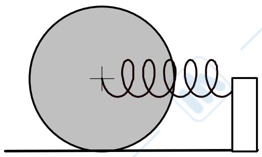
13/2/2012
ore 13:00

FISICA (terzo appello)

Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Torricelli

1)
a) Si illustrino i fenomeni di attrito, con particolare riferimento all'attrito radente.
b) In un intervallo di tempo Δt un'automobile, inizialmente ferma, percorrere con accelerazione tangenziale costante una semicirconferenza di raggio R su una strada piana orizzontale. Si calcoli il minimo coefficiente d'attrito statico tra pneumatici e strada che consente tale moto.

2)
a) Si dica sotto quali condizioni in un fenomeno d'urto tra due corpi puntiformi si conserva la quantità di moto totale.
b) Un corpo in moto con velocità **v** urta frontalmente un secondo corpo di uguale massa inizialmente fermo. Si dimostri che la massima perdita di energia cinetica del sistema formato dai due corpi si verifica quando i due corpi si muovono dopo l'urto con la stessa velocità (urto perfettamente anelastico).

3)

a) Si enunci la seconda equazione cardinale della dinamica per un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse con direzione fissa.
b) Una ruota omogenea di massa M è appoggiata su un piano orizzontale scabro. L'asse della ruota è collegato ad un punto fisso tramite una molla di lunghezza a riposo l_0 e costante elastica k. Assumendo che la ruota non scivoli, si determini la frequenza di oscillazione della ruota.

4)
a) Si enunci il primo principio della termodinamica definendo precisamente tutti i simboli e le grandezze fisiche utilizzate.
b) Si consideri una trasformazione di un sistema termodinamico tra due stati di equilibrio e si dica, giustificando le risposte, quali delle seguenti affermazioni sono corrette.
i) Se il sistema assorbe calore, la sua energia interna aumenta.
ii) Se il sistema assorbe calore, la sua temperatura aumenta.
iii) Se il sistema è adiabatico, la sua energia interna è costante.

5)
a) Si definisca il rendimento di una macchina termica.
b) Una macchina termodinamica compie un ciclo reversibile scambiando le quantità di calore Q_1, Q_2 e Q_3 con tre sorgenti a temperature $T_1 = 800$ K, $T_2 = 400$ K e $T_3 = 300$ K, rispettivamente. Sapendo che $Q_1 = 2\ Q_2$, si calcoli il rendimento della macchina.

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA
- ***FIRMARE** l'elaborato*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate*

1.

a) Vedi appunti di teoria

b)

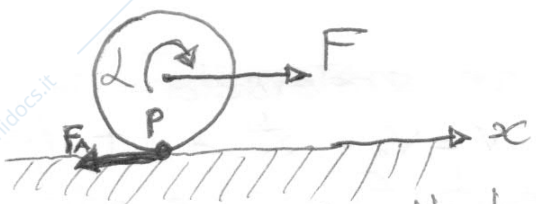
Affinchè l'auto possa compiere l'intero arco di circonferenza considerato dovrà essere soggetta ad una forza centripeta. Tale forza è rappresentata dalla forza di attrito statico, offerta dalla strada, diretta lungo la normale alla traiettoria.
Affinchè l'attrito statico possa eguagliare la forza centripeta necessaria a compiere il moto considerato dovrà essere verificata la condizione:

$$F_c = m\frac{v^2}{R} \leq \mu_s m g \quad \forall t$$

Poichè il moto avviene con accelerazione tangenziale a costante, sarà $v = v_0 + at = at$ ($v_0 = 0$ poichè l'auto è inizialmente ferma) e quindi $\pi R = \frac{1}{2} a \Delta t^2$, da cui $a = 2\pi R / \Delta t^2$.
Osserviamo che la massima velocità si raggiunge al termine della traiettoria, cioè per $t = \Delta t$ e vale $v_{max} = \frac{2\pi R}{\Delta t}$. Sostituendo tale valore nella disequazione precedente abbiamo:

$$\mu_{s\,min} = \frac{v_{max}^2}{Rg} = \frac{4\pi^2 R}{g\,\Delta t^2}$$

Nota Si noti che il coefficiente di attrito così trovato garantisce che l'auto non devii dalla traiettoria circolare, ma non garantisce che il moto delle ruote si compia senza strisciamento.
Ricordiamo infatti che nel moto rotatorio di una ruota su di un piano è l'attrito statico radente tra il piano e il punto di contatto della ruota a consentire il rotolamento e, in condizioni di rotolamento puro tale attrito assumerà un valore che dipende dalle condizioni con cui le forze attive agiscono sulla ruota stessa.
Ad esempio, consideriamo una ruota piena omogenea di massa m e raggio r soggetta ad una forza F applicata al suo centro di massa:



In assenza di attrito il punto P si muoverebbe nella direzione x positiva se $\vec{F} = F\hat{u}_x$, quindi la forza di attrito (statica) in P sarà diretta lungo x negativo (si oppone al moto di P e infatti sappiamo che se il corpo rotola senza strisciare P è istantaneamente fermo).
Se richiediamo che il moto avvenga senza strisciamento dovrà essere $a = \alpha R$ l'accelerazione del centro di massa della ruota.

