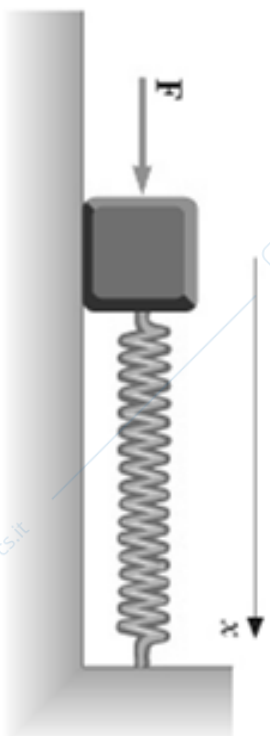
Da cui:

$$W_{nc} = W_F = \int_0^A |\vec{F}| \hat{u}_x \cdot dx \hat{u}_x = |\vec{F}| (x_A - x_0) = |\vec{F}| \cdot x_A$$

$$\Delta E_{mecc} = \Delta E_k + \Delta E_p = \left(\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \right) + \left(\frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_0^2 \right) = 0 + \frac{1}{2} k x_A^2$$

$$|\vec{F}| \cdot x_A = \frac{1}{2} k x_A^2 \Rightarrow x_A = \frac{2|\vec{F}|}{k}$$

B) in presenza di attrito dinamico. Metodo: *dinamica + cinematica*



$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_{ad} = m\vec{a}$$

proiettando sull'asse x si ottiene:

$$|F| - kx - \mu_d mg = ma \quad |F| - kx - \mu_d mg = ma$$

$$\Rightarrow a = \frac{|F| - kx - \mu_d mg}{m} = \frac{dv(x(t))}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} \Rightarrow \left(\frac{|F| - kx - \mu_d mg}{m} \right) dx = v dv$$

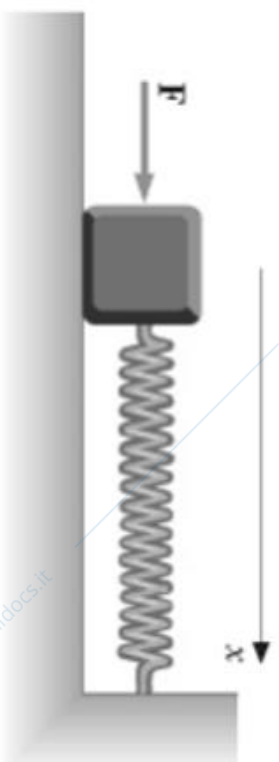
$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{|F| - kx - \mu_d mg}{m} \right) dx = \int_{v_{iniziale}}^v v dv \Rightarrow \frac{|F|}{m} x - \frac{\mu_d mg}{m} x - \frac{k}{2m} x^2 = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_{iniziale}^2 = \frac{1}{2} v^2$$

poiché la massa è inizialmente ferma.

$$\text{Quando } x = X_A \Rightarrow v_A = 0 \quad \text{da cui} \quad \frac{|F|}{m} X_A - \frac{\mu_d mg}{m} X_A - \frac{k}{2m} X_A^2 = \frac{1}{2} v_A^2 = 0 \Rightarrow$$

$$X_A = \frac{2(|F| - \mu_d mg)}{k} \Rightarrow \text{distanza minore che nel caso precedente, come era già intuibile.}$$

B) in presenza di attrito dinamico. Metodo: *considerazioni energetiche*



$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{el} + \vec{F}_{ad} = m\vec{a}$$

$$W_{nc} = \Delta E_{in} = \Delta E_k + \Delta E_{p,elastica} = \left(\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_O^2 \right) + \left(\frac{1}{2} k x_A^2 - 0 \right) = (0 - 0) + \left(\frac{1}{2} k x_A^2 - 0 \right) = \frac{1}{2} k x_A^2$$

$$W_{nc} = |F| x_A - \mu_d m g x_A$$

$$|F| x_A - \mu_d m g x_A = \frac{1}{2} k x_A^2 \Rightarrow x_A = \frac{2(|F| - \mu_d m g)}{k}$$

Esempio 3: corpo frenato dall'attrito

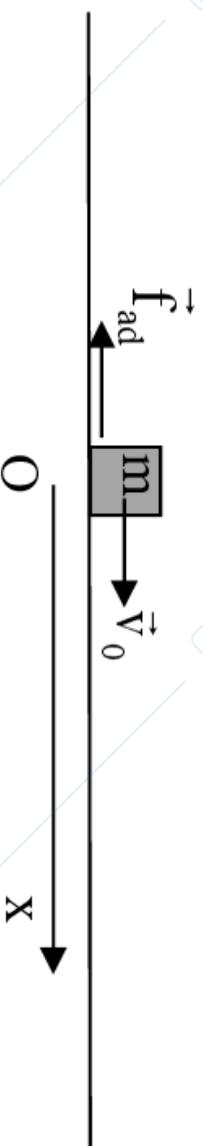
Un corpo di volume trascurabile e massa m si muove lungo un piano orizzontale con velocità iniziale \vec{v}_0 . Tra il corpo e il piano orizzontale si genera una forza di attrito dinamico con coefficiente μ_d . Calcolare:

- 1) dopo quanto tempo e
- 2) dopo quanto spazio il corpo si ferma

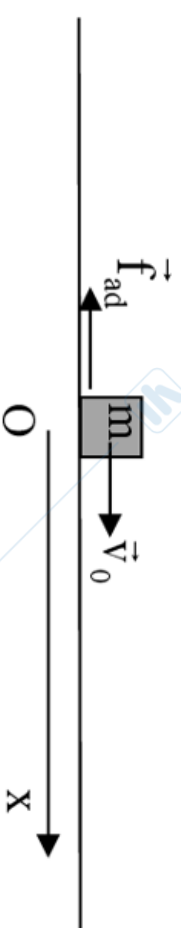
Esempio 3: corpo frenato dall'attrito

Un corpo di volume trascurabile e massa m si muove lungo un piano orizzontale con velocità iniziale \vec{v}_0 . Tra il corpo e il piano orizzontale si genera una forza di attrito dinamico con coefficiente μ_d . Calcolare:

- 1) dopo quanto tempo e
- 2) dopo quanto spazio il corpo si ferma



1) Dinamica + cinematica



Sul corpo di massa m agiscono tre forze: la forza orizzontale di attrito dinamico \vec{f}_{ad} , la forza peso verticale $m\vec{g}$ e la reazione vincolare verticale \vec{N} . Dalla seconda legge di Newton si ha:

$$\sum \vec{F} = \vec{f}_{ad} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

che proiettata sull'asse x e su di un asse verticale y risulta:

$$\begin{cases} mg = N \\ f_{ad} = -\mu_d N = ma \Rightarrow a = -\mu_d g < 0 \end{cases}$$

Essendo l'accelerazione a costante, il moto è rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{a} = a\hat{u}_x$

1) *Dinamica + cinematica*

$$a = -\mu_d g.$$

Tempo di frenata:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad e \quad v = \frac{dx}{dt} \quad \text{con } a = -\mu_d g, \quad v(t=0) = v_0, \quad x(t=0) = x_0 = 0, \quad \text{si ottiene:}$$

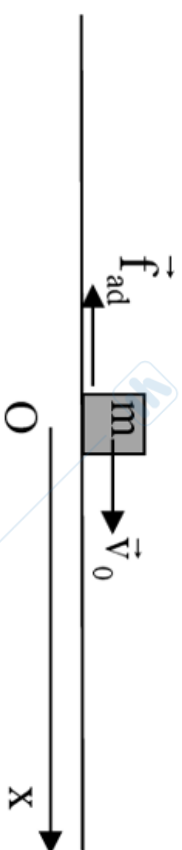
$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at = v_0 - \mu_d g \cdot t \\ x(t) = 0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = v_0 t - \frac{1}{2} \mu_d g \cdot t^2 \end{cases}$$

da cui, imponendo che al tempo $t = t_{\text{frenata}} \Rightarrow v(t_{\text{frenata}}) = 0 \Rightarrow v(t_{\text{frenata}}) = v_0 - \mu_d g \cdot t_{\text{frenata}} = 0 \Rightarrow t_{\text{frenata}} = \frac{v_0}{\mu_d g}$

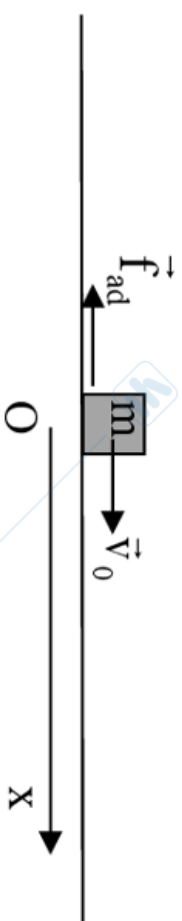
Spazio di frenata:

$$x(t_{\text{frenata}}) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2_{\text{frenata}} = v_0 t_{\text{frenata}} - \frac{1}{2} \mu_d g \cdot t^2_{\text{frenata}} = v_0 \frac{v_0}{\mu_d g} - \frac{1}{2} \mu_d g \cdot \left(\frac{v_0}{\mu_d g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{\mu_d g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu_d g} \Rightarrow$$

$$x(t_{\text{frenata}}) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu_d g}$$



2) Considerazioni energetiche



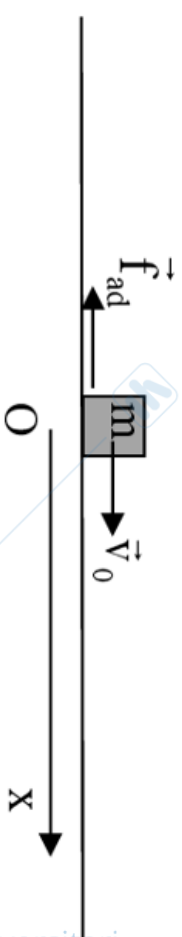
Sul corpo di massa m agiscono tre forze: la forza orizzontale di attrito dinamico \vec{f}_{ad} , la forza peso verticale $m\vec{g}$ e la reazione vincolare verticale \vec{N} .

$$W_{nc} = \Delta E_{mecc} = \Delta E_k + \Delta E_p$$

$$\Rightarrow W_{nc} = W_{F_{ad}} = \int_0^A -\mu_d N \hat{u}_x \cdot dx \hat{u}_x = \int_0^A -\mu_d mg \cdot dx = -\mu_d mg \cdot (x_A - x_0) = -\mu_d mg \cdot x_A = \Delta E_k + \Delta E_p$$

$$\Rightarrow -\mu_d mg \cdot x_A = \Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = -\frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow x_A = \frac{v_0^2}{2\mu_d g}$$

2) Considerazioni energetiche



Per determinare il tempo di frenata, siamo costretti a determinare l'accelerazione (o meglio la decelerazione) subita dal corpo e poi passare alla cinematica.

