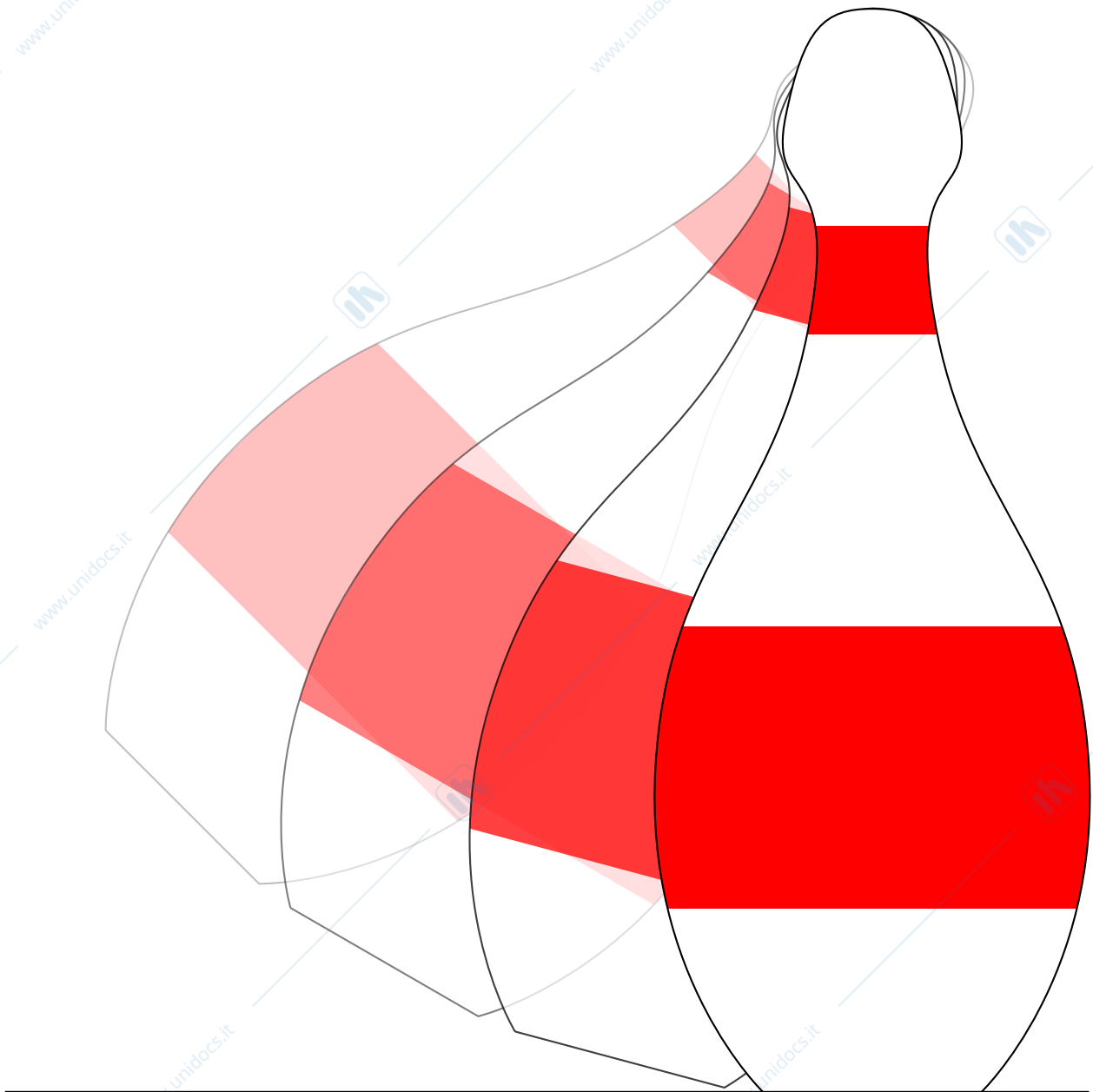


# Cinematica e dinamica del corpo rigido

Andrea Crespi





# 1 Introduzione

## Corpo rigido

Si definisce **sistema rigido** o **corpo rigido** un sistema di punti materiali in cui le distanze fra tutte le possibili coppie di punti che lo costituiscono si mantengono inalterate, indipendentemente dall'applicazione di forze o momenti.

Questo tipo di modello può essere particolarmente appropriato per la descrizione dei corpi solidi estesi, in prima approssimazione indeformabili. In realtà, i materiali reali sono sempre in qualche misura elastici: se un corpo è sottoposto a forze esterne, esso sarà sempre soggetto a una seppur minima deformazione. Inoltre, se le forze sono troppo intense, il corpo può deformarsi in modo permanente (deformazione plastica) o rompersi. Il modello del corpo rigido è dunque appropriato per la descrizione della cinematica e della dinamica di corpi solidi estesi quando le forze applicate non sono troppo intense, in modo da rendere le deformazioni indotte trascurabili.

Nella Cinematica e nella Dinamica del corpo rigido continuano a valere tutte le leggi generali enunciate nell'ambito della Dinamica dei Sistemi (le principali sono riassunte in Tabella 1). Le specificità del corpo rigido tuttavia permettono di derivare diverse relazioni particolari, valide per solo questo tipo di sistemi. Le dimostrazioni saranno riferite a volte a sistemi rigidi *discreti* composti da un numero finito di punti materiali, ciascuno con massa  $m_i$ , a volte a sistemi rigidi *continui* composti da infiniti elementi di massa  $dm$ . I risultati presentati sono comunque validi in entrambi i casi: per passare da una forma all'altra è sufficiente sostituire adeguatamente le sommatorie sugli  $m_i$  con integrali su  $dm$  o viceversa.

Un'importante avvertenza nell'affrontare i problemi che coinvolgono sistemi rigidi, e che li differenzia dai problemi di dinamica del singolo punto materiale, è la seguente. Come più in generale vale nella Dinamica dei Sistemi, nello studio dinamico e statico del corpo rigido è importante non solo stabilire quali forze sono coinvolte, ma anche individuare correttamente il loro *punto di applicazione*. Il punto di applicazione della forza determina infatti il momento meccanico che essa produce rispetto a un certo polo, ed è quindi fondamentale per scrivere la II Equazione Cardinale. Per alcuni tipi di forze il punto di applicazione è dato nello specifico problema: ad esempio, se una cassa è tirata tramite una fune, la forza di tensione si applicherà alla cassa esattamente nel punto in cui è collegata la fune. Per altri tipi di forze il punto di applicazione è intrinseco nella loro natura: ad esempio, la forza peso si applica al baricentro del corpo. Per altri tipi di forze il punto di applicazione può non essere scontato: un esempio significativo è il caso della reazione vincolare, normale o tangenziale, del piano su cui un corpo rigido è appoggiato (a questo tipo di forze sarà dedicata una discussione specifica nella Sezione 7).

Teoremi del centro di massa	$\vec{p} = M\vec{v}_{CM}$ $\vec{F}^{(e)} = M\vec{a}_{CM}$
Teoremi di König	$\vec{L}_O = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + \vec{L}'_{CM}$ $E_C = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + E'_{CM}$
Equazioni cardinali	$\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{\tau}_O^{(e)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$

Tabella 1: Tabella riassuntiva di alcune importanti relazioni ricavate per la Dinamica dei Sistemi di punti materiali.

## 2 Cinematica dei punti del sistema

Il vantaggio della schematizzazione di un corpo come *rigido*, nella descrizione del moto, è intrinseco nella proprietà enunciata nella definizione. Se le distanze tra i punti del corpo rimangono fissate, le loro posizioni rispetto a un sistema di riferimento solidale con il corpo rimangono inalterate. Il moto di ciascun punto materiale che compone il corpo rigido è dunque noto, se è nota l'evoluzione del sistema di riferimento solidale con esso (che possiamo denominare  $S'$ , con origine  $O'$ ) rispetto al sistema di riferimento inerziale esterno ( $S$ , con origine  $O$ ). Il numero di **gradi di libertà** del corpo rigido è perciò pari a 6: le 3 coordinate spaziali dell'origine e i 3 angoli che definiscono l'orientazione nello spazio del sistema  $S'$ .

Per la descrizione del moto dei singoli punti possiamo adattare le equazioni ricavate nell'ambito della Cinematica Relativa. Le **velocità** sono descritte dalla relazione:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t = \vec{v}_t \quad (2-1)$$

dove  $\vec{v}'$  è la velocità dei punti relativa al sistema  $S'$  e  $\vec{v}_t$  è la velocità di trascinamento. Poiché in un sistema rigido  $\vec{v}'$  è nulla per definizione (i punti mantengono identicamente le loro posizioni rispetto a  $S'$ ), la velocità di ciascun punto diventa identica alla velocità di trascinamento. In generale, possiamo allora scrivere:

$$\vec{v} = \vec{v}_t = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_r \quad (2-2)$$

dove  $\vec{v}_{O'}$  è la velocità di traslazione dell'origine di  $S'$ , e  $\vec{\omega} \times \vec{r}_r$  tiene conto di una eventuale rotazione di  $S'$  rispetto a  $S$  a velocità angolare  $\vec{\omega}$  (essendo  $\vec{r}_r = \vec{r} - \vec{r}_{O'}$  il vettore posizione del punto scelto rispetto a  $O'$ ).