Dalla I e II equazione cardinale della dinamica per il corpo rigido abbiamo:

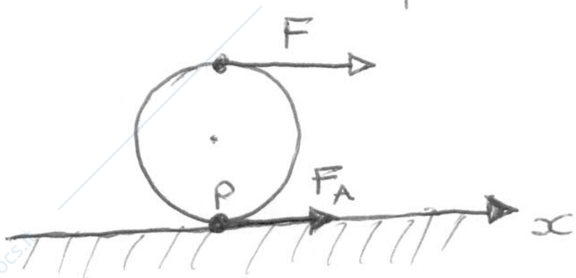
$$\begin{cases} F - F_A = m a \\ F r = I_p \alpha \quad , \quad \text{con } I_p = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2 = \frac{3}{2} m r^2 \\ a = \alpha r \end{cases}$$

Risolvendo il sistema troviamo

$$a = \frac{F r^2}{I_p}$$

$$F_A = \frac{1}{3} F$$

Si noti che qualora la stessa forza attiva $\vec{F}$ venisse applicata in un punto diverso dal centro di massa la forza d'attrito F_A cambierebbe, infatti ad esempio:



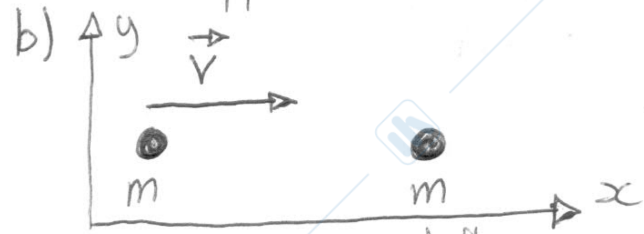
È evidente che in assenza di attrito il punto P si muoverebbe con velocità diretta nel verso di x negativo (si dimostri per esercizio questa evidenza), quindi la forza di attrito è nel verso di x positivo, al contrario del caso precedente! Quindi l'attrito statico favorisce il moto traslatorio (moto del centro di massa) invece di ostacolarlo!

Procedendo come nel caso precedente troviamo che $a = \frac{2 F r^2}{I_p}$ e $F_A = \frac{1}{3} F$.

2.

a) Vedi appunti di teoria

b)



Conservazione della quantità di moto:

$$\vec{p}_i = m v \hat{u}_x = (m v_{1x} + m v_{2x})\hat{u}_x + (m v_{1y} + m v_{2y})\hat{u}_y = \vec{p}_F$$

$$\Rightarrow v = v_{1x} + v_{2x}$$

$$v_{1y} + v_{2y} = 0$$

Variazione dell'energia cinetica nell'urto:

$$E_{c,i} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{c,F} = \frac{1}{2} m (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2} m (v_{2x}^2 + v_{2y}^2)$$

$$\Delta E_c = E_{c,F} - E_{c,i} = \frac{1}{2} m (v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + v_{1y}^2 + v_{2y}^2 - v^2)$$

sostituendo le due equazioni trovate dalla conservazione della quantità di moto abbiamo:

$$\Delta E_c = m (v_{1y}^2 - v_{1x} v_{2x}) = m v_{1y}^2 - m v_{1x}(v - v_{1x})$$

Tale variazione è massima, nell'ipotesi di urto frontale assunta nel testo del quesito (cioè $v_{1y} = 0$, $v_{2y} = 0$), quando si ha

$$\frac{d}{dv_{1x}} \Delta E_c = 0 \Rightarrow \cancel{2} v_{1x} = v = \cancel{v_{1x}} + v_{2x}$$

Quindi ΔE_c è massima (in modulo) quando $v_{1x} = v_{2x}$ cioè quando dopo l'urto i corpi si muovono con la stessa velocità. Al medesimo risultato si poteva giungere anche applicando il II teorema di König:

$$E_c = E_c' + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

ove E_c è l'energia cinetica di un generico sistema di punti materiali in un SdR inerziale, E_c' è l'energia cinetica di tale sistema nel SdR C del centro di massa e V_{CM} e M sono rispettivamente la velocità del centro di massa e la massa totale del sistema di punti.

Poichè M e V_{CM} sono costanti in un urto (conservazione della massa e della quantità di moto) $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ è la minima energia cinetica E_c che un sistema di punti materiali può possedere dopo l'urto, e corrisponde ad avere $E_c'=0$, cioè $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i(v_i')^2$ con $\vec{v}_i'=\vec{v}_i-\vec{v}_{CM}$.