Sul corpo di massa m agiscono tre forze: la forza orizzontale di attrito dinamico \vec{f}_{ad} , la forza peso verticale $m\vec{g}$ e la reazione vincolare verticale \vec{N} . Dalla seconda legge di Newton si ha:

$$\sum \vec{F} = \vec{f}_{ad} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

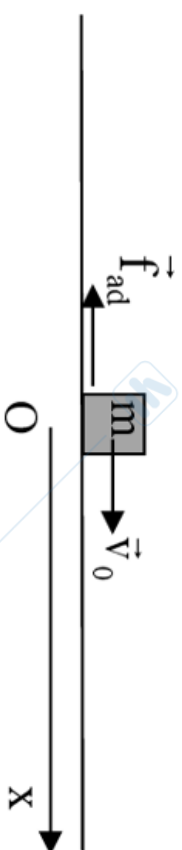
che proiettata sull'asse x e su di un asse verticale y risulta:

$$\begin{cases} mg = N \\ \vec{f}_{ad} = -\mu_d N = ma \Rightarrow a = -\mu_d g < 0 \end{cases}$$

Essendo l'accelerazione a costante, il moto è rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{a} = a\hat{u}_x$

2) Considerazioni energetiche

$$a = -\mu_d g$$



$a = \frac{dv}{dt}$ e $v = \frac{dx}{dt}$ con $a = -\mu_d g = \text{costante}$, $v(t=0) = v_0$, $x(t=0) = x_0 = 0$, si ottiene:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 + at = v_0 - \mu_d g \cdot t \\ x(t) = 0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = v_0 t - \frac{1}{2} \mu_d g \cdot t^2 \end{cases}$$

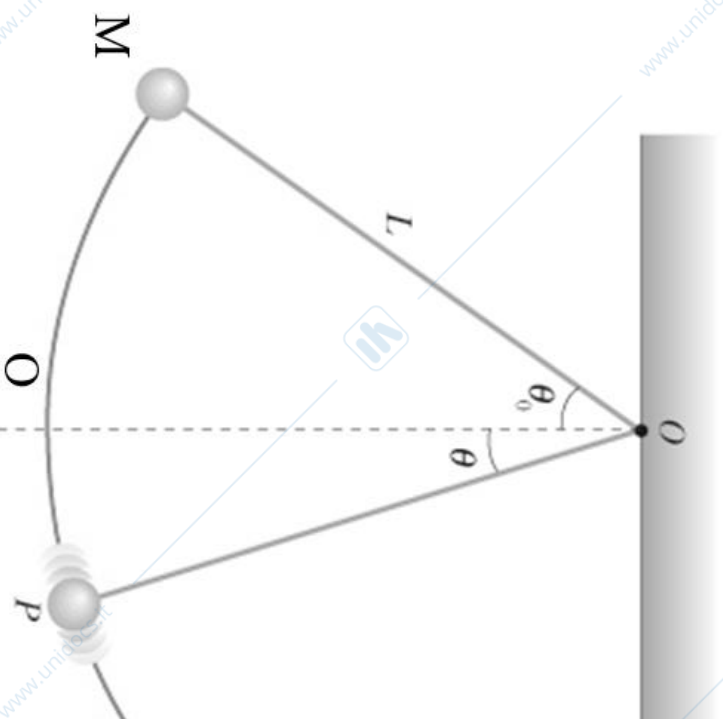
Da cui, imponendo che al tempo $t = t_{\text{frenata}} \Rightarrow v(t_{\text{frenata}}) = 0 \Rightarrow v(t_{\text{frenata}}) = v_0 - \mu_d g \cdot t_{\text{frenata}} = 0$

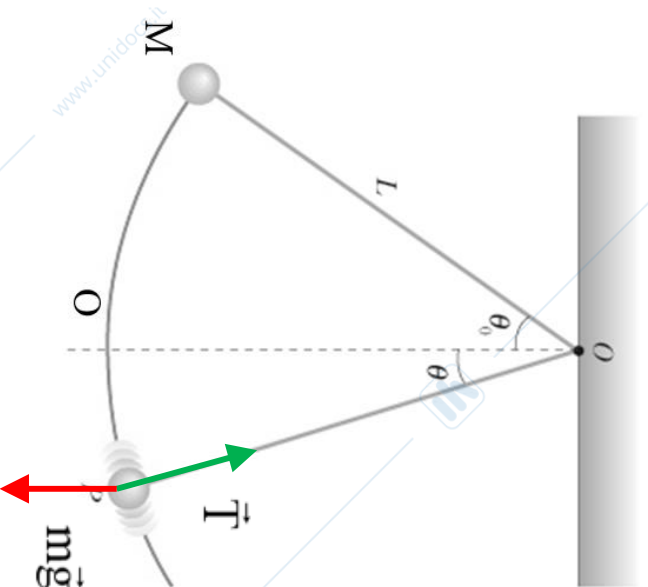
$$\Rightarrow t_{\text{frenata}} = \frac{v_0}{\mu_d g}$$

Esempio 4: pendolo semplice

Un pendolo semplice formato da un filo, inestensibile e di massa trascurabile, di lunghezza L e da una massa puntiforme m viene fatto oscillare a partire dalla posizione iniziale caratterizzata dall'angolo θ_0 . Trascurando la resistenza dell'aria,

- 1) determinare il modulo della velocità della massa e la tensione della fune in funzione dell'angolo di oscillazione del pendolo.
- 2) Trovare inoltre dove la tensione e la velocità raggiungono il valore massimo e calcolare tali valori T_{\max} e V_{\max} .

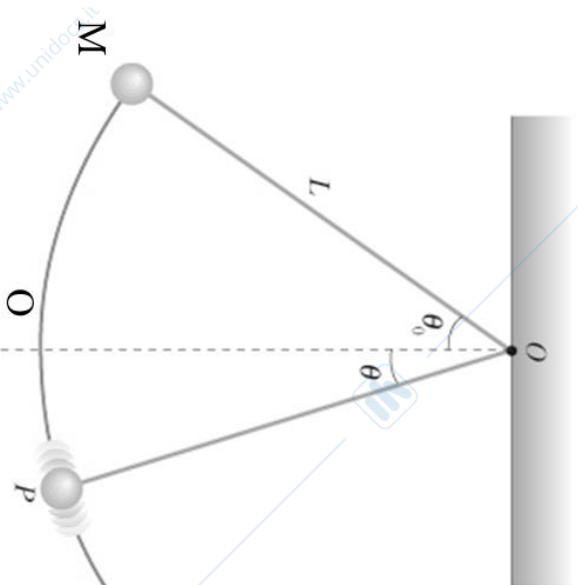




Trascurando l'attrito dell'aria, sulla massa m agisce la forza peso $m\vec{g}$ (verticale) e la tensione del filo \vec{T} (radiale).

Delle due forze solamente la forza peso genera lavoro perché la tensione del filo è sempre perpendicolare allo spostamento (la tensione del filo nel pendolo fa da forza centripeta). Inoltre la forza peso è una forza conservativa, possiamo quindi utilizzare il principio di conservazione dell'energia meccanica

$$\Delta E_{\text{mecc}} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$



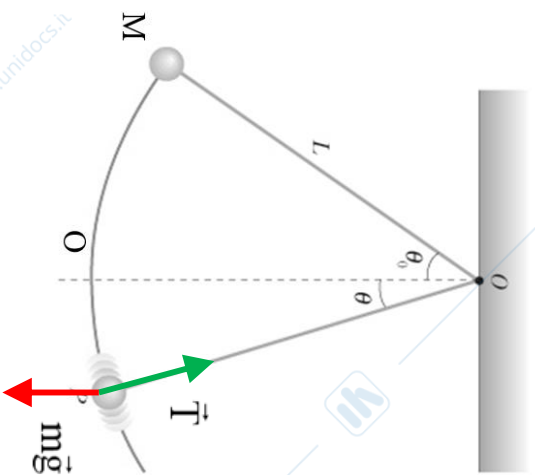
$$\Delta E_{\text{mecc}} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

Per il calcolo dell'energia potenziale relativa alla forza peso, prendiamo come punto di riferimento, su cui calcolare i valori, il punto più basso percorso dalla massa, ossia il punto dove la massa passa per la verticale (indicato con O). Come punti su cui calcolare la variazione di energia meccanica, prendiamo il punto più alto (indicato con M) raggiunto dalla massa (a cui corrisponde l'angolo di oscillazione θ_0 e una velocità $v_M=0$, essendo il punto di inversione del moto) ed un generico punto P (a cui corrisponde l'angolo di oscillazione θ):

$$\Delta E_{\text{mecc}} = \Delta E_k + \Delta E_p = (E_{k,P} - E_{k,M}) + (E_{p,P} - E_{p,M}) = \left(\frac{1}{2}mv_p^2 - 0\right) + (mg(L - L\cos\theta) - mg(L - L\cos\theta_0)) = 0$$

da cui:

$$v_p = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$



Per quanto riguarda la tensione T , usiamo la dinamica di Newton applicata alla massa m