Dati due punti P e Q arbitrari appartenenti al corpo rigido, è possibile scrivere una semplice relazione tra le loro velocità (nel sistema di riferimento  $S$ ). Scrivendo per ciascuno la (2-2) e poi sottraendo membro a membro, otteniamo:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \quad (2-3)$$

Tramite la (2-3) possiamo anche legare la velocità di un punto arbitrario del corpo rigido rispetto alla velocità del centro di massa (CM) del corpo rigido, prendendo quest'ultimo come punto P:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM}) \quad (2-4)$$

Abbiamo qui tralasciato il pedice Q ad indicare l'arbitrarietà del punto scelto.

Nella descrizione del moto di un corpo rigido si usa distinguere tre casi:

**moto traslatorio** moto di pura traslazione, vedi Figura 1a. Si ha  $\omega = 0$  quindi tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità e seguono traiettorie sovrapponibili.

**moto rotatorio puro** moto di pura rotazione attorno a un asse che può essere interno o esterno al corpo rigido, vedi Figura 1b. Fissando l'origine di  $S$  e  $S'$  in modo che siano coincidenti e posti sull'asse di rotazione, si ha  $\vec{v}_{O'} = 0$  e  $\vec{r}_r = \vec{r}$ . Possiamo scrivere la velocità di ogni punto del corpo come:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2-5)$$

Tutti i punti descrivono traiettorie circolari (o archi di cerchio), concentriche all'asse di rotazione e giacenti su piani ortogonali ad esso.

**moto di rototraslazione** è il caso più generale in cui c'è una componente di traslazione e di rotazione. Un caso speciale di rototraslazione è il moto di rotolamento, che sarà approfondito nella Sezione 6

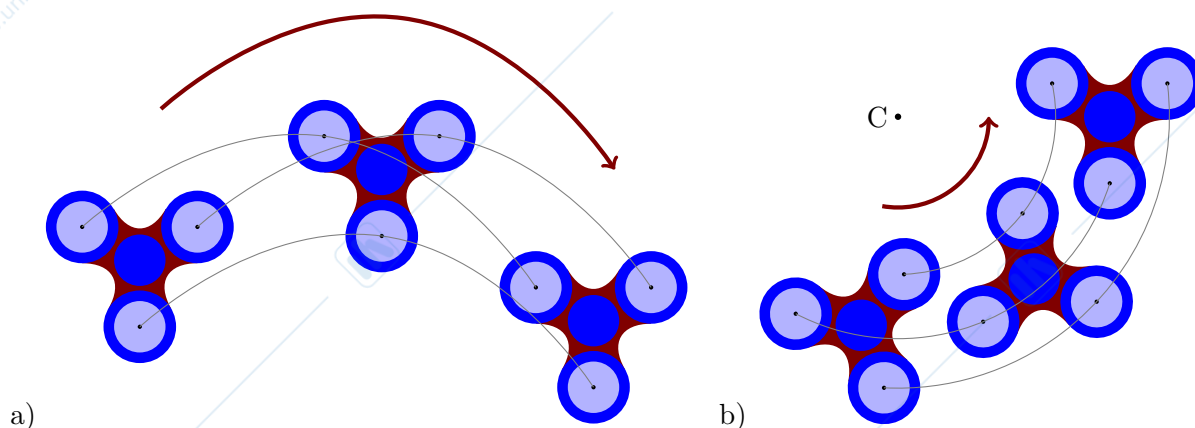


Figura 1: (a) Traslazione pura di un corpo rigido: i punti del corpo hanno traiettorie esattamente sovrapponibili. (b) Rotazione pura di un corpo rigido attorno a un asse ortogonale al foglio, passante per C. I punti descrivono archi di circonferenza centrati in C.

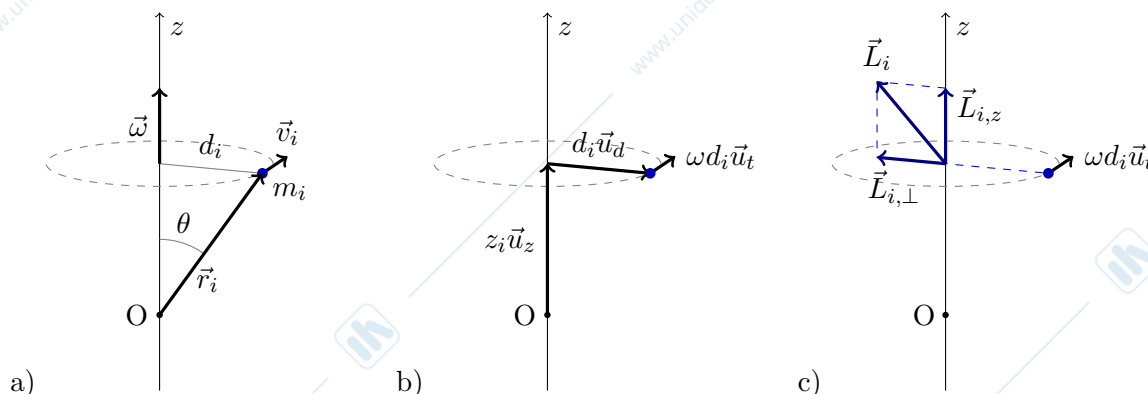


Figura 2: Schemi delle distanze geometriche e delle grandezze vettoriali rilevanti per il calcolo del momento angolare. (a) Una massa  $m_i$  (parte di un sistema di  $N$  masse) ruota a velocità angolare  $\vec{\omega}$  attorno a un asse fisso  $z$ . Il vettore  $\vec{r}_i$  la congiunge al polo  $O$  scelto sull'asse. (b) Il vettore  $\vec{r}_i$  si può scomporre nelle direzioni assiale e radiale  $\vec{r}_i = z_i \vec{u}_z + d_i \vec{u}_d$  e la velocità tangenziale come  $\omega d_i \vec{u}_t$ . (c) Il contributo  $\vec{L}_i$  della massa  $m_i$  al momento angolare complessivo del sistema ha una componente normale e una componente parallela all'asse  $z$ .

### 3 Moto rotatorio ad asse fisso

Il moto rotatorio intorno a un asse fisso nello spazio, detto anche **moto rotatorio puro**, è il tipo di moto di molti organi meccanici rotanti all'interno di macchine: ruote, alberi, turbine, volani... Perciò, lo studio di questo tipo di movimento, oltre che essere rilevante dal punto di vista teorico, è di grande importanza pratica per le numerose applicazioni. Per semplicità (e senza perdere in generalità) assumeremo nella descrizione del moto un sistema di riferimento in cui l'asse  $z$  è parallelo e coincidente con l'asse di rotazione ( $\vec{\omega} \parallel \vec{u}_z$ ).

Il **momento angolare** del sistema, calcolato rispetto a un polo  $O$  appartenente all'asse di rotazione, è:

$$\vec{L}_O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (3-1)$$

Possiamo scrivere la velocità del punto materiale  $i$ -esimo come:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega r_i \sin \theta \vec{u}_t = \omega d_i \vec{u}_t \quad (3-2)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra il vettore  $\vec{r}_i$  e l'asse di rotazione,  $d_i$  è la distanza tra l'asse di rotazione e il punto materiale  $i$ -esimo e  $\vec{u}_t$  è un versore tangente alle traiettorie circolari dei punti materiali (Figura 2a).

Si osserva che in generale  $\vec{L}_O$  non è parallelo all'asse di rotazione, ma si potrà scrivere come somma di una componente parallela all'asse  $\vec{L}_z$  e una componente ortogonale ad esso  $\vec{L}_\perp$ . Infatti:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i [(z_i \vec{u}_z + d_i \vec{u}_d) \times \omega d_i \vec{u}_t]\end{aligned}\quad (3-3)$$

dove  $\vec{u}_d$  è un versore radiale che origina dall'asse di rotazione (Figura 2b). Ora,  $\vec{u}_z \times \vec{u}_t = -\vec{u}_d \perp \vec{u}_z$  mentre  $\vec{u}_d \times \vec{u}_t = \vec{u}_z$  quindi (Figura 2t):

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i m_i [-z_i \omega d_i \vec{u}_d + \omega d_i^2 \vec{u}_z] = \\ &= \underbrace{-\sum_i m_i z_i \omega d_i \vec{u}_d}_{\vec{L}_\perp} + \underbrace{\sum_i m_i \omega d_i^2 \vec{u}_z}_{\vec{L}_z}\end{aligned}\quad (3-4)$$

Nel termine  $\vec{L}_z$ , detto anche **momento angolare assiale**, possiamo raccogliere  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ , scrivendo:

$$\vec{L}_z = I_z \vec{\omega}\quad (3-5)$$

dove è stato introdotto il **momento di inerzia assiale** relativo all'asse  $z$ .

