

Oscillazioni

Il problema dell'oscillatore armonico risulta importante per varie ragioni. In primo luogo ogni problema in cui intervengono vibrazioni meccaniche si riduce a quello dell'oscillatore armonico, per piccole ampiezze di vibrazione, o ad una combinazione di tali vibrazioni. Inoltre ogni moto periodico può essere espresso come una serie di termini funzioni armoniche del tempo (serie di Fourier) analoghe alle soluzioni del problema dell'oscillatore armonico.

In secondo luogo equazioni del tipo dell'oscillatore armonico si incontrano in molti problemi fisici in acustica, in ottica, in meccanica, nei circuiti elettrici ed anche in fisica atomica. L'oscillatore armonico presenta le caratteristiche comuni a molti sistemi fisici.

Equazione differenziale del moto armonico:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} + \omega^2 \mathbf{x}(t) = 0$$

Equazione del secondo ordine, lineare, a coefficienti costanti (1 e ω^2), omogenea (termine noto nullo).

$\mathbf{x}(t)$ è una funzione la cui derivata seconda è la funzione stessa cambiata di segno, a meno del fattore costante ω^2 .

dove:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

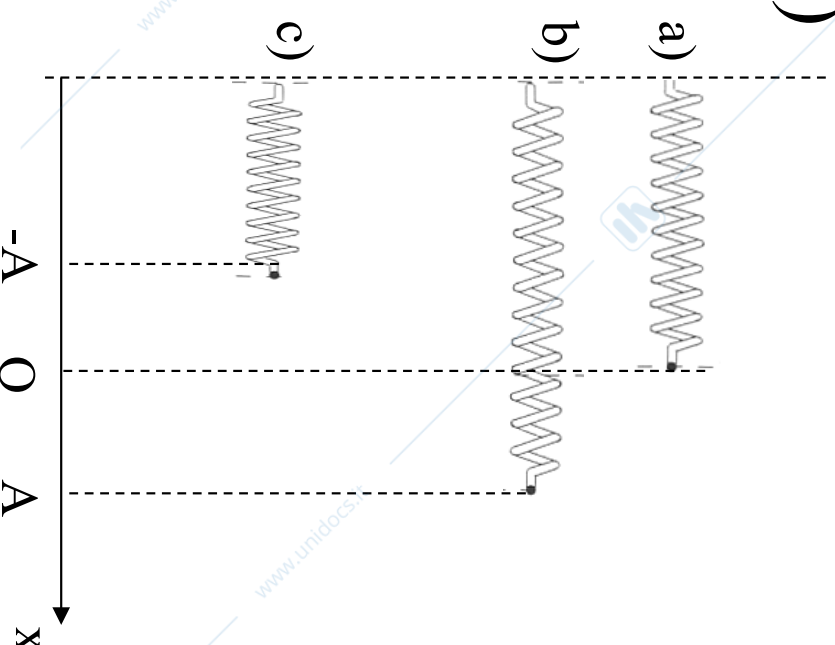
$(\omega t + \phi)$ = fase del moto

A = ampiezza del moto

ω = pulsazione [rad/s]

ϕ = costante di fase

La pulsazione e la costante di fase sono scelti per tenere conto di ogni combinazione lineare di seno e coseno.



Periodo del moto: $T=2\pi/\omega$ [s]

Frequenza (n. di oscillazione nell'unità di tempo) : $\nu=1/T=\omega/2\pi$ [Hz]

T e ν sono indipendenti dall'ampiezza del moto (A)

Nel caso di una massa agganciata ad una molla:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \Rightarrow \sum_i F_i = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