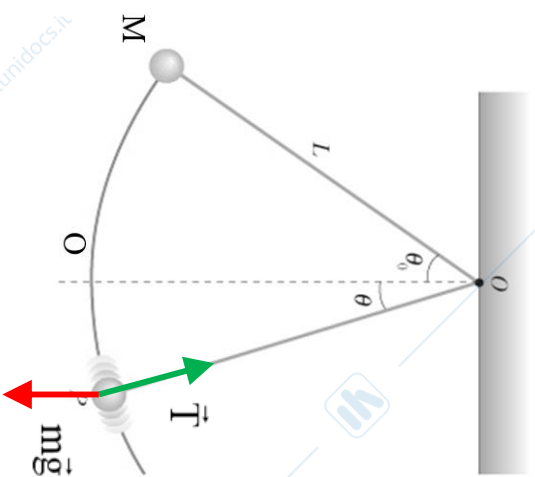
$$\sum \vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

che proiettata lungo l'asse radiale dà luogo a:

$$T - mg \cos \theta = ma_{\text{centrip}} = m \frac{v^2}{L}$$

$$\Rightarrow T = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{L} = mg \cos \theta + m \frac{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}{L} = mg(\cos \theta + 2 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

$$\Rightarrow T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$



$$\Rightarrow T = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

$$v_p = \sqrt{2gL(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

La tensione sarà massima quando $\cos \theta$ raggiunge il valore massimo $\Rightarrow \theta = 0$ ossia quando il pendolo è in posizione verticale, in tale punto la tensione T risulta:

$$T = T_{\max} = mg(3 - 2 \cos \theta_0)$$

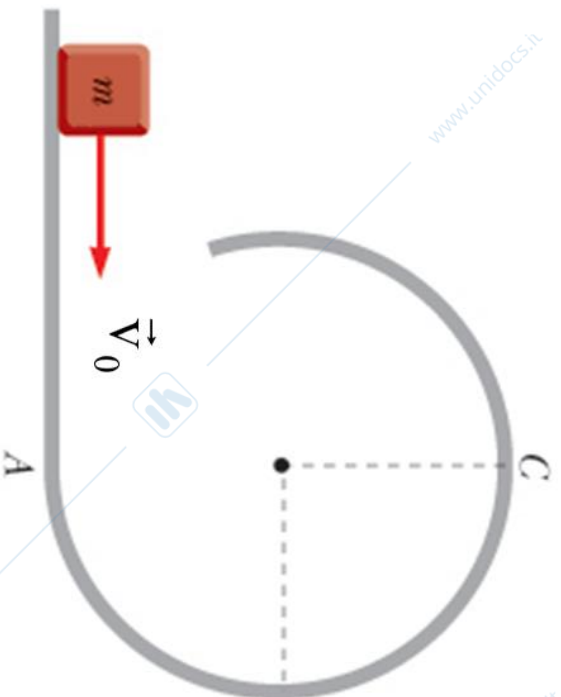
In tale punto anche la velocità risulta massima: $|v|_{\max} = \sqrt{2gL(1 - \cos \theta_0)}$

Esempio 5: un corpo puntiforme sale lungo una guida circolare

Un corpo puntiforme di massa m si muove, in assenza di attrito, lungo un asse orizzontale con velocità \vec{v}_0 . Arrivato nel punto A, esso inizia a salire lungo una guida circolare liscia di raggio R posta in un piano verticale.

Determinare:

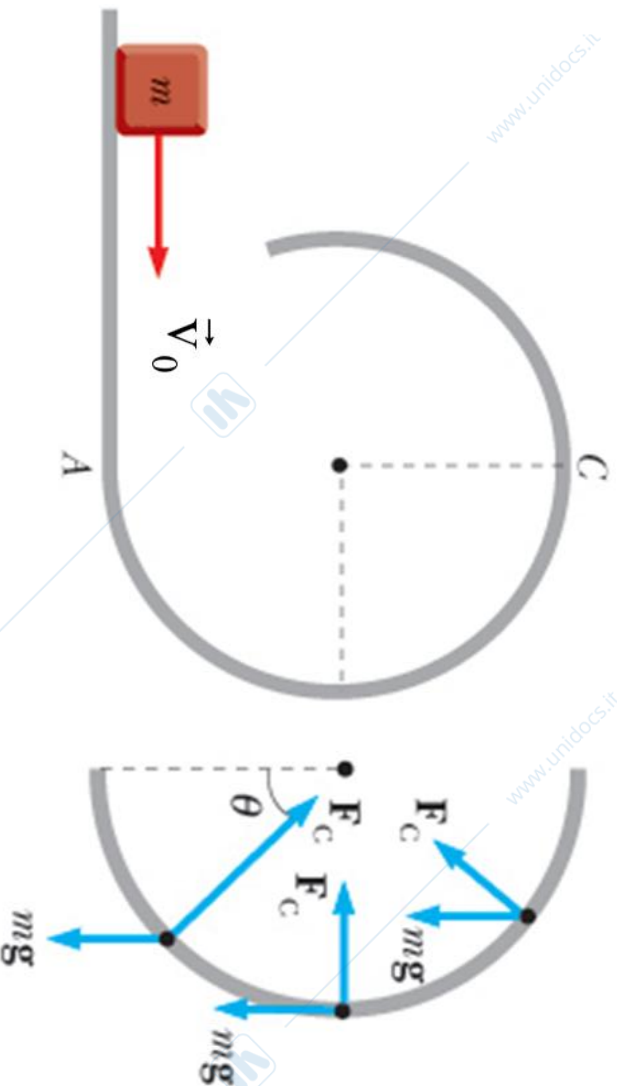
- 1) il modulo della velocità del corpo e la reazione della guida lungo la guida stessa
- 2) il valore minimo del modulo di \vec{v}_0 affinché il corpo arrivi nel punto più alto della guida circolare mantenendo il contatto con essa



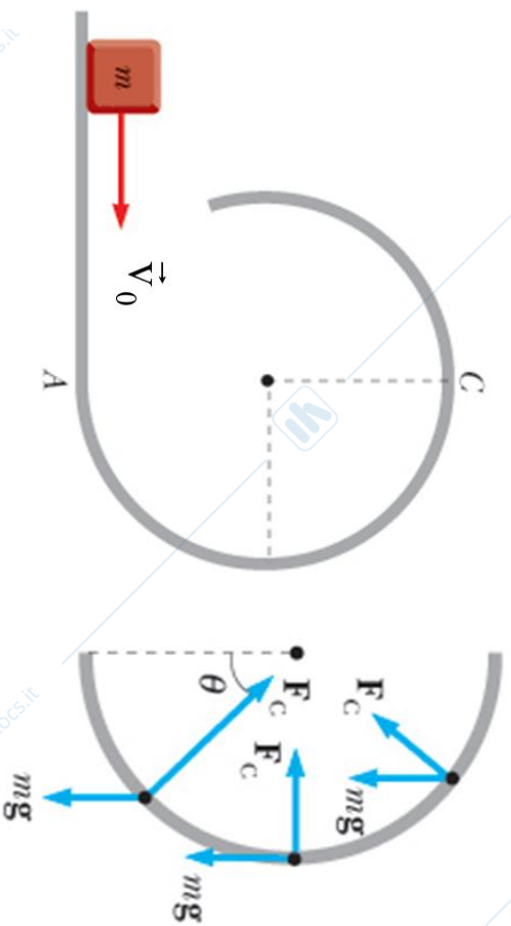
Esempio 5: un corpo puntiforme sale lungo una guida circolare

Un corpo puntiforme di massa m si muove, in assenza di attrito, lungo un asse orizzontale con velocità \vec{v}_0 . Arrivato nel punto A, esso inizia a salire lungo una guida circolare liscia di raggio R posta in un piano verticale. Determinare:

- 1) il modulo della velocità del corpo e la reazione della guida lungo la guida stessa
- 2) il valore minimo del modulo di \vec{v}_0 affinché il corpo arrivi nel punto più alto della guida circolare mantenendo il contatto con essa



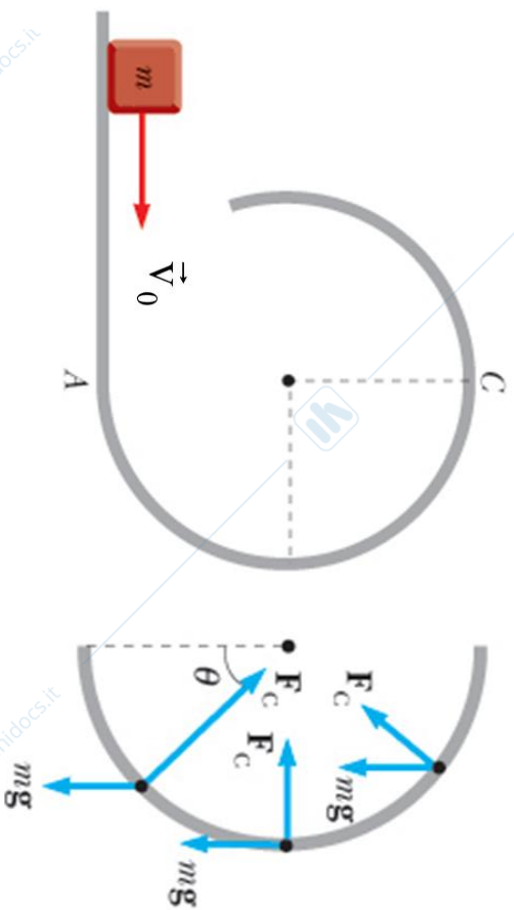
Durante il moto, sul corpo di massa m agiscono la forza peso verticale $m\vec{g}$ e la reazione vincolare \vec{N} sempre perpendicolare alla traiettoria (\Rightarrow reazione normale della guida). La reazione vincolare \vec{N} non genera lavoro in quanto è sempre perpendicolare allo spostamento del corpo. L'unica forza che lavora è $m\vec{g}$ che è una forza conservativa.



Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica $E_m(A)=E_m(h)$, si ottiene

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

dove h è la quota del corpo di massa m rispetto all'asse orizzontale, e quindi rispetto al punto A



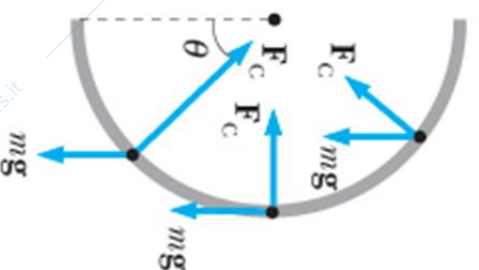
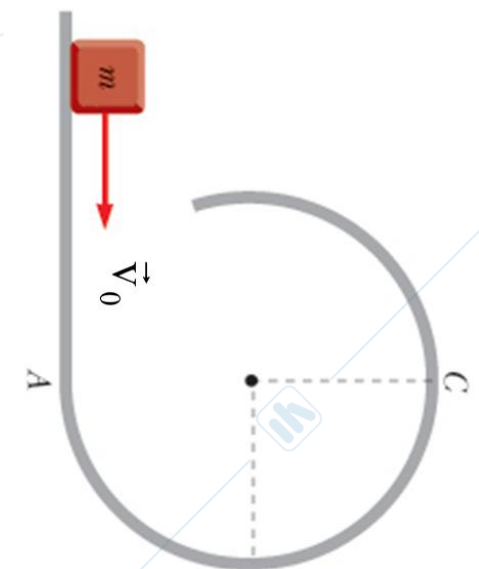
La reazione normale della guida \vec{N} , essendo la guida circolare, risulta sempre rivolta verso il centro della guida stessa. Per ottenere la forza centripeta totale \vec{F}_c agente sul corpo durante il moto lungo la guida, dobbiamo tenere conto anche della componente della forza peso normale alla guida ($m\vec{g}$)_N:

$$\vec{F}_c = \vec{N} + (m\vec{g})_N = m \frac{v^2}{R} \hat{u}_N$$

dove \hat{u}_N è il versore normale alla guida diretto verso il centro della guida stessa

Proiettando lungo la direzione normale alla guida otteniamo:

$$N - mg \cos \vartheta = m \frac{v^2}{R} \implies N = m \frac{v^2}{R} + mg \cos \vartheta = m \frac{(v_0^2 - 2gh)}{R} + mg \cos \vartheta$$



$$N = m \frac{v^2}{R} + mg \cos \vartheta = m \frac{(v_0^2 - 2gh)}{R} + mg \cos \vartheta$$

In particolare, nel punto più alto della guida (punto C di figura), si ha:

$$N = m \frac{(v_0^2 - 2g2R)}{R} - mg = m \frac{v_0^2}{R} - 5mg$$

essendo in questo caso $\theta = \pi$

Il valore minimo del modulo di \vec{v}_0 affinché il corpo arrivi nel punto più alto della guida circolare mantenendo il contatto con essa si ottiene considerando il valore limite della reazione normale della guida \vec{N} nel punto C $\Rightarrow N_C = 0$, ossia

$$m \frac{(v_0^2)_{min}}{R} - 5mg = 0 \Rightarrow (v_0)_{min} = \sqrt{5gR}$$

RELAZIONE TRA ENERGIA POTENZIALE e FORZA

Data una forza conservativa $\vec{F} = F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z$ e uno spostamento $\vec{ds} = dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y + dz \hat{u}_z$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -dE_p$$

dove $E_p = E_p(x, y, z)$ è l'energia potenziale relativa alla forza conservativa \vec{F} ed è una funzione continua e derivabile.

Data una funzione $f(x)$ continua e derivabile

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \rightarrow df = f(x+dx) - f(x) = \frac{df}{dx} dx$$

dove df è la variazione di $f(x)$ per un incremento dx della variabile x

Data una funzione $f(x)$ continua e derivabile

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \rightarrow df = f(x+dx) - f(x) = \frac{df}{dx} dx$$

dove df è la variazione di $f(x)$ per un incremento dx della variabile x

Consideriamo ora una funzione $f(x,y,z)$ continua e derivabile.

La sua variazione df per un incremento dx , dy e dz delle variabili spaziali x , y , e z è:

$$df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

dove $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ sono le derivate parziali di $f(x,y,z)$ rispetto alle variabili spaziali x, y, z

Data una funzione $f(x)$ continua e derivabile

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} \rightarrow df = f(x+dx) - f(x) = \frac{df}{dx} dx$$

dove df è la variazione di $f(x)$ per un incremento dx della variabile x

Consideriamo ora una funzione $f(x,y,z)$ continua e derivabile.

La sua variazione df per un incremento dx , dy e dz delle variabili spaziali x , y , e z è:

$$df = f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

dove $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ sono le derivate parziali di $f(x,y,z)$ rispetto alle variabili spaziali x, y, z

Poiché $E_p(x,y,z)$ è una funzione continua e derivabile:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

dove $\frac{\partial E_p}{\partial x}$, $\frac{\partial E_p}{\partial y}$, $\frac{\partial E_p}{\partial z}$ sono le derivate parziali di $E_p(x,y,z)$ rispetto alle variabili spaziali x, y, z

Data una forza conservativa $\vec{F} = F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z$ e uno spostamento $\vec{ds} = dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y + dz \hat{u}_z$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -dE_p$$

dove $E_p = E_p(x, y, z)$ è l'energia potenziale relativa alla forza conservativa \vec{F} ed è una funzione continua e derivabile.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -dE_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz\right)$$

Data una forza conservativa $\vec{F} = F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z$ e uno spostamento $\vec{ds} = dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y + dz \hat{u}_z$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -dE_p$$

dove $E_p = E_p(x, y, z)$ è l'energia potenziale relativa alla forza conservativa \vec{F} ed è una funzione continua e derivabile.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -dE_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Data una forza conservativa $\vec{F} = F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z$ e uno spostamento $\vec{ds} = dx \hat{u}_x + dy \hat{u}_y + dz \hat{u}_z$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -dE_p$$

dove $E_p = E_p(x, y, z)$ è l'energia potenziale relativa alla forza conservativa \vec{F} ed è una funzione continua e derivabile.

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -dE_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz\right)$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{u}_x + F_y \hat{u}_y + F_z \hat{u}_z = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot \hat{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot \hat{u}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot \hat{u}_z = -\mathbf{grad}(E_p) = -\nabla E_p$$

La forza conservativa è opposta al gradiente dell'energia potenziale ed è perciò diretta secondo il verso di massima diminuzione di E_p .

Esempi

1) L'energia potenziale associata alla forza peso è $E_p = mgz + \text{costante}$, se l'asse z è orientato verso l'alto.

$$\vec{P} = -\frac{dE_p}{dz} \hat{u}_z = -mg \hat{u}_z$$

con verso opposto a quello della crescita dell'energia potenziale.

Esempi

1) L'energia potenziale associata alla forza peso è $E_p = mgz + \text{costante}$, se l'asse z è orientato verso l'alto.

$$\vec{P} = -\frac{dE_p}{dz} \hat{u}_z = -mg \hat{u}_z$$

con verso opposto a quello della crescita dell'energia potenziale.

2) Nel caso della forza elastica, $E_p = (1/2)kx^2 + \text{costante}$ e la forza elastica vale:

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx} \hat{u}_x = -kx \hat{u}_x$$

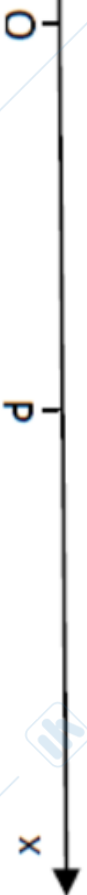
con verso opposto a quello della crescita dell'energia potenziale.

N.B. Entrambi gli esempi sono unidimensionali e non è quindi necessario utilizzare il simbolo di derivata parziale.

Per facilità, restiamo nell'ambito unidimensionale e consideriamo una forza $\vec{F} \equiv F_x \hat{u}_x$ conservativa a cui è associata una energia potenziale E_P funzione della variabile spaziale x , $E_P(x)$, tale che $\vec{F} = -\frac{dE_P}{dx} \hat{u}_x$.



Se la componente della forza \vec{F} nella direzione dell'asse x , $F_x = -\frac{dE_P}{dx}$, è positiva il punto P tende a spostarsi verso destra (valori di x crescenti), se è negativa accade il contrario



Essendo la forza \vec{F} conservativa allora l'energia meccanica (somma dell'energia cinetica e di quella potenziale) associata al sistema risulta costante:

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p = \text{costante} \quad [7]$$

Da cui $v^2 = \frac{2}{m}(E_m - E_p)$ e quindi:

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E_m - E_p)} \quad [8]$$

Ossia, dato un valore dell'energia meccanica E_m , il moto è limitato a quei valori di x nello spazio unidimensionale per cui $E_m \geq E_p$ (per non avere energie cinetiche negative o valori immaginari della velocità).

