Urto elastico tra due punti materiali – trattazione completa (caso unidimensionale)

Nel caso di urto elastico tra due punti materiali, di massa m_1 e m_2, si conservano contemporaneamente sia la quantità di moto **P** del sistema formato dai due punti materiali che l'energia cinetica del sistema E_k.
Nel caso unidimensionale i due punti materiali si muovono prima e dopo l'urto elastico lungo la stessa direzione (asse x). Prendiamo quindi un sistema di riferimento cartesiano fisso inerziale con l'asse x coincidente con la direzione d'urto (O, x)

$$\begin{cases} \vec{P}_{x,\text{iniziale}} = \vec{P}_{x,\text{finale}} \\ E_{k,\text{iniziale}} = E_{k,\text{finale}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{x,\text{iniziale}}\hat{u}_x = P_{x,\text{finale}}\hat{u}_x \\ E_{k,\text{iniziale}} = E_{k,\text{finale}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_{x,\text{iniziale}} = P_{x,\text{finale}} \\ E_{k,\text{iniziale}} = E_{k,\text{finale}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1,\text{iniziale}} + m_2 v_{2,\text{iniziale}} = m_1 v_{1,\text{finale}} + m_2 v_{2,\text{finale}} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{iniziale}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{iniziale}}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,\text{finale}}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,\text{finale}}^2 \end{cases}$$

avendo indicato con $v_{1,\text{iniziale}}$, $v_{2,\text{iniziale}}$, $v_{1,\text{finale}}$ e $v_{2,\text{finale}}$ le componenti scalari algebriche delle velocità iniziali e finali delle due masse (direzione asse x)

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1\left(v_{1,\text{iniziale}} - v_{1,\text{finale}}\right) = m_2\left(v_{2,\text{finale}} - v_{2,\text{iniziale}}\right) \\ m_1\left(v_{1,\text{iniziale}}^2 - v_{1,\text{finale}}^2\right) = m_2\left(v_{2,\text{finale}}^2 - v_{2,\text{iniziale}}^2\right) \end{cases}$$

dividendo termine a termine:

$$\frac{m_1\left(v_{1,\text{iniziale}} - v_{1,\text{finale}}\right)}{m_1\left(v_{1,\text{iniziale}}^2 - v_{1,\text{finale}}^2\right)} = \frac{m_2\left(v_{2,\text{finale}} - v_{2,\text{iniziale}}\right)}{m_2\left(v_{2,\text{finale}}^2 - v_{2,\text{iniziale}}^2\right)} \Rightarrow \frac{\left(v_{1,\text{iniziale}} - v_{1,\text{finale}}\right)}{\left(v_{1,\text{iniziale}} + v_{1,\text{finale}}\right)\left(v_{1,\text{iniziale}} - v_{1,\text{finale}}\right)} = \frac{\left(v_{2,\text{finale}} - v_{2,\text{iniziale}}\right)}{\left(v_{2,\text{finale}} + v_{2,\text{iniziale}}\right)\left(v_{2,\text{finale}} - v_{2,\text{iniziale}}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(v_{1,\text{iniziale}} + v_{1,\text{finale}}\right)} = \frac{1}{\left(v_{2,\text{finale}} + v_{2,\text{iniziale}}\right)} \Rightarrow \left(v_{1,\text{iniziale}} + v_{1,\text{finale}}\right) = \left(v_{2,\text{finale}} + v_{2,\text{iniziale}}\right) \Rightarrow v_{1,\text{finale}} = v_{2,\text{finale}} + v_{2,\text{iniziale}} - v_{1,\text{iniziale}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1,\text{iniziale}} + m_2 v_{2,\text{iniziale}} = m_1\left(v_{2,\text{finale}} + v_{2,\text{iniziale}} - v_{1,\text{iniziale}}\right) + m_2 v_{2,\text{finale}} \\ v_{1,\text{finale}} = v_{2,\text{finale}} + v_{2,\text{iniziale}} - v_{1,\text{iniziale}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{2,\text{finale}} = \dfrac{m_1 v_{1,\text{iniziale}} + m_2 v_{2,\text{iniziale}} - m_1(v_{2,\text{iniziale}} - v_{1,\text{iniziale}})}{m_1 + m_2} = \dfrac{2m_1 v_{1,\text{iniziale}} + (m_2 - m_1)v_{2,\text{iniziale}}}{m_1 + m_2} \\ v_{1,\text{finale}} = v_{2,\text{finale}} + v_{2,\text{iniziale}} - v_{1,\text{iniziale}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{2,\text{finale}} = \dfrac{2m_1 v_{1,\text{iniziale}} + (m_2 - m_1)v_{2,\text{iniziale}}}{m_1 + m_2} \\ v_{1,\text{finale}} = \dfrac{2m_1 v_{1,\text{iniziale}} + (m_2 - m_1)v_{2,\text{iniziale}}}{m_1 + m_2} + v_{2,\text{iniziale}} - v_{1,\text{iniziale}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{2,\text{finale}} = \dfrac{2m_1 v_{1,\text{iniziale}} + (m_2 - m_1)v_{2,\text{iniziale}}}{m_1 + m_2} \\ v_{1,\text{finale}} == \dfrac{2m_1 v_{1,\text{iniziale}} + (m_2 - m_1)v_{2,\text{iniziale}} + (m_1 + m_2)(v_{2,\text{iniziale}} - v_{1,\text{iniziale}})}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{2,finale} = \dfrac{2m_1 v_{1,iniziale} + (m_2 - m_1) v_{2,iniziale}}{m_1 + m_2} \\ v_{1,finale} == \dfrac{2m_1 v_{1,iniziale} + (m_2 - m_1) v_{2,iniziale} + (m_1 + m_2) v_{2,iniziale} - (m_1 + m_2) v_{1,iniziale}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{2,finale} = \dfrac{2m_1 v_{1,iniziale} + (m_2 - m_1) v_{2,iniziale}}{m_1 + m_2} \\ v_{1,finale} == \dfrac{2m_1 v_{1,iniziale} + 2m_2 v_{2,iniziale} - (m_1 + m_2) v_{1,iniziale}}{m_1 + m_2} = \dfrac{(m_1 - m_2) v_{1,iniziale} + 2m_2 v_{2,iniziale}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