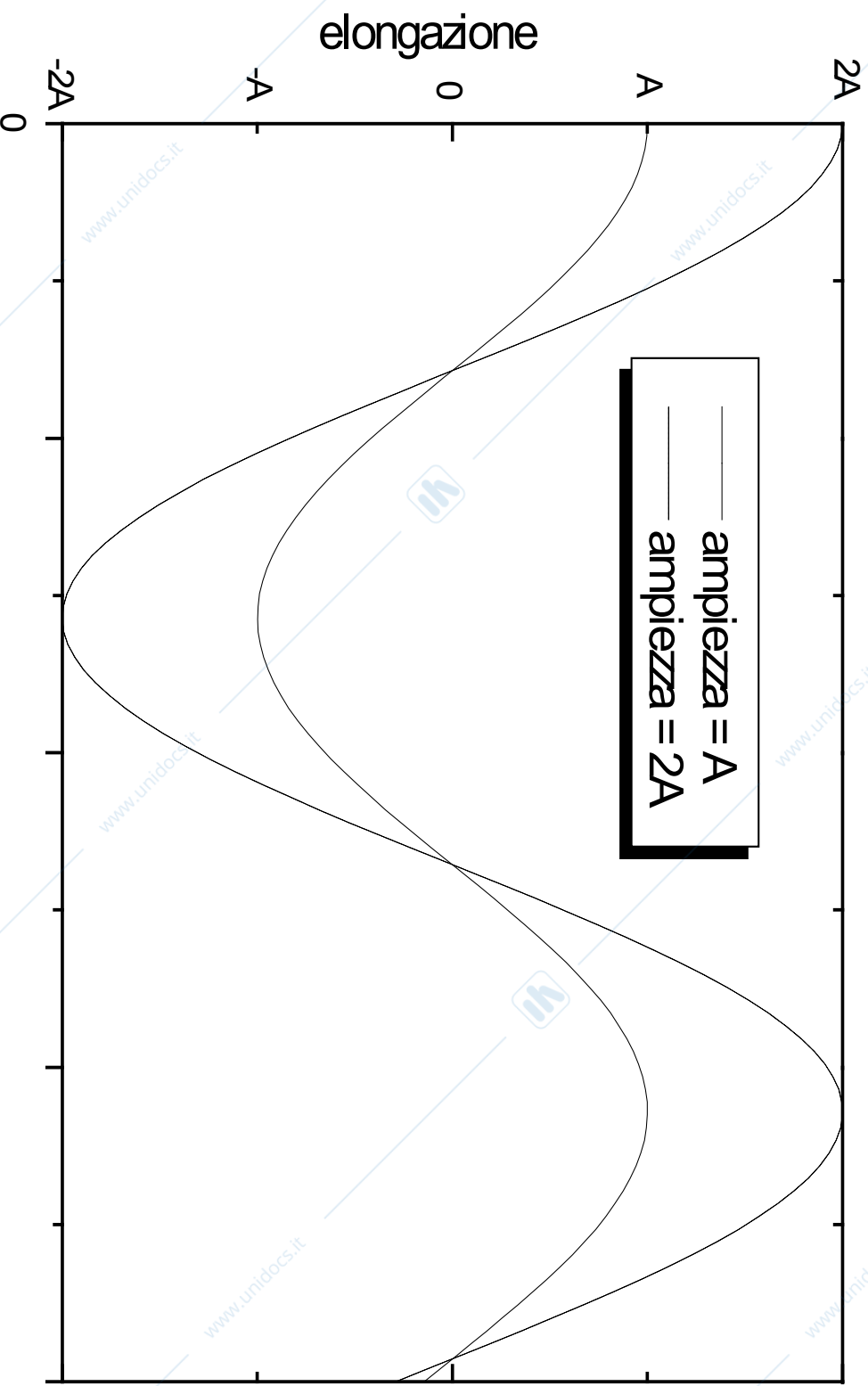
Proiettando lungo la direzione x del moto

Nel caso del pendolo semplice:

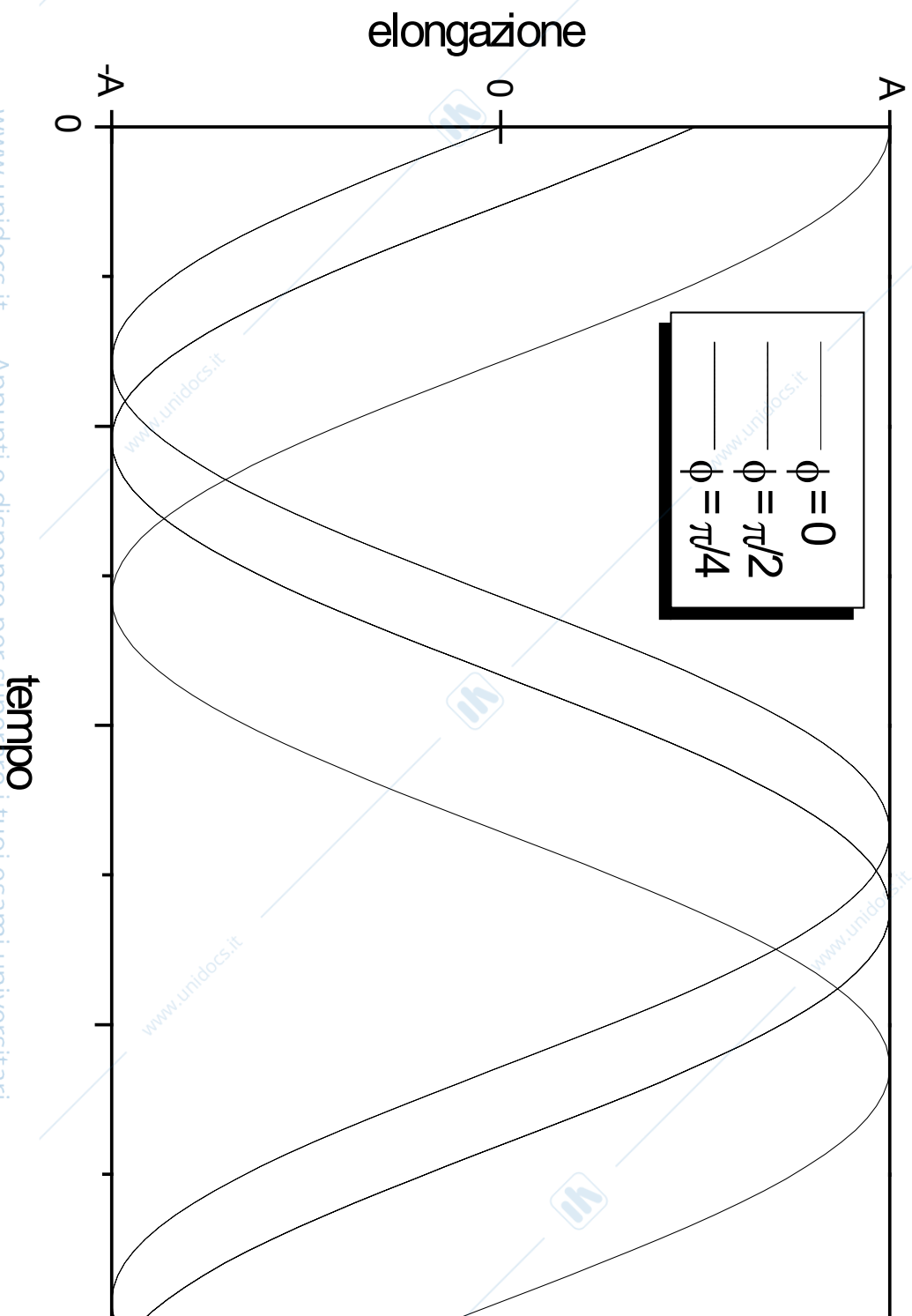
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

La costante A rappresenta il massimo spostamento dalla posizione di equilibrio. Poiché A non è determinata direttamente dall'equazione differenziale dell'oscillatore armonico ma dalle sue condizioni al contorno, sono possibili moti di ampiezze differenti, ma tutti con lo stesso periodo e frequenza

⇒ la frequenza di un moto armonico semplice è indipendente dall'ampiezza del moto.



Due moti possono avere la stessa ampiezza e frequenza, ma costanti di fasi ϕ diverse. Quest'ultime determinano praticamente l'elongazione iniziale $x(t=0)=A \cdot \cos(\phi)$. Per esempio se $\phi = 0$, nell'istante iniziale del moto ($t=0$) l'elongazione è uguale ad A , se invece $\phi = \pi/2$ nell'istante iniziale del moto l'elongazione risulta nulla.