#### Momento di inerzia assiale

Si definisce momento di inerzia assiale di un sistema rigido, rispetto a un asse di rotazione  $z$ :

$$I_z = \sum_i d_i^2 m_i \quad \text{per sistemi discreti} \quad (3-6)$$

$$I_z = \int d^2 dm \quad \text{per sistemi continui} \quad (3-7)$$

dove  $d_i$  ( $d$ ) è la distanza della massa  $i$ -esima (della massa  $dm$ ) dall'asse  $z$ . Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del momento di inerzia è il  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ .

Il momento di inerzia assiale così definito è uno scalare<sup>1</sup> e dipende:

- dalla distribuzione delle masse dei punti materiali che compongono il corpo rigido, e non solo dalla massa totale
- dall'asse scelto di rotazione, quindi non è una proprietà intrinseca del corpo rigido

La componente  $\vec{L}_\perp$  dipende da come è orientato *in quell'istante* il corpo rotante: in un moto di rotazione attorno all'asse fissato, anche la componente  $\vec{L}_\perp$  dovrà ruotare alla stessa velocità angolare  $\omega$  (mantenendosi su un piano ortogonale a  $\vec{\omega}$ ). Perciò, in generale il vettore  $\vec{L}$  ruota attorno all'asse di rotazione descrivendo un cono, in un moto detto *precessione del momento angolare*.

Si può notare dall'espressione  $\vec{L}_\perp = -\sum_i m_i z_i \omega d_i \vec{u}_d$  che  $\vec{L}_\perp$  si può annullare in alcune condizioni, ad esempio se l'asse di rotazione è asse di simmetria. In tal caso infatti, per ogni massa  $m_i$  posta alla coordinata  $z$  e indicata da un vettore ortogonale all'asse  $d_i \vec{u}_{d_i}$ , ne esisterà anche un'altra uguale (la

<sup>1</sup>In realtà, una trattazione più completa dell'argomento (accennata in Appendice) porterebbe alla definizione del momento d'inerzia  $\mathbf{I}$  come un tensore, rappresentabile con una matrice  $3 \times 3$ , con cui si può scrivere una relazione sintetica:  $\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$ . Il *tensore* momento di inerzia è allora una proprietà intrinseca del corpo rigido in quanto tale, che mette in relazione l'intero vettore momento angolare  $\vec{L}$  (incluso anche la componente ortogonale) con il vettore velocità angolare  $\vec{\omega}$ .

sua simmetrica)  $m_j = m_i$  posta alla stessa coordinata  $z$  dalla parte opposta dell'asse  $d_j \vec{u}_{d_j} = -d_i \vec{u}_{d_i}$ , così che la sommatoria nell'espressione di  $\vec{L}_\perp$  diventa nulla.

Si potrebbe ulteriormente dimostrare (Teorema di Poinsot) che, scelto un qualsiasi punto O come polo, esistono almeno tre assi di rotazione possibili, mutuamente ortogonali e passanti per O, per cui  $\vec{L}_\perp = 0$  e  $\vec{L} \parallel \omega$ . Questi si dicono *assi principali di inerzia*. Se il polo O coincide con il centro di massa, si parla di *assi centrali di inerzia*. Poiché essi esistono per qualsiasi punto e per qualsiasi corpo rigido, essi non sono necessariamente assi di simmetria del corpo; se però il corpo possiede degli assi di simmetria, questi possono essere assi principali di inerzia.

Fin qui, abbiamo compiuto delle osservazioni sulle caratteristiche del vettore  $\vec{L}$  se si *impone* che il corpo rigido stia ruotando attorno a un asse che rimane fisso nello spazio. Non abbiamo ancora studiato però quali forze o momenti debbano agire affinché il corpo si mantenga in un moto siffatto, oppure lo modifichi. Come è noto, questi aspetti possono essere studiati tramite le Equazioni Cardinali.

Scriviamo dunque anzitutto la II Equazione Cardinale della Dinamica dei Sistemi; per un corpo rigido rotante e applicando la scomposizione del momento angolare vista sopra possiamo scrivere:

$$\vec{\tau}^{(e)} = \frac{d\vec{L}_z}{dt} + \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} \quad (3-8)$$

Per la loro stessa definizione,  $\vec{L}_z$  è parallelo all'asse  $z$  mentre  $\vec{L}_\perp$  giace su piano ad esso ortogonale, istante per istante. Perciò anche le loro derivate saranno rispettivamente sempre parallela e ortogonale all'asse  $z$ . Decomponendo  $\vec{\tau}^{(e)}$  sulle direzioni parallela e ortogonale a  $z$ , otteniamo:

$$\vec{\tau}_z^{(e)} = \tau_z^{(e)} \vec{u}_z = \frac{dL_z}{dt} \vec{u}_z \quad \vec{\tau}_\perp^{(e)} = \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} \quad (3-9)$$

Analizziamo meglio il ruolo delle due componenti del momento delle forze esterne.

- Per quanto riguarda  $\vec{\tau}_z^{(e)}$ , vale l'equazione scalare:

$$\tau_z^{(e)} = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d(I_z \omega)}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} \quad (3-10)$$

$$\tau_z^{(e)} = I_z \alpha \quad (3-11)$$

dove  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$  è l'accelerazione angolare. La componente parallela a  $z$  del momento delle forze esterne è *responsabile di accelerazioni o decelerazioni (angolari) nel moto rotatorio del corpo rigido*. Se  $\tau_z^{(e)} = 0$  il corpo resta in quiete o ruota a velocità  $\omega$  costante (vedi però anche il Riquadro 1). Altrimenti  $\tau_z^{(e)} \neq 0$  determinerà una accelerazione angolare  $\alpha$  che, integrata, permette di calcolare la velocità angolare  $\omega$  e la posizione angolare  $\theta$  in funzione del tempo.

$$\alpha(t) = \frac{\tau_z^{(e)}(t)}{I} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha dt \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega dt \quad (3-12)$$

Se  $\alpha$  è costante si ha un moto circolare uniformemente accelerato:

$$\alpha = \frac{\tau_z^{(e)}}{I} = \text{cost.} \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (3-13)$$

- Il ruolo di  $\vec{\tau}_\perp^{(e)}$  è differente. In un moto di rotazione attorno all'asse fissato,  $\vec{L}_\perp$  muta continuamente direzione, ruotando anch'esso attorno all'asse a velocità angolare  $\omega$ .  $\vec{\tau}_\perp^{(e)}$  deve essere il responsabile di questa rotazione di  $\vec{L}_\perp$ . Ciò significa che se  $\vec{L}_\perp \neq 0$ , per sostenere il moto *deve esistere* anche un momento  $\vec{\tau}_\perp^{(e)} = \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} \neq 0$ . Tale momento è usualmente fornito dai vincoli dell'asse fisico di rotazione del corpo rigido.

### Riquadro 1 - Conservazione del momento angolare assiale

Nel caso di un moto rotatorio ad asse fisso è possibile trattare separatamente la componente assiale del momento angolare, per cui:

$$\tau_z^{(e)} = \frac{dL_z}{dt}$$

In assenza di momento meccanico assiale ( $\tau_z^{(e)} = 0$ ) il momento angolare assiale si conserva ( $L_z = \text{cost.}$ ).

Nel caso di un corpo rigido e indeformabile, con  $I_z$  ben definito e costante nel tempo, questo comporta che la sua velocità angolare di rotazione rimanga costante. Se invece abbiamo a che fare con un sistema meccanico deformabile o con parti mobili, che può perciò cambiare il suo momento di inerzia da un valore  $I_1$  a un valore  $I_2$ , la conservazione del momento angolare assiale implica:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 \quad (3-14)$$

In pratica, se il corpo modifica il suo momento di inerzia durante il moto rotatorio (in assenza di momenti di forze esterne) la sua velocità angolare di rotazione *varierà*: se  $I_2 < I_1$  subirà una accelerazione angolare ( $\omega_2 > \omega_1$ ), viceversa subirà una decelerazione.

Pensiamo a una ballerina che inizia a girare su se stessa, inizialmente con le braccia allargate: se stringe a sé le braccia durante la rotazione, diminuisce il suo momento di inerzia assiale e aumenterà di conseguenza la sua velocità di rotazione.

Per concludere questa analisi consideriamo anche la I Equazione Cardinale della Dinamica. Nel caso di un moto rotatorio anche il centro di massa segue una traiettoria circolare, ed avrà sempre un'accelerazione con una componente di tipo centripeto. Nel caso di un moto con  $\omega$  costante (moto circolare uniforme del centro di massa) questa è l'unica componente dell'accelerazione:

$$\vec{F}^{(e)} = M \vec{a}_{CM} = M \omega^2 d_{CM} (-\vec{u}_d) \quad (3-15)$$

dove  $d_{CM}$  è la distanza del centro di massa dall'asse di rotazione e  $-\vec{u}_d$  è un versore radiale rivolto verso l'asse. Se l'asse di rotazione non passa per il centro di massa ( $d_{CM} \neq 0$ ) è dunque necessario fornire una forza esterna che funga da forza centripeta. Essa non compie lavoro e non produce accelerazioni angolari, ma serve per mantenere la rotazione sull'asse scelto.