Esempio:

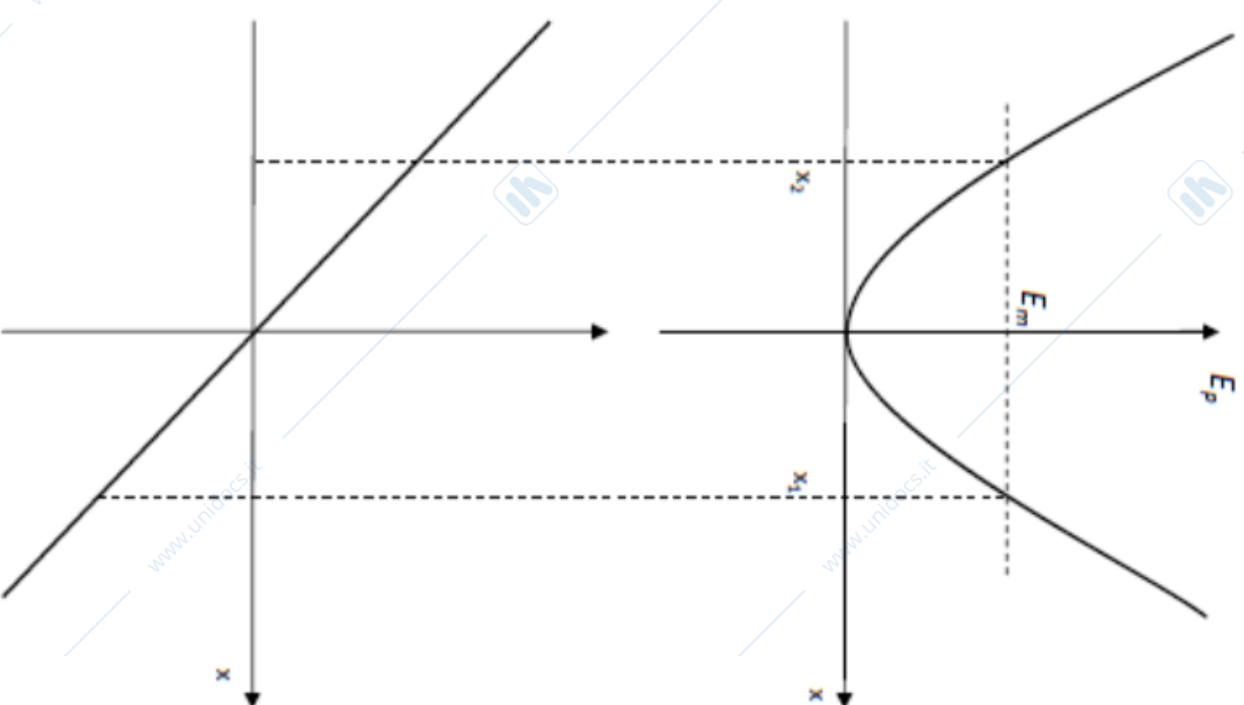
forza elastica $\vec{F}_{el} = -kx\hat{i}_x$

L'energia potenziale ha un minimo per $x=0$ (punto di equilibrio) a cui corrisponde un valore nullo della forza.

Se posizioniamo la particella in $x=0$ allora essa rimane ferma, se essa si trova a sinistra o a destra di $x=0$ la particella risente di una forza di richiamo verso $x=0$ (moto: oscillazioni attorno a $x=0$). Si tratta di un equilibrio stabile.

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$F_x = -kx = -\frac{dE_p}{dx}$$



Esempio:

forza elastica $\vec{F}_{el} = -kx\hat{i}_x$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

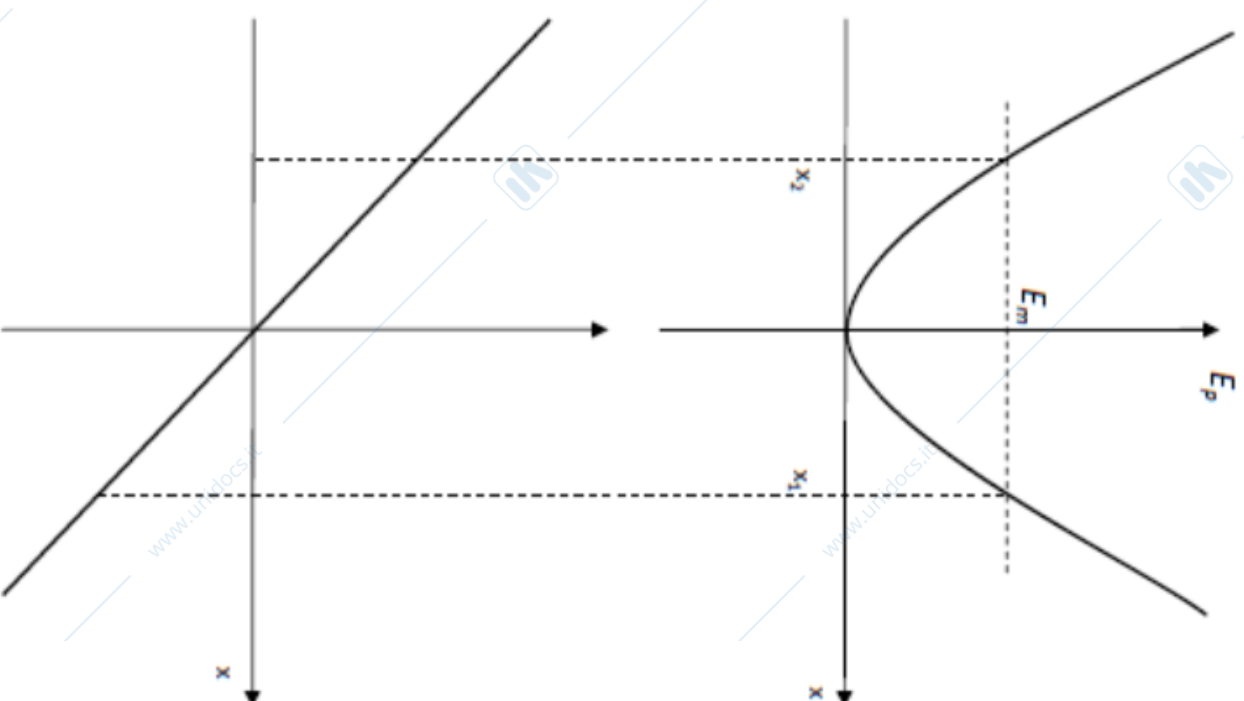
Dato un valore dell'energia meccanica $E_m = E_k + E_p = \text{costante}$

$$\Leftrightarrow E_k(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$$

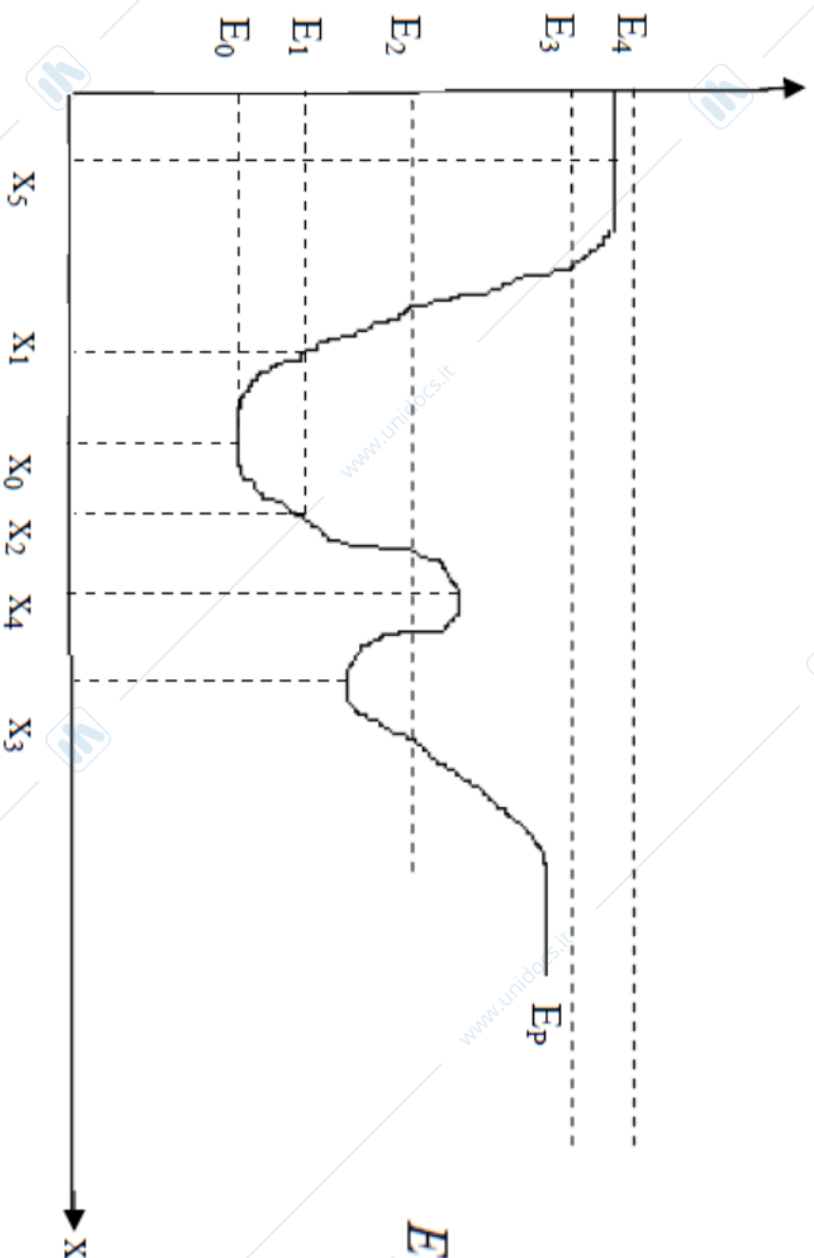
\Rightarrow la particella si può muovere solo tra x_1 e x_2 .