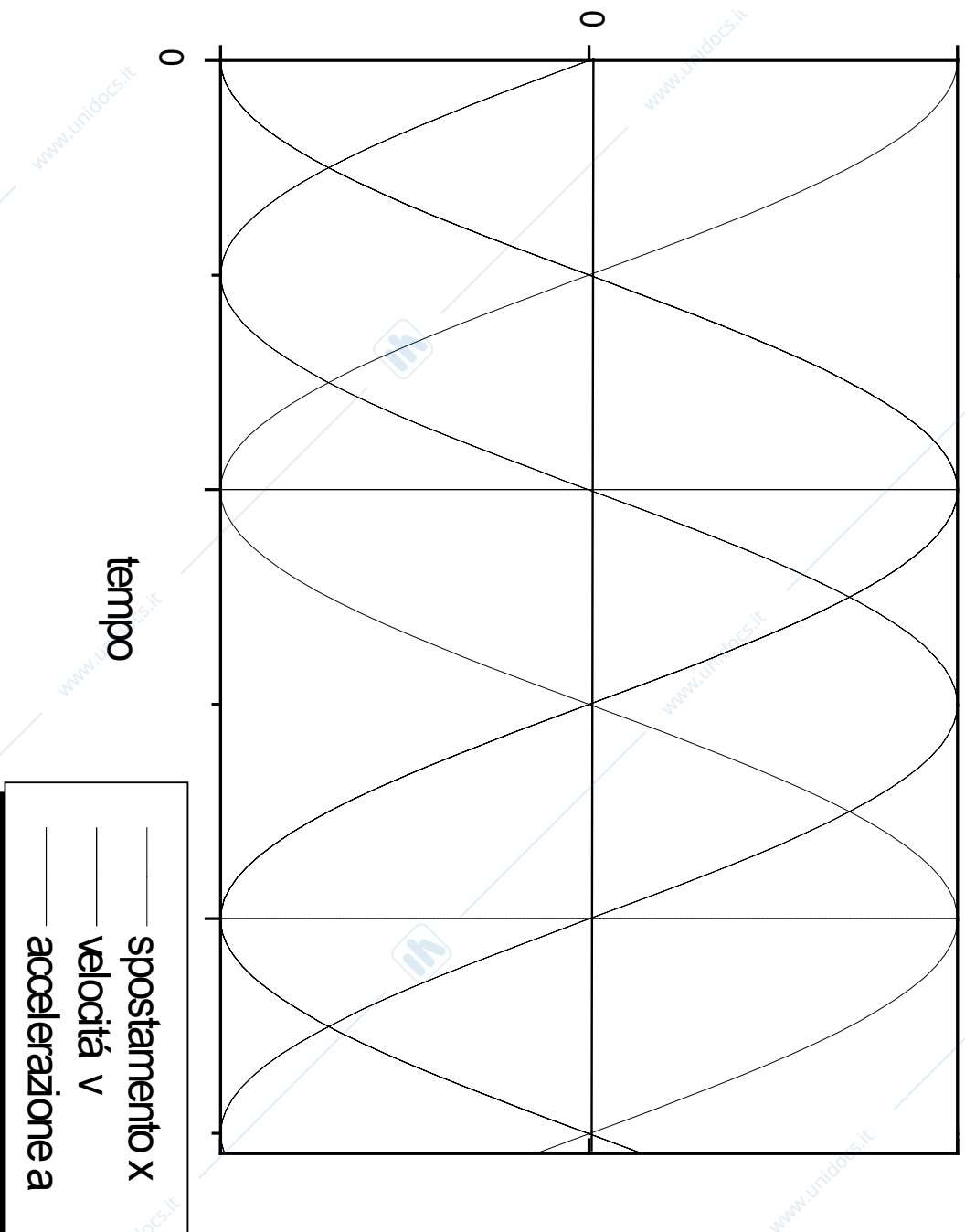


Riassumendo, l'ampiezza A e la costante di fase ϕ sono determinate dalla posizione e dalla velocità iniziali della particella oscillante; queste due condizioni iniziali individuano A e ϕ in modo univoco. Una volta che il moto è iniziato, la particella continuerà ad oscillare con ampiezza, costante di fase e frequenza invariate, a meno che altre forze disturbino il sistema.

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$



Quando l'elongazione è massima, v risulta nulla, dovendo invertire la sua direzione; l'accelerazione in questo istante ha il massimo valore, come pure la forza di richiamo ed è diretta in senso opposto allo spostamento. Quando $x=0$, v è massima e l'accelerazione è nulla. La velocità aumenta quando la particella si muove verso la posizione di equilibrio, per poi diminuire quando se ne allontana.

Energia dell'oscillatore armonico

Consideriamo un punto che oscilla sotto l'azione di una forza elastica

⇒ sul sistema non agisce alcuna forza dissipativa,