Si capisce allora come sia spesso preferibile, nella progettazione di componenti meccanici rotanti, equilibrare le forme e i componenti in modo che l'asse di rotazione corrisponda proprio a uno degli assi centrali di inerzia. In questo modo per mantenere il moto non è necessario esercitare né un momento esterno (perché  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ ) né una reazione vincolare centripeta (perché  $d_{CM} = 0$ ). In caso contrario, queste forze e momenti devono essere esercitati dai vincoli sull'asse fisico rotante (ad esempio le reazioni sugli alloggiamenti dell'albero rotante). Queste forze possono sollecitare e logorare i componenti meccanici, soprattutto ad  $\omega$  elevate. Un esempio è la necessità dell'equilibratura degli pneumatici di un'automobile: se non sono ben equilibrati con appositi contrappesi sul cerchione possono dare sollecitazioni pericolose per i giunti meccanici e produrre vibrazioni mentre si guida, in particolare alle alte velocità.

## 4 Energia e lavoro nel moto rotatorio

L'energia cinetica totale di un sistema di punti materiali è:

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (4-1)$$

Per un corpo rigido rotante *con asse fisso* possiamo scrivere  $v_i^2$  come:

$$v_i^2 = |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2 = \omega^2 r_i^2 \sin^2 \theta = \omega^2 d_i^2 \quad (4-2)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra il vettore  $\vec{r}_i$  e l'asse di rotazione, e  $d_i$  è la distanza tra l'asse di rotazione e il punto materiale  $i$ -esimo. Sostituendo la (4-2) nella (4-1) si ottiene:

$$E_C = \sum_i \frac{1}{2} m_i d_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (4-3)$$

dove figura il momento di inerzia assiale  $I_z$ , definito nella Sezione 3. La (4-3) quantifica l'energia cinetica di un corpo rigido dovuta al solo movimento di rotazione attorno all'asse.

Consideriamo ora il **lavoro** prodotto dalle forze esterne su un sistema rigido in pura rotazione. Per il teorema delle forze vive, se abbiamo un cambiamento della velocità di rotazione da  $\omega_1$  a  $\omega_2$  si avrà:

$$\mathcal{L}^{(e)} = \Delta E_C = \frac{1}{2} I_z \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_1^2 \quad (4-4)$$

Se però calcoliamo la stessa quantità per una variazione infinitesima, ovvero differenziando l'espressione dell'energia cinetica:

$$\delta \mathcal{L}^{(e)} = dE_C = I_z \omega d\omega = I_z \omega \alpha dt = I_z \alpha d\theta = \tau_z^{(e)} d\theta \quad (4-5)$$

dove abbiamo sostituito  $d\omega = \alpha dt$ ,  $d\theta = \omega dt$  e  $\tau_z^{(e)} = I_z \alpha$ . Passando di nuova in forma integrale, otteniamo:

$$\mathcal{L}^{(e)} = \Delta E_C = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z^{(e)} d\theta \quad (4-6)$$

Si nota come questa espressione presenti una certa somiglianza formale con la definizione del lavoro di una forza, che è l'integrale della stessa lungo una coordinata spaziale. Qui abbiamo mostrato che per un corpo rigido rotante il lavoro di tutte le forze esterne è dato dall'integrale del loro momento assiale lungo la coordinata angolare. Non abbiamo considerato le forze interne, perché non essendovi spostamento relativo tra i vari punti del corpo rigido, danno un lavoro risultante nullo.

Si può calcolare facilmente anche la **potenza sviluppata**:

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{L}^{(e)}}{dt} = \frac{d\mathcal{L}^{(e)}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \tau_z^{(e)} \omega \quad (4-7)$$

Ricordando che  $\tau_z^{(e)}$  altro non è che la proiezione di  $\vec{\tau}^{(e)}$  sull'asse di rotazione  $z$  e che  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$  si può scrivere anche la relazione sintetica:

$$\mathcal{P} = \vec{\tau}^{(e)} \cdot \vec{\omega} \quad (4-8)$$

## 5 Calcolo del momento di inerzia

Il momento di inerzia gioca, per i moti rotatori, un ruolo simile a quello della massa per i moti lineari. Non sarà sfuggita l'analogia tra la (3-11) e la II Legge di Newton  $F = ma$ : al posto della forza ritroviamo il momento, al posto dell'accelerazione lineare l'accelerazione angolare e al posto della massa proprio il momento di inerzia. Discutiamo ora alcune proprietà e teoremi, oltre che alcuni esempi, che possono facilitarne il calcolo nelle situazioni di interesse.

Per un **solido omogeneo** di densità  $\rho$  uniforme, l'elemento di massa  $dm$  all'interno dell'integrale (3-7) si può scrivere  $dm = \rho dV$ , da cui:

$$I = \int d^2 dm = \int d^2 \rho dV = \rho \int d^2 dV = M \cdot \frac{\int d^2 dV}{V} \quad (5-1)$$

dove è stata impiegata la definizione di densità per un corpo omogeneo  $\rho = M/V$ , essendo  $M$  e  $V$  rispettivamente la massa e il volume del solido. Si osserva che per questo tipo di corpi il momento di inerzia è proporzionale a  $M$  e ad un fattore, pari a  $\frac{\int d^2 dV}{V}$ , che dipende solo dalla forma geometrica del corpo (oltre che, naturalmente, dall'asse scelto).

Essendo definito tramite sommatorie o integrali, **il momento di inerzia è additivo**: se si suddivide un sistema in più parti, il momento di inerzia dell'insieme è pari alla somma dei momenti di inerzia delle singole parti, calcolati tutti rispetto allo stesso asse. Nel Riquadro 2, ad esempio, si mostra come calcolare il momento di inerzia di un anello sottile e, nei Riquadri 3 e 4, come a partire da quel risultato sia possibile ricavare il momento di inerzia di un disco o di un cilindro pieno, scomponendoli adeguatamente in parti.

In molti casi, il calcolo del momento di inerzia di un corpo rigido per un asse passante per il centro di massa presenta delle semplificazioni, perché si possono sfruttare eventuali simmetrie del corpo rigido per svolgere l'integrale. Il **Teorema di Huygens-Steiner**, enunciato e dimostrato qui di seguito, permette di ricavare da questo i momenti di inerzia dello stesso corpo rispetto ad assi paralleli al primo. La dimostrazione è qui effettuata per un sistema continuo ma potrebbe svolgersi analogamente per un sistema discreto.

*Il momento di inerzia di un corpo rigido di massa  $M$ , rispetto ad un asse a distanza  $D$  dal centro di massa, è dato da:*

$$I = I_{CM} + MD^2 \quad (5-2)$$

*dove  $I_{CM}$  è il momento di inerzia dello stesso corpo, calcolato rispetto ad un asse parallelo al primo e passante per il centro di massa.*

- I) Sia  $z$  l'asse rispetto al quale vogliamo calcolare  $I$  e sia  $z'$  l'asse parallelo a  $z$  passante per il centro di massa. Definiamo due sistemi di riferimento cartesiani, come in Figura 3, con  $y \equiv y'$  in modo che intersechino sia  $z$  sia  $z'$ .
- II) I quadrati della distanza  $d$  di un punto  $P$  qualsiasi di massa  $dm$  dall'asse  $z$  e della distanza  $d'$  dello stesso punto dall'asse  $z'$  sono dati da:

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad d'^2 = x'^2 + y'^2 \quad (5-3)$$

- III) Dalla costruzione geometrica in figura è semplice ricavare che  $x = x'$  e  $y = y' + D$ :

$$d^2 = x^2 + y^2 = x'^2 + (y' + D)^2 = x'^2 + y'^2 + 2Dy' + D^2 = d'^2 + 2Dy' + D^2 \quad (5-4)$$

- IV) Scrivendo ora il momento di inerzia relativo all'asse  $z$  e sostituendo la (5-4) otteniamo:

$$I = \int d^2 dm = \int d'^2 dm + \int 2Dy' dm + \int D^2 dm \quad (5-5)$$

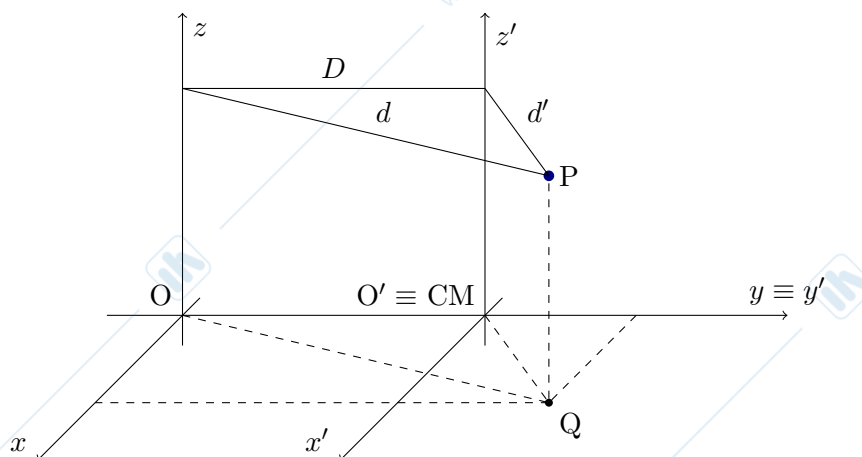


Figura 3: Ciascun punto P del corpo rigido è posto a una distanza  $d$  dall'asse  $z$  e a una distanza  $d'$  dall'asse  $z'$ . La distanza tra i due assi è pari a  $D$ . I due sistemi di riferimento cartesiani  $xyz$  e  $x'y'z'$  sono costruiti in modo che  $y \equiv y'$ .