In particolare, si ha $E_k(x_1) = E_k(x_2) = 0$ ossia $v(x_1) = v(x_2) = 0$, si ha un massimo per $E_k(0)$ dove la velocità presenta un valore massimo. In $x = x_1$ e $x = x_2$ la particella si ferma e non può che invertire il senso del moto.

$$F_x = -kx = -\frac{dE_p}{dx}$$



Nel caso generale l'energia potenziale può presentare massimi, minimi e valori costanti:

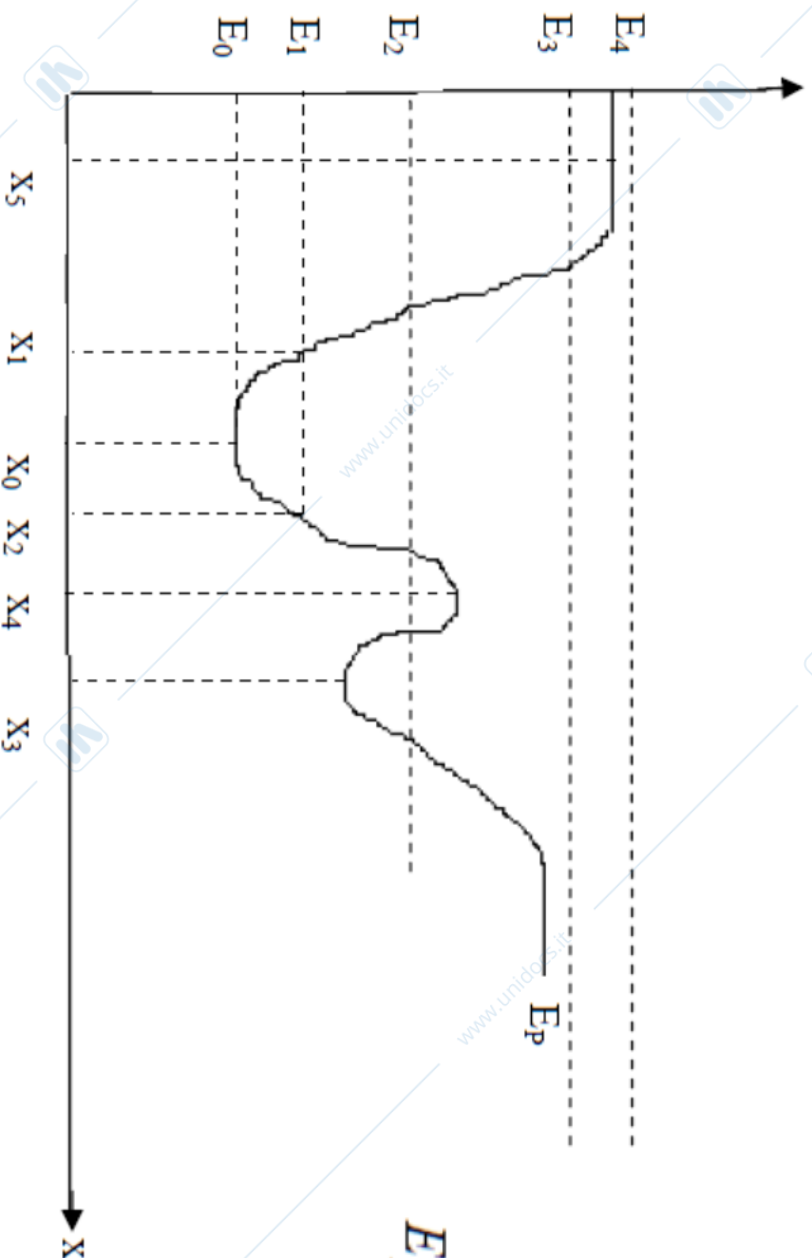


$$E_K(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$$

$$F_x=0 \Leftrightarrow 1) E_p(x) = \text{costante} \quad (\text{per esempio } x=X_5)$$

$$2) -\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad \begin{cases} E_p \text{ ha un minimo (per esempio } x = X_0) \\ E_p \text{ ha un massimo (per esempio } x = X_4) \end{cases}$$

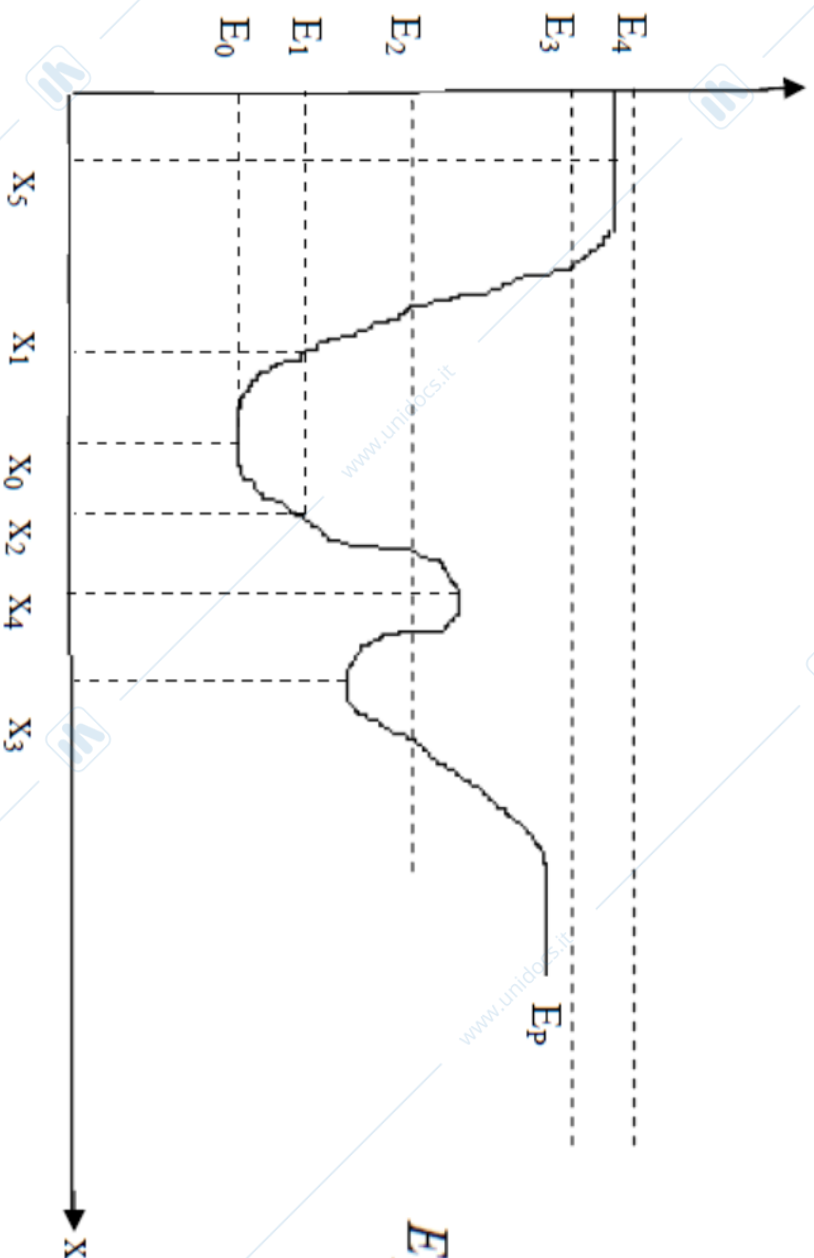
Nel caso generale l'energia potenziale può presentare massimi, minimi e valori costanti:



$$E_K(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$$

- 1) $E_m = E_0 = E_p(x_0)$: si tratta della minima energia E_m che può possedere il sistema $\Leftrightarrow E_K(x_0) = 0$ la particella è a riposo: $v(x_0) = 0$.

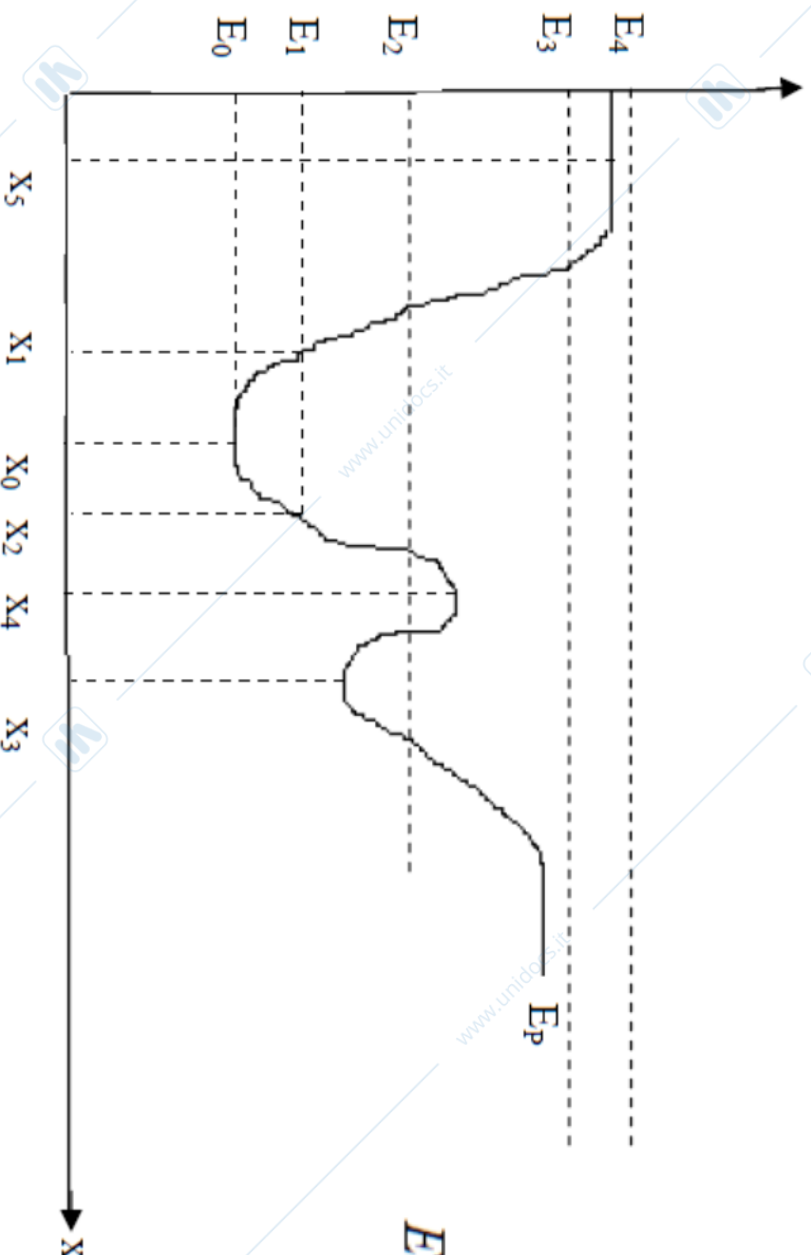
Nel caso generale l'energia potenziale può presentare massimi, minimi e valori costanti:



$$E_K(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$$

- 2) $E_m = E_I$: poiché $E_K(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$ la particella si può muovere solo tra x_1 e x_2 . In particolare, $E_K(x_1) = E_K(x_2) = 0$ ha un massimo per $E_K(x_0)$ ossia $v(x_1) = v(x_2) = 0$ e la velocità ha un massimo per $x = x_0$. In $x = x_1$ e $x = x_2$ la particella si ferma e non può che invertire il senso del moto.