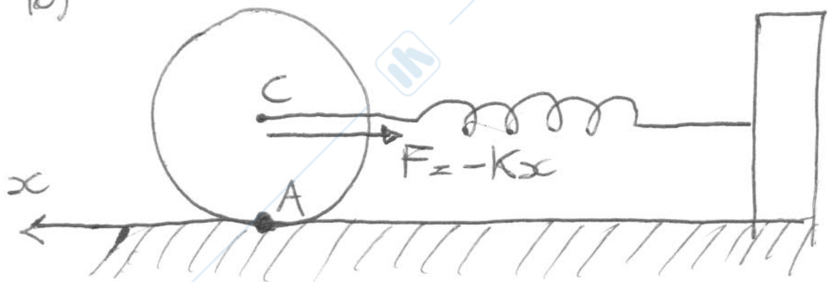
Perchè E_c' si annulli occorre quindi che si annullino tutti i v_i' e ciò corrisponde ad avere che tutti i punti materiali del sistema si muovono con la velocità del centro di massa, quindi tutti con la medesima velocità.

Si comprende quindi che in un urto la massima diminuzione dell'energia cinetica del sistema, che porta al minimo valore consentito di $E_c=\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$, corrisponde ad un urto completamente anelastico.

3.

a) Vedi appunti di teoria

b)



$I_c = \frac{1}{2}R^2M$ momento d'inerzia della ruota rispetto al CM.

$I_A = I_c + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$ (teorema di Steiner)

Eq. cardinale (II) per il corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso:

$$\tau_A = I_A \alpha$$

$$\tau_A = -F_x R = -KxR$$

Osservo che $dx = R\,d\vartheta$, così $x = R\vartheta$ essendo x la coordinata del CM e ϑ l'angolo di rotazione della ruota rispetto alla posizione di equilibrio (in cui la molla ha lunghezza pari a l_0).

$$-K\cancel{R^2}\vartheta = \frac{3}{2}M\cancel{R^2}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{2K}{3M}\vartheta = 0$$

Equazione del moto armonico con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{2K}{3M}}$$

La frequenza delle oscillazioni della ruota sarà

$$\nu = \omega/2\pi = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{3M}}$$

4.

a) Vedi appunti di teoria

b) Ricordando il I principio della termodinamica, $Q = \mathcal{L} + \Delta U$, abbiamo:

i) Falso. Infatti il calore assorbito in generale viene in parte trasformato anche in lavoro, e ad esempio, in una trasformazione isoterma tutto il calore assorbito è trasformato in lavoro se a compiere la trasformazione è un gas ideale.

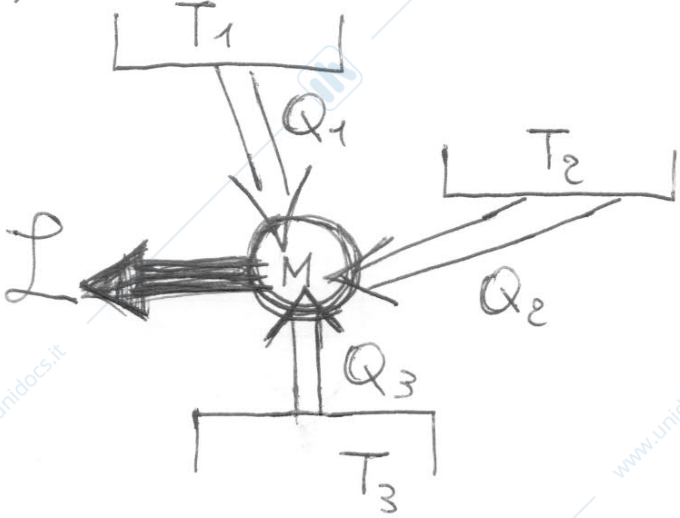
ii) Falso. Analogamente al caso precedente, è possibile compiere trasformazioni di un gas ideale che implicano assorbimento di calore senza variazioni di temperatura da parte del sistema. Altro esempio negativo sono le trasf. di .

iii) Falso. Per un sistema adiabatico $Q=0$, quindi possiamo avere in generale variazioni della energia interna del sistema se esso compie o subisce lavoro: $\Delta U = -\mathcal{L}$.

5.

a) Vedi appunti di teoria

b)



$Q_1 = 2Q_2$

Poichè la macchina compie un ciclo reversibile, la disuguaglianza di Clausius fornisce la seguente equazione:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$$

Tale equazione, in sistema con la precedente consente di esprimere Q_3 in funzione di Q_1 o di Q_2, o, meglio ancora, in funzione di $Q_1 + Q_2$, essendo $Q_1 + Q_2 = Q_{ass}$ il calore totale assorbito dalla macchina, quindi Q_3 sarà un calore ceduto (< 0):

$$\frac{2Q_2}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{Q_3}{T_3} \qquad (T_1 = 2T_2)$$

$$Q_3 = -T_3\left(\frac{2}{T_1}Q_2 + \frac{1}{T_2}Q_2\right) = -\frac{T_3}{T_2}\left(Q_2 + Q_2\right)$$

Il calore ceduto $Q_{ced} = -Q_3 = \frac{2T_3}{T_2} Q_2 = \frac{3}{2} Q_2$

Il rendimento della macchina risulta quindi

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{ass}} = \frac{Q_{ass} - Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{ass}} =$$

$$= 1 - \frac{3/2\, Q_2}{3 Q_2} = 1 - \frac{1}{2} = 50\%$$