V) Analizziamo i termini di questa somma

- $\int d'^2 dm = I_{CM}$
- $\int 2Dy' dm = 2D \int y' dm = 2DM y'_{CM} = 0$  (ricordando che il centro di massa nel sistema di riferimento  $x'y'z'$  giace proprio sull'asse  $z'$ , quindi  $y'_{CM} = 0$ )
- $\int D^2 dm = MD^2$

Si ricava quindi la (5-2). ■

Un esempio di applicazione del Teorema di Huygens-Steiner è dato nel riquadro 5

Infine, un teorema utile per trattare corpi rigidi assimilabili a oggetti piani sottili (di spessore trascurabile) è il seguente.

*Dato un sistema rigido planare, di spessore trascurabile, giacente sul piano  $xy$  di un sistema di riferimento cartesiano, vale la seguente formula:*

$$I_z = I_x + I_y \quad (5-6)$$

dove  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  indicano i momenti di inerzia calcolati rispetto ai tre assi cartesiani.

I) Le espressioni dei momenti di inerzia rispetto ai tre assi, in coordinate cartesiane, si scrivono come:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad I_y = \int (x^2 + z^2) dm \quad I_z = \int (x^2 + y^2) dm \quad (5-7)$$

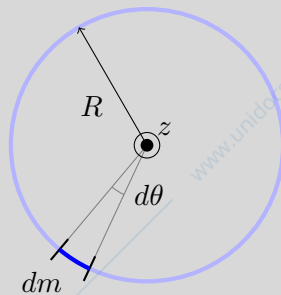
II) Per un sistema giacente sul piano  $xy$  la coordinata  $z$  delle masse  $dm$  considerate nell'integrale sarà sempre nulla. Perciò

$$I_x = \int y^2 dm \quad I_y = \int x^2 dm \quad (5-8)$$

da cui è immediato ricavare la tesi:

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = I_x + I_y \quad (5-9)$$

## Riquadro 2 - Momento di inerzia di un anello sottile



Calcoliamo il momento di inerzia di un anello circolare sottile di massa  $M$  e raggio  $R$ , rispetto a un asse  $z$  passante per il suo centro e ortogonale al piano su cui giace. Per poter svolgere l'integrale (3-7) è necessario operare correttamente e in modo conveniente la scomposizione in elementi di massa  $dm$ .

Nel caso di un anello l'elemento  $dm$  può essere un archetto infinitesimo di ampiezza angolare  $d\theta$ , che ha una lunghezza lineare  $dl = R d\theta$ .

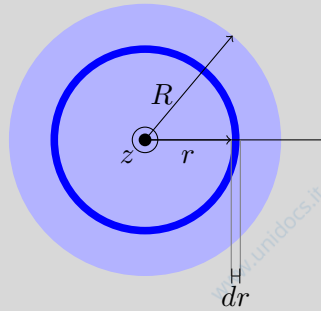
Se l'anello ha densità lineare uniforme  $\lambda = \frac{M}{L_{tot}} = \frac{M}{2\pi R}$  si ha:

$$dm = \lambda dl = \frac{M}{2\pi R} R d\theta = \frac{M}{2\pi} d\theta$$

Si può allora integrare su tutto il cerchio, da 0 a  $2\pi$ , considerando che tutti gli elementi di massa hanno la stessa distanza  $d = R$  dall'asse:

$$I = \int d^2 dm = \int_0^{2\pi} R^2 \frac{M}{2\pi} d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \cdot 2\pi \Rightarrow \boxed{I_z = MR^2}$$

## Riquadro 3 - Momento di inerzia di un disco



Calcoliamo il momento di inerzia di un disco sottile di massa  $M$  e raggio  $R$ , rispetto a un asse  $z$  passante per il suo centro e ortogonale al piano su cui giace.

La densità superficiale del disco (massa per unità di superficie) è  $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$ .

Possiamo visualizzare il disco come la composizione di anelli di raggio  $r$  crescente, da 0 a  $R$ , e spessore infinitesimo  $dr$ : il momento di inerzia del disco sarà la somma (meglio, l'integrale) dei momenti di inerzia degli anelli.

Ciascun anello ha un'area infinitesima pari a (gli infinitesimi di ordine superiore al primo si trascurano):

$$dA = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = \pi(\cancel{r^2} + 2r dr + \underbrace{dr^2}_{\ll dr} - \cancel{r^2}) = 2\pi r dr$$

e quindi una massa:

$$dm = \sigma dA = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi r dr = 2\frac{Mr}{R^2} dr$$

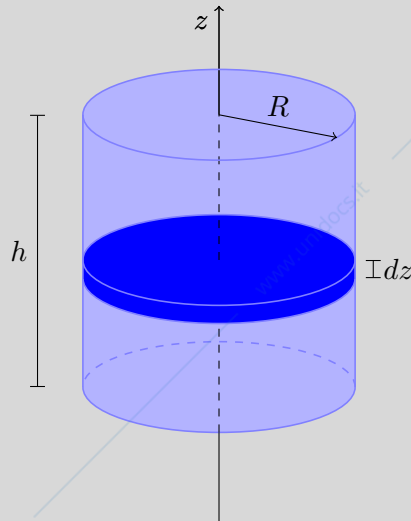
Impiegando la formula del momento di inerzia di un anello ricavata nel Riquadro 2 con  $r$  come raggio e sostituendo alla massa l'espressione di  $dm$ , ricaviamo il momento di inerzia infinitesimo:

$$dI_z = 2\frac{Mr}{R^2} dr \cdot r^2 = 2\frac{Mr^3}{R^2} dr$$

Integrando da 0 a  $R$  si ottiene infine:

$$I_z = \int dI_z = \int_0^R 2\frac{Mr^3}{R^2} dr = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2M}{R^2} \cdot \frac{R^4}{4} \Rightarrow I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

## Riquadro 4 - Momento di inerzia di un cilindro pieno



Calcoliamo il momento di inerzia di un cilindro pieno, di massa  $M$ , raggio  $R$  e altezza  $h$  rispetto all'asse di simmetria ortogonale alle sue basi.

La densità volumetrica del cilindro è  $\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}$ .

Possiamo considerare il cilindro come l'insieme di molti dischi di raggio  $R$  e spessore  $dz$  impilati l'uno sull'altro: ciascuno di questi dischi ha spessore infinitesimo ed ha un momento di inerzia infinitesimo calcolabile con la formula ricavata nel Riquadro 3

In dettaglio, ciascun disco ha una massa infinitesima:

$$dm = \rho dV = \rho \pi R^2 dz = \frac{M}{\pi R^2 h} \pi R^2 dz = \frac{M}{h} dz$$

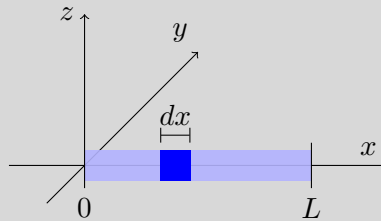
per cui, integrando i contributi di tutti i dischi:

$$I_z = \int dI_z = \int_0^h \frac{1}{2} R^2 \frac{M}{h} dz = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{h} \int_0^h dz = \frac{1}{2} \frac{MR^2}{h} h \Rightarrow I_z = \frac{1}{2} MR^2$$

Notiamo che l'espressione è formalmente identica a quella del momento di inerzia di un disco.

## Riquadro 5 - Momento di inerzia di una sbarra

Rispetto a un asse passante per un estremo



Consideriamo una sbarra sottile, di massa  $M$  e lunghezza  $L$ ; imponiamo un sistema di riferimento cartesiano con l'origine a un estremo della sbarra e orientato in modo che essa giaccia sull'asse  $x$ , dalla parte positiva. Calcoliamo il momento di inerzia rispetto all'asse  $z$  tramite l'integrale (3-7).