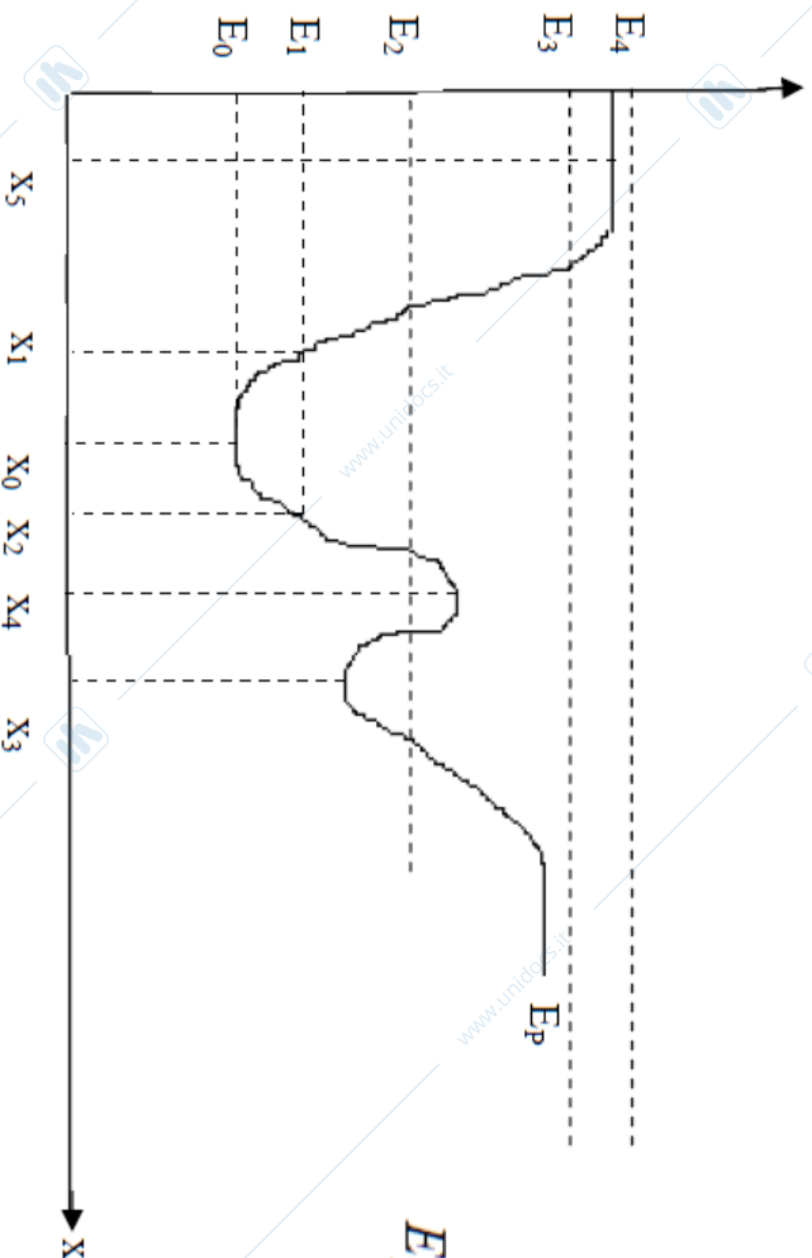
Nel caso generale l'energia potenziale può presentare massimi, minimi e valori costanti:



$$E_K(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$$

- 3) $E_m = E_2$: ci sono 4 punti in cui $E_K(x) = 0$ (ossia 4 punti di inversione del moto) e due intervalli in x in cui $E_K(x) > 0$ (nell'intorno di $x = x_0$ e $x = x_3$). La particella non può passare da un intervallo all'altro poiché essi non hanno alcun punto in comune.

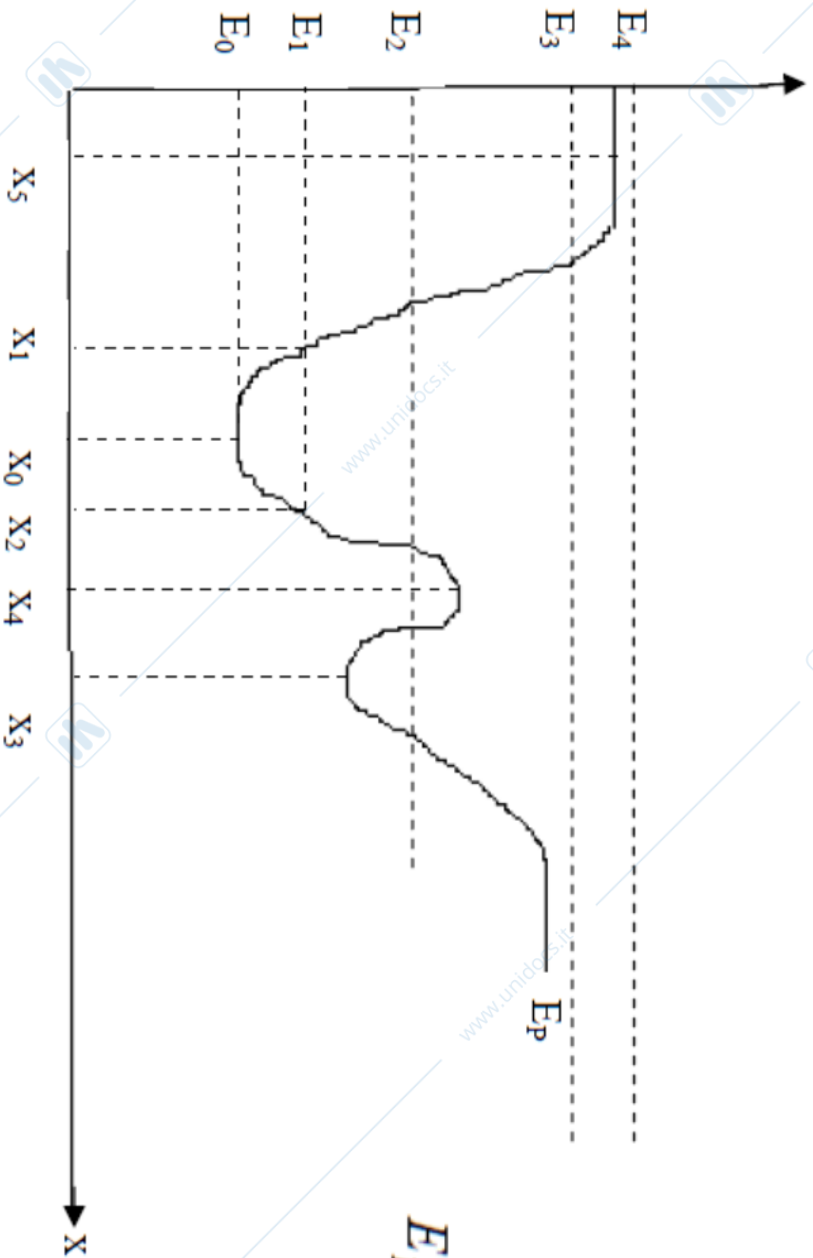
Nel caso generale l'energia potenziale può presentare massimi, minimi e valori costanti:



$$E_K(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$$

- 4) $E_m = E_3$: c'è un solo punto di inversione e la particella si può muovere solo a destra di tale punto (dal grafico non risulta alcun punto di inversione a destra).