N.B. $v_{1,iniziale}$, $v_{2,iniziale}$, $v_{1,finale}$ e $v_{2,finale}$ sono le componenti scalari **algebriche** delle velocità iniziali e finali delle due masse (direzione asse x)

$\Downarrow$

I segni di tali componenti dipendono dal verso dell'asse x preso

$\Downarrow$

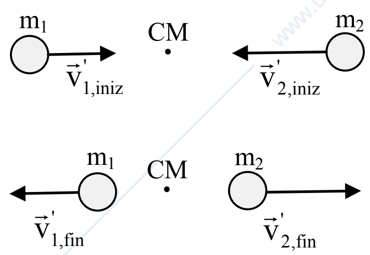
Ottenute le componenti scalari algebriche delle velocità finali (dopo l'urto) delle due masse, per ciascuna di esse vale la stessa regola:

$\Downarrow$

se è positiva vuol dire che la velocità finale è concorde al verso dell'asse x scelto, se negativa è discorde al verso dell'asse x scelto, ovviamente in questo caso è necessario indicare correttamente il segno delle due velocità iniziali (in base al verso dell'asse scelto)

_._._._._._

Consideriamo ora l'urto nel sistema di riferimento del centro di massa (CM). Rispetto a tale sistema di riferimento le due masse prima dell'urto si avvicinano al CM e dopo l'urto si allontanano



In tale sistema (CM, x') sappiamo che $\vec{P}' = m_{tot}\vec{v}'_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{P}'_{iniz} = \vec{P}'_{fin} = 0 \Rightarrow$ $m_1\vec{v}'_{1,iniz} + m_2\vec{v}'_{2,iniz} = m_1\vec{v}'_{1,ifin} + m_2\vec{v}'_{2,fin} = 0$, da cui, proiettando lungo l'asse x':

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 v'_{1,iniz} + m_2 v'_{2,iniz} = m_1 v'_{1,ifin} + m_2 v'_{2,fin} = 0 \\ \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,iniz} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,inizi} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,fin} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 v'_{1,iniz} + m_2 v'_{2,iniz} = 0 \\ m_1 v'_{1,ifin} + m_2 v'_{2,fin} = 0 \\ \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,iniz} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,iniz} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,fin} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 v'_{1,iniz} = -m_2 v'_{2,iniz} \\ m_1 v'_{1,fin} = -m_2 v'_{2,fin} \\ m_1 v'^2_{1,iniz} + m_2 v'^2_{2,iniz} = m_1 v'^2_{1,fin} + m_2 v'^2_{2,fin} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_{2,iniz} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1,iniz} \\ v'_{2,fin} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1,fin} \\ m_1 v'^2_{1,iniz} + m_2 v'^2_{2,iniz} = m_1 v'^2_{1,fin} + m_2 v'^2_{2,fin} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_{2,iniz} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1,iniz} \\ v'_{2,fin} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1,fin} \\ m_1 v'^2_{1,iniz} + m_2 \left(-\frac{m_1}{m_2} v'_{1,iniz} \right)^2 = m_1 v'^2_{1,fin} + m_2 \left(-\frac{m_1}{m_2} v'_{1,fin} \right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_{2,iniz} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1,iniz} \\ v'_{2,fin} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1,fin} \\ m_1 v'^2_{1,iniz} + \frac{m_1^2}{m_2} \left(v'_{1,iniz} \right)^2 = m_1 v'^2_{1,fin} + \frac{m_1^2}{m_2} \left(v'_{1,fin} \right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v'_{2,iniz} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1,iniz} \\ v'_{2,fin} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1,fin} \\ \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) v'^2_{1,iniz} = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) v'^2_{1,fin} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_{2,iniz} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1,iniz} \\ v'_{2,fin} = -\frac{m_1}{m_2} v'_{1,fin} \\ v'^2_{1,iniz} = v'^2_{1,fin} \Rightarrow v'_{1,fin} = -v'_{1,iniz} \Rightarrow v'_{2,fin} = -v'_{2,iniz} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nel sistema di riferimento del CM le velocità di ciascuna massa restano le stesse in modulo e direzione, cambiano solo di verso