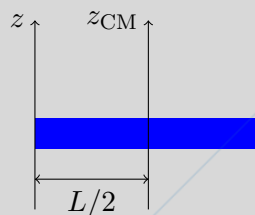
Si può considerare convenientemente come elemento di massa  $dm$  un tratto di sbarra di lunghezza infinitesima  $dx$ . La densità lineare della sbarra è  $\lambda = M/L$  e la massa dell'elemento infinitesimo è:

$$dm = \lambda dx = \frac{M}{L} dx$$

Scriviamo l'integrale ricordando che la distanza di ogni elemento dall'asse  $z$  è proprio  $d \equiv x$ :

$$I_z = \int d^2 dm = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{3} \Rightarrow \boxed{I_z = \frac{1}{3} ML^2}$$

Rispetto a un asse passante per il centro



L'asse passante per il centro della sbarra, ovvero per il suo centro di massa, è parallelo all'asse  $z$  considerato nel calcolo precedente, e posto a distanza  $D = L/2$  da esso.

Applicando il teorema di Huygens-Steiner abbiamo:

$$I_z = I_{CM} + MD^2 \Rightarrow I_{CM} = I_z - MD^2$$

$$I_{CM} = \frac{1}{3} ML^2 - M \frac{L^2}{4} \Rightarrow \boxed{I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2}$$

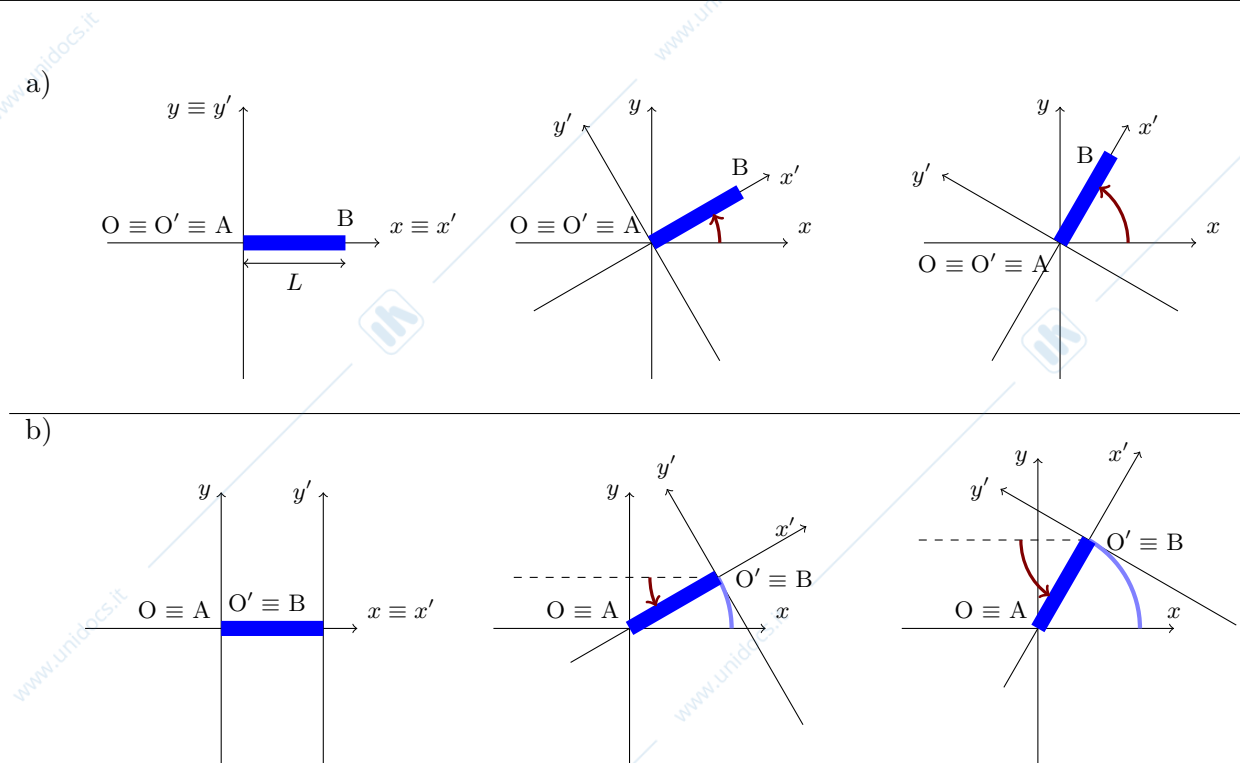


Figura 4: (a) Moto di una sbarra AB, descritto come rotazione pura attorno a un asse passante per l'estremo A. Il sistema di riferimento esterno  $xy$  e il sistema di riferimento  $x'y'$ , quest'ultimo solidale con la sbarra, hanno entrambi origine in A. (b) Lo stesso moto può essere descritto come una rotazione attorno a un asse passante per B, che contestualmente trasla lungo la traiettoria evidenziata in azzurro. In questa rappresentazione il sistema di riferimento esterno  $xy$  ha ancora origine in A, il sistema di riferimento solidale con la sbarra  $x'y'$  ha origine in B.

## 6 Rototraslazione e rotolamento puro

Il tipo di moto più generale di un corpo rigido è, come già menzionato, una *rototraslazione*: la rotazione attorno a un asse combinata con un moto di traslazione, ed eventuale cambio di orientazione dell'asse stesso, lungo una traiettoria arbitraria. Il moto dei singoli punti del corpo rigido è descritto cinematicamente dalla (2-2) e la dinamica è regolata dalle Equazioni Cardinali della Meccanica.

È importante osservare che un moto di un corpo rigido che non sia una pura traslazione non ha una rappresentazione matematica univoca, ma possono esistere diverse descrizioni ugualmente valide dal punto di vista cinematico. Formalmente, ciò è evidente già dalla formula (2-3) dove si vede come il centro di rotazione possa essere scelto arbitrariamente. Come esempio significativo, per quanto semplice, si può considerare il moto rotatorio di una sbarra di lunghezza  $L$  e estremi AB, rappresentato in Figura 4. Tale moto può essere descritto o come una rotazione pura attorno all'estremo A (Figura 4a), oppure come una rotazione attorno all'estremo B combinata con un moto traslatorio dell'asse di rotazione, lungo una circonferenza di raggio  $L$  (Figura 4b).

Può essere vantaggioso descrivere un moto rototraslatorio sulla base di un asse di rotazione passante per il centro di massa. In tal caso possiamo scrivere il momento angolare e l'energia cinetica sfruttando i Teoremi di König. In particolare, l'energia cinetica del corpo rigido diventa:

$$E_C = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + E'_{CM} \quad (6-1)$$

dove  $E'_{CM}$  è l'energia cinetica del corpo rigido in un sistema di riferimento non rotante centrato sul centro di massa. Avendo però considerato l'asse di rotazione proprio passante per il centro di massa, in quel sistema di riferimento il corpo sta effettuando una rotazione pura, per cui  $E'_{CM} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$  dove  $I_{CM}$  è il momento di inerzia assiale (calcolato rispetto a questo asse passante per il centro di massa).

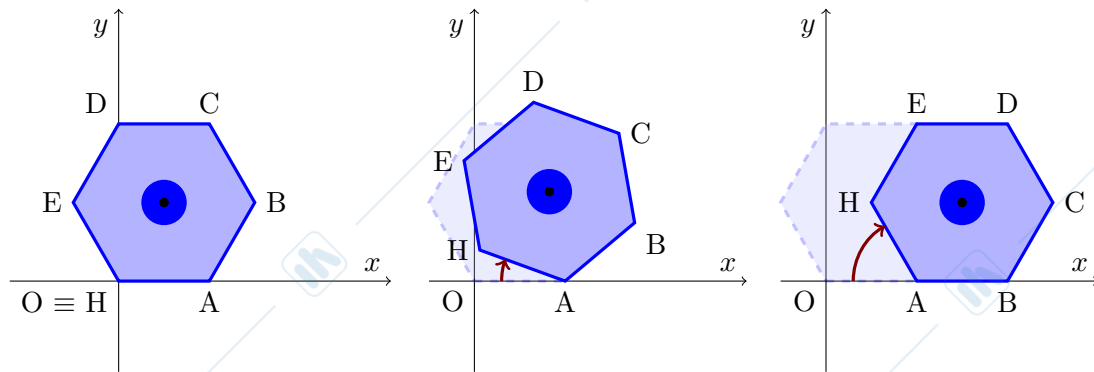


Figura 5: Rotolamento di un solido prismatico a sezione esagonale (una matita): il moto si compone di rotazioni pure successive, attorno agli spigoli.