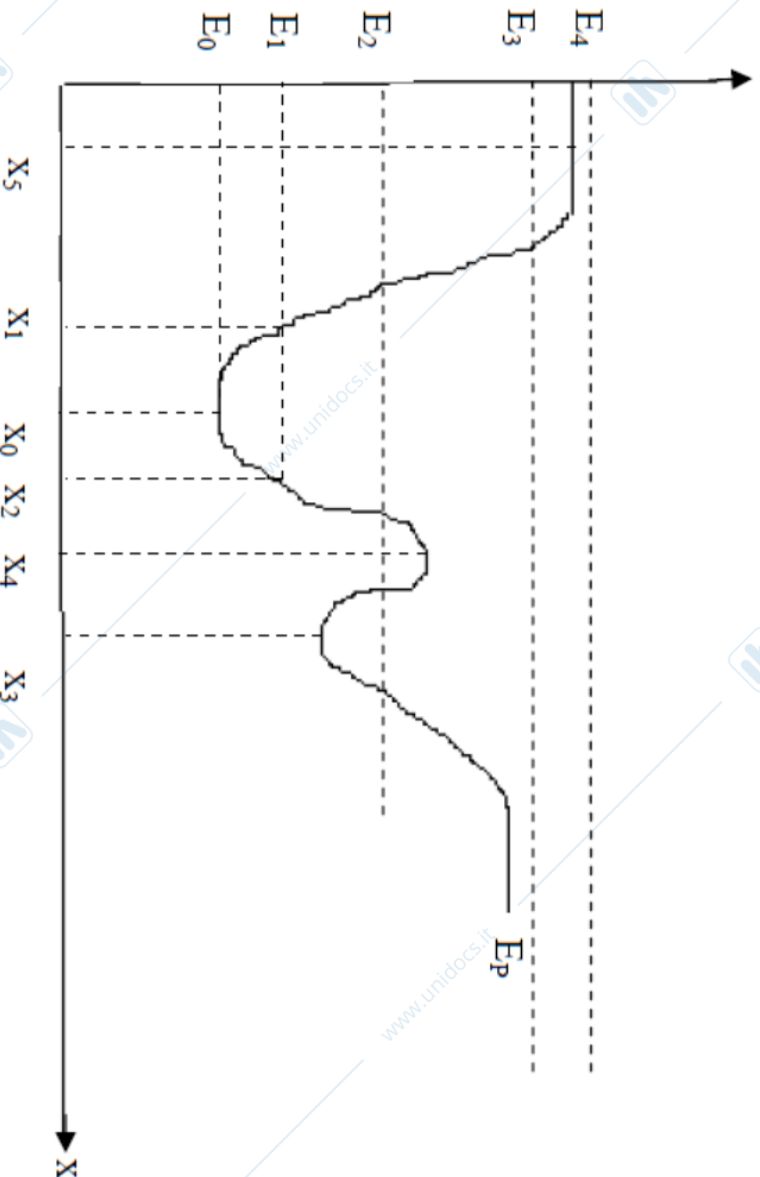
Nel caso generale l'energia potenziale può presentare massimi, minimi e valori costanti:



$$E_K(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$$

5) $E_m = E_i$: non ci sono punti di inversione, ossia la particella può muoversi sull'intero asse x .

Nel caso generale l'energia potenziale può presentare massimi, minimi e valori costanti:

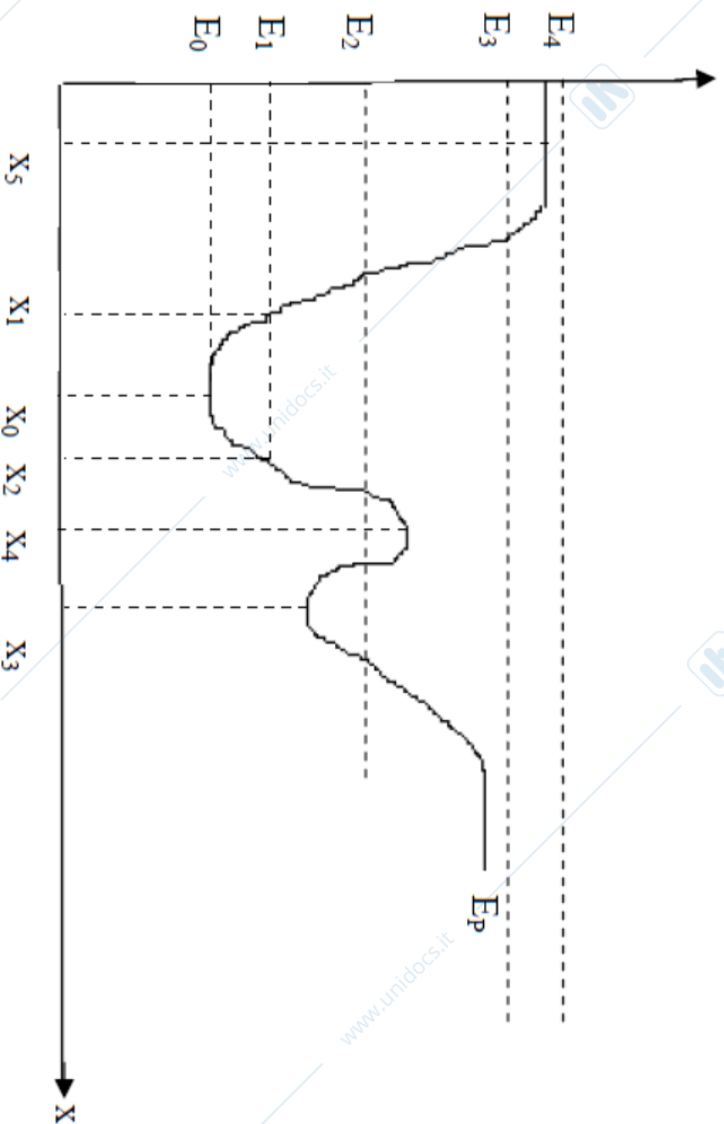


$$E_K(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$$

- 6) *Minimi di $E_p(x)$: $F_x=0$ (ossia $-\frac{dE_p}{dx}=0$)* \Leftrightarrow se la particella si trova in $x=x_{min}$ allora essa rimane

ferma, se essa si trova a sinistra o a destra di $x=x_{min}$ la particella risente di una forza di richiamo verso $x=x_{min}$ (moto: oscillazioni attorno a $x=x_{min}$): infatti a sinistra del minimo la F_x è positiva (concorde con il verso dell'asse x) e a destra F_x è negativa (verso opposto a quello dell'asse x). Si tratta di un equilibrio stabile

Nel caso generale l'energia potenziale può presentare massimi, minimi e valori costanti:

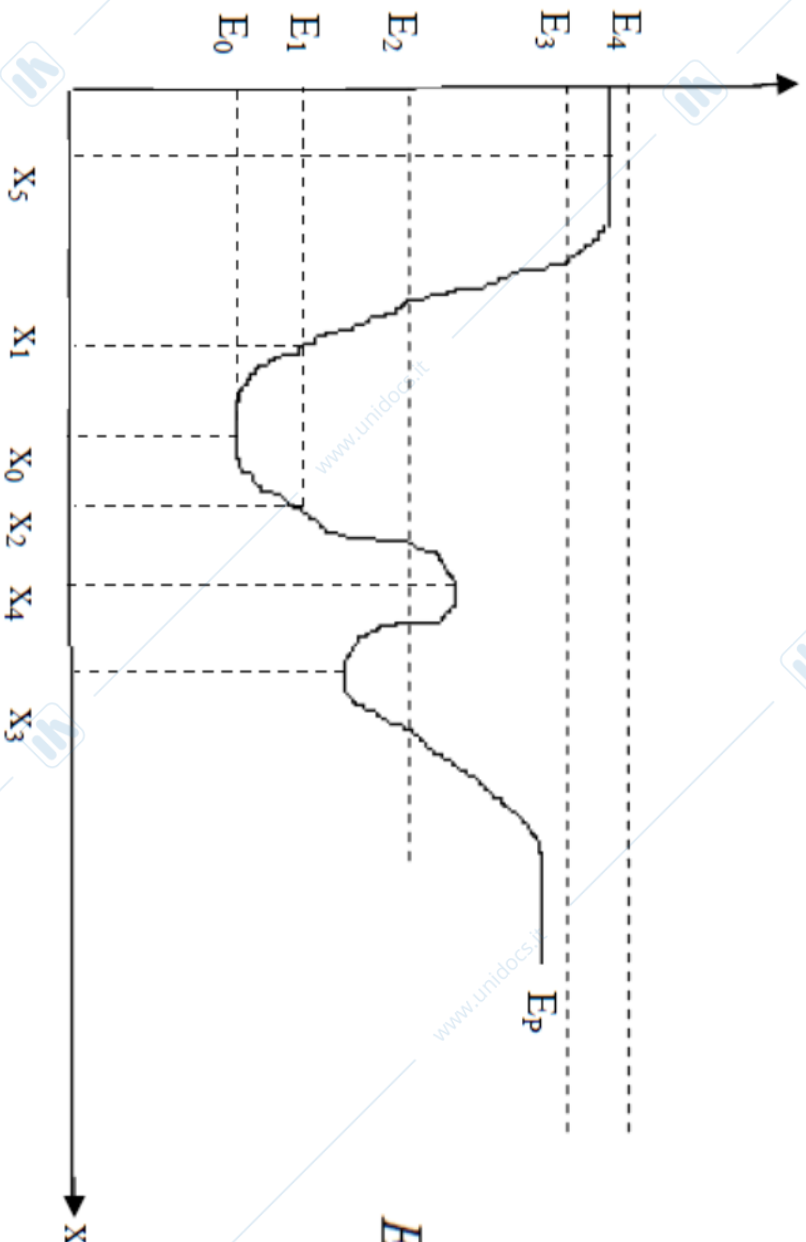


$$E_K(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$$

- 7) *Massimi di $E_p(x)$: $F_x = 0$ (ossia $-\frac{dE_p}{dx} = 0$)* \Rightarrow se la particella si trova in a riposo a $x = x_{max}$ allora essa

rimane ferma, se essa si trova a sinistra di $x = x_{max}$ la particella risente di forza F_x negativa (ossia in verso opposto a quello dell'asse x) e quindi la particella si allontana dalla posizione di massimo; se essa si trova a destra di $x = x_{max}$ la particella risente di forza F_x positiva (ossia nello stesso verso di quello dell'asse x) e quindi la particella si allontana dalla posizione di massimo. Si tratta di un equilibrio instabile.

Nel caso generale l'energia potenziale può presentare massimi, minimi e valori costanti:



$$E_K(x) = E_m - E_p(x) \geq 0$$

- 8) Quando $E_p(x) = \text{costante}$ (per esempio $x=x_5$) $\Leftrightarrow F_x=0 \Leftrightarrow$ equilibrio indifferente: la particella non subisce forze né di richiamo né di ulteriore allontanamento.

Per avere un moto rettilineo uniforme, che andamento deve avere $E_p(x)$?

Per avere un moto rettilineo uniforme, che andamento deve avere $E_p(x)$?

Per avere un moto rettilineo uniformemente accelerato, che andamento deve avere $E_p(x)$?