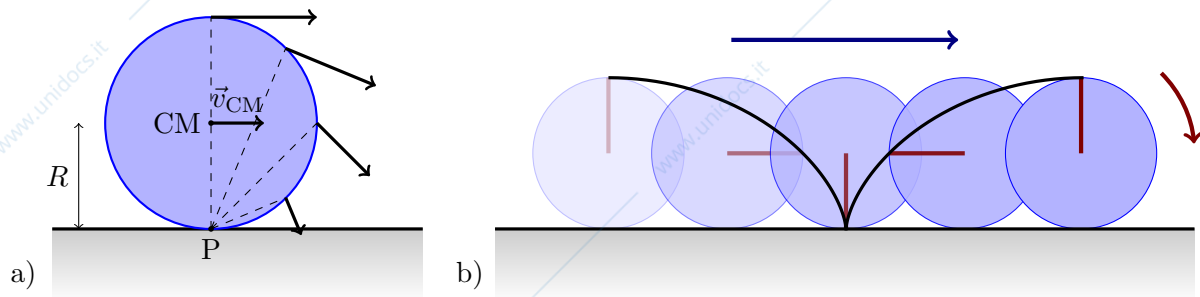


Figura 6: (a) Un disco di raggio  $R$  rotola senza strisciare su una superficie piana. In ogni istante il suo moto può essere descritto come una rotazione pura attorno all'asse di istantanea rotazione  $P$ , che costituisce la linea d'appoggio del disco in quell'istante. (b) Si evidenzia la traiettoria seguita da un punto del disco durante il rotolamento, detta *cicloide*.

Possiamo quindi scrivere in generale l'energia cinetica di un corpo rigido in rototraslazione come:

$$E_C = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \quad (6-2)$$

In un moto rototraslatorio generico,  $v_{CM}$  e  $\omega$  non sono legate da relazioni specifiche e possono assumere valori arbitrari. Un caso particolare di grande interesse pratico, in cui invece queste grandezze sono strettamente legate tra di loro, è quello del **rotolamento**. Nel moto di rotolamento un corpo trasla e insieme ruota, rimanendo sempre appoggiato su una superficie. Se il corpo rigido, nel punto di contatto, *non striscia* contro la superficie si parla di *rotolamento puro*.

Prima di affrontare il caso più notevole, che è quello del rotolamento di un corpo con sezione circolare, quale ad esempio una ruota, può essere istruttivo fare qualche considerazione sul rotolamento di un solido poligonale, ad esempio una matita esagonale (vedi Figura 5). La matita, dapprima appoggiata sulla faccia  $AH$ , per rotolare verso destra rimanendo a contatto con il piano dovrà ruotare avendo come *asse fisso* lo spigolo passante per  $A$ ; dopo una rotazione di  $60^\circ$  si appoggerà di nuovo sul piano, ma con la faccia  $AB$ . Tramite questa rotazione il centro di massa della matita ha subito una traslazione orizzontale pari esattamente alla lunghezza del lato dell'esagono. Successivamente, per continuare il suo movimento, la matita dovrà ruotare attorno allo spigolo passante per  $B$ , e poi per quello passante per  $C$  e così via, fino a ritornare ancora ad  $A$ . Il rotolamento si compone di *moti rotatori puri* successivi, attorno ad assi diversi. Questi assi coincidono con diversi punti di appoggio distribuiti lungo il perimetro. Se non c'è strisciamento, in ciascuna rotazione parziale l'asse rimane fisso e fermo e, dopo tale rotazione parziale, il centro di massa del corpo avrà subito una traslazione pari alla distanza tra questo asse di rotazione e il successivo. Quando il solido avrà descritto una rotazione totale di  $360^\circ$ , cioè un giro completo, il centro di massa sarà traslato parallelamente al piano di una lunghezza pari al perimetro del poligono che congiunge i punti di appoggio.

Possiamo ora pensare al caso di un poligono regolare con un sempre maggiore numero di lati, fino ad arrivare al cerchio, che può essere visto come un poligono con lati di lunghezza infinitesima. Il rotolamento di un cilindro o di un disco di raggio  $R$  può essere descritto come la successione di rotazioni infinitesime attorno al punto di contatto, detto centro di *istantanea rotazione* (vedi Figura 6). Esattamente come nel caso del poligono, l'asse di ciascuna rotazione parziale ha *velocità nulla rispetto al piano di appoggio* e rimane *fisso nello spazio*. Da una rotazione infinitesima all'altra non è l'asse fisicamente a traslare, ma è la rotazione che avviene attorno a un asse diverso.

Il centro di massa, che coincide con il centro del disco, è posto a distanza  $R$  dal punto di appoggio. Esso assume una velocità:

$$\vec{v}_{CM} = \omega R \vec{u}_x \quad (6-3)$$

Si conferma che dopo un giro (svolto in un tempo  $T = 2\pi/\omega$ ), il centro di massa subisce una traslazione  $\Delta x = v_{CM}T = 2\pi R$  pari al perimetro della sezione circolare.

La (6-3) è la relazione cercata tra la velocità del centro di massa e la velocità angolare nel caso del rotolamento puro. Sostituendo la (6-3) nella (2-4) è possibile ricavare la velocità di un punto qualsiasi del disco che rotola. Possiamo inoltre scrivere l'energia cinetica del corpo rigido come:

$$E_C = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 = \frac{1}{2} (I_{CM} + M R^2) \omega^2 \quad (6-4)$$

Tenendo presente il teorema di Huygens-Steiner, possiamo osservare che  $I_{CM} + M R^2$  equivale al momento di inerzia del corpo rigido calcolato rispetto all'asse di istantanea rotazione (che dista  $D = R$  dal centro di massa). Infatti, per quanto già discusso, il corpo rigido sta compiendo delle *rotazioni pure, con asse fisso* attorno all'asse di istantanea rotazione. È dunque corretto calcolare l'energia cinetica di un corpo in rotolamento puro anche usando la (4-3), se il momento di inerzia assiale è calcolato rispetto all'asse di istantanea rotazione:

$$E_C = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \quad \text{con} \quad I_P = I_{CM} + M R^2 \quad (6-5)$$

## 7 Reazioni vincolari

Come noto dallo studio della dinamica del punto materiale, si denomina **reazione vincolare normale**  $\vec{R}_n$  la forza che il piano d'appoggio esercita, ortogonalmente alla sua superficie, su un corpo in contatto con esso. Essa descrive fisicamente il fatto che il piano d'appoggio è "impenetrabile" e si oppone alle altre forze che spingono il corpo *contro* al piano. Se è noto dal problema che il corpo rimanga appoggiato, il modulo di  $\vec{R}_n$  si può spesso calcolare proprio imponendo il bilanciamento delle altre forze nella direzione normale (ad esempio la forza peso, se il piano è orizzontale):

$$F_{ris,n} = F_{1,n} + F_{2,n} + \dots + R_n = 0 \quad (7-1)$$

Se il corpo rigido è in contatto con il piano tramite un unico punto, la reazione vincolare normale non potrà che essere applicata a quel punto. Se invece il corpo rigido è in contatto con il piano tramite una superficie estesa, la reazione vincolare deve applicarsi a un punto di detta superficie, ma per determinare *quale* sia il punto occorre fare ulteriori considerazioni. Se sappiamo che il corpo *non ruota* rispetto al piano, il momento risultante di tutte le forze, calcolato rispetto a un punto qualsiasi del corpo rigido, dovrà essere nullo:  $\vec{R}_n$  si applicherà al punto appropriato per verificare questa condizione.

$$\vec{\tau}_{ris} = \vec{\tau}_{F_1} + \vec{\tau}_{F_2} + \dots + \vec{\tau}_{R_n} = 0 \quad (7-2)$$

Un esempio significativo di applicazione di questo ragionamento è la determinazione della condizione di **equilibrio statico di un solido appoggiato** su un piano (vedi Figura 7). Se l'unica altra forza applicata al corpo è il suo stesso peso  $\vec{P}$ , dovrà essere necessariamente  $|\vec{R}_n| = |\vec{P}|$ . D'altra parte, se il corpo deve rimanere stabilmente appoggiato e non ribaltarsi, anche la somma dei momenti deve essere nulla. Poiché  $\vec{R}_n$  e  $\vec{P}$  formano a questo punto una coppia di forze uguali in modulo e direzione,

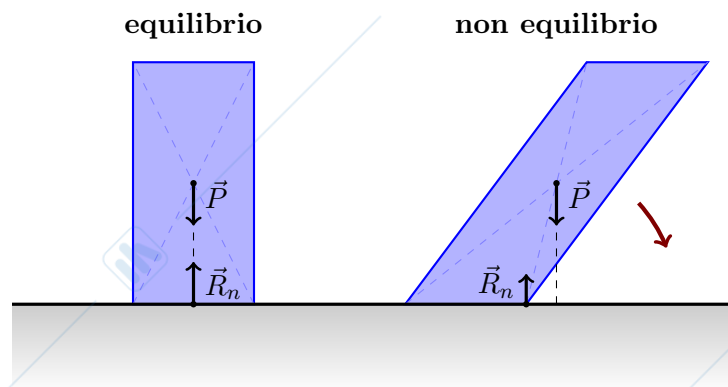


Figura 7: Due parallelepipedi omogenei diversi sono appoggiati su un piano orizzontale. Il parallelepipedo a sinistra rimane appoggiato in una condizione di equilibrio: la reazione normale  $\vec{R}_n$  del piano d'appoggio si può applicare a un punto della base che sta sulla verticale del baricentro, così da annullare sia la risultante delle forze esterne sia la risultante dei momenti. Il parallelepipedo a destra ha una forma tale per cui la verticale del baricentro cade al di fuori della base: questo corpo non può quindi rimanere appoggiato in equilibrio su quella base ma si ribalterà.

ma opposte in verso, l'unico modo per annullare il momento risultante è che giacciono sulla stessa retta d'azione verticale. In pratica, la reazione vincolare deve applicarsi al punto della base del solido che giace sulla verticale del baricentro. Se però il solido ha una forma tale per cui la verticale del baricentro cade *al di fuori* della base d'appoggio, questa condizione non può essere raggiunta e il corpo si ribalterà.

La **reazione vincolare tangenziale** è costituita generalmente dalle forze di **attrito radente statico o dinamico**: sono quelle forze di interazione tra il corpo rigido e la superficie di appoggio, che hanno origine dalle forze di coesione tra i due materiali. La direzione è parallela al piano d'appoggio (da cui l'aggettivo *tangenziale*), il verso si oppone al movimento del corpo (potenziale o in atto) e il modulo è in genere legato a quello della reazione vincolare normale. Anche in questo caso il punto di applicazione deve trovarsi *sulla base di appoggio* del corpo rigido: per ricavarlo si dovranno sfruttare altri aspetti noti della situazione fisica.

Può essere opportuno, per concludere, discutere brevemente la presenza delle **forze di reazione vincolare del piano in un moto di rotolamento puro**. Come già visto, in un moto di rotolamento puro il punto di appoggio del corpo rigido *non striscia* sulla superficie; in altre parole è in ogni istante *fermo rispetto ad essa*. Ciò implica che, se presente, la reazione tangenziale deve essere una forza di *attrito statico*.

Consideriamo, come esempio, una ruota che rotola su un piano orizzontale (Figura 8). Se la ruota è soggetta alla sola forza peso, il piano d'appoggio dovrà reagire con una forza normale  $R_n$  per sostenerla: poiché il punto di contatto si trova esattamente sulla verticale del baricentro, questa  $R_n$  si applica proprio in quel punto e non produce momento. In assenza di un momento risultante non c'è nessuna tendenza del punto di appoggio a spostarsi rispetto al piano, a cui una forza di attrito si debba opporre. La forza di attrito statico è dunque nulla e la ruota continua a rotolare con la stessa  $\omega$  senza accelerare nè decelerare (oppure rimane ferma, se lo era inizialmente).

La situazione è diversa se sulla ruota agisce anche una coppia o momento torcente  $\vec{\tau}_M$ , come può accadere se la ruota è collegata a un motore (ad esempio la ruota posteriore di una motocicletta). La forza peso e la reazione normale si bilanciano come nel caso precedente. Per valutare la forza di attrito statico  $\vec{F}_a = F_a \vec{u}_x$  dobbiamo invece considerare insieme le due equazioni cardinali. Se la ruota ha massa  $M$ , raggio  $R$  e momento di inerzia  $I$  rispetto all'asse di rotazione, queste si scrivono:

$$\begin{cases} \vec{F}_{ris} = \vec{P} + \vec{F}_a + \vec{R}_n = F_a \vec{u}_x = M a_{CM} \vec{u}_x \\ \vec{\tau}_{ris} = (\tau_M - F_a \cdot R) \vec{u}_z = I \alpha \vec{u}_z \end{cases} \quad (7-3)$$

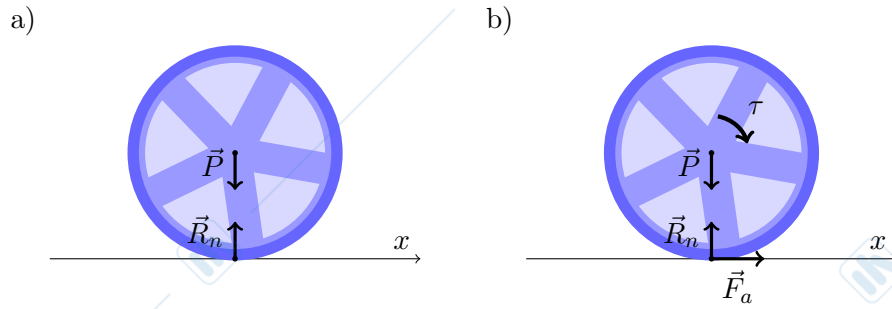


Figura 8: Un corpo rigido di sezione circolare, ad esempio una ruota, rotola senza strisciare su un piano orizzontale. (a) In assenza di forze esterne con componenti orizzontali, la reazione vincolare normale, applicata al punto di istantanea rotazione, bilancia la forza peso; la reazione vincolare tangenziale è invece nulla. La ruota continua a rotolare con la stessa velocità angolare oppure rimane ferma. (b) Se la ruota è sottoposta anche a un momento esterno  $\tau_M$  non nullo sul punto di contatto il piano eserciterà anche una reazione tangenziale, ovvero una forza di attrito statico  $\vec{F}_a$ . Quest'ultima può essere vista come la responsabile dell'accelerazione del centro di massa della ruota.

Possiamo già osservare, ancor prima di risolvere il sistema, che la risultante delle forze è proprio pari alla forza di attrito statico, quindi sarà lei la “responsabile” dell'accelerazione lineare del centro di massa della ruota. Poiché in un moto di rotolamento puro  $v_{CM} = \omega R$ , si ha anche  $a_{CM} = R\alpha_{CM}$ . Sostituendo questa relazione nella prima equazione ricaviamo  $\alpha_{CM} = \frac{F_a}{MR}$ , che a sua volta sostituito nella seconda ci permette di ottenere:

$$F_a = \frac{\tau_M}{R + \frac{I}{MR}} \quad (7-4)$$

La forza di attrito statico è dunque non nulla, rivolta nel verso positivo dell'asse  $x$  e proporzionale al momento fornito.

La forza di attrito statico avrà in ogni caso un valore massimo raggiungibile  $F_{a,max} = \mu_s R_n = \mu_s Mg$ . Questo fissa il massimo momento che può essere fornito alla ruota senza farla slittare, e quindi la massima accelerazione ammissibile. Sappiamo bene che se si spinge troppo l'acceleratore dell'automobile in una partenza da fermi, soprattutto su fondo scivoloso, le ruote possono slittare; la spiegazione è proprio questa.

## Appendice: Il tensore di inerzia

Il momento angolare di un sistema di punti materiali di massa  $m_i$  è dato da:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

dove  $\vec{r}_i$  e  $\vec{v}_i$  sono le posizioni e le velocità dei punti materiali.

Se il sistema è un corpo rigido che sta ruotando a velocità angolare  $\vec{\omega}$  (l'asse di rotazione è identificato dalla direzione del vettore) e consideriamo un sistema di riferimento che abbia l'origine sull'asse di rotazione, le velocità dei punti si possono scrivere come:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \quad (\text{A-1})$$

Sostituendo la (A-1) nell'espressione del momento angolare e applicando l'identità vettoriale (valida per ogni terna di vettori)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) = \sum_i m_i (\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i \cdot (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})) = \\ &= \sum_i m_i \begin{bmatrix} \cancel{\omega_x x^2} + \omega_x y^2 + \omega_x z^2 - \cancel{x^2 \omega_x} - xy\omega_y - xz\omega_z \\ \omega_y x^2 + \cancel{\omega_y y^2} + \omega_y z^2 - yx\omega_x - \cancel{y^2 \omega_y} - yz\omega_z \\ \omega_z x^2 + \omega_z y^2 + \cancel{\omega_z z^2} - zx\omega_x - zy\omega_y - \cancel{z^2 \omega_z} \end{bmatrix} = \\ &= \sum_i m_i \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

ovvero:

$$\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \quad (\text{A-3})$$

dove  $\mathbf{I}$  è detto **tensore d'inerzia**.

Il tensore di inerzia si definisce come:

$$\mathbf{I} = \sum_i m_i \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} = \int \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm \quad (\text{A-4})$$

per sistemi discreti e continui rispettivamente. Il suo valore per un dato corpo dipende dalla posizione e dall'orientazione del sistema di riferimento  $xyz$ .

La (A-2) è un'espressione per il momento angolare più generale della (3-5) ed dettaglia il fatto che  $\vec{L}$  non è necessariamente parallelo a  $\vec{\omega}$ .

Il tensore di inerzia è somma di matrici simmetriche  $3 \times 3$ , perciò sarà anch'esso una matrice simmetrica  $3 \times 3$ . Dall'algebra sappiamo che una tale matrice è diagonalizzabile; questo significa che se orientiamo il sistema di riferimento  $xyz$  secondo direzioni appropriate (le direzioni degli autovettori ortogonali di  $\mathbf{I}$ ), il tensore di inerzia diventa una matrice diagonale. Dal punto di vista fisico questo significa che esistono tre direzioni dell'asse di rotazione per cui  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ ; essi sono detti *assi principali di inerzia*.

Si potrebbe ulteriormente dimostrare che, utilizzando il tensore di inerzia, l'energia cinetica di rotazione di un corpo rigido si scrive come:

$$E_C = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \quad (\text{A-5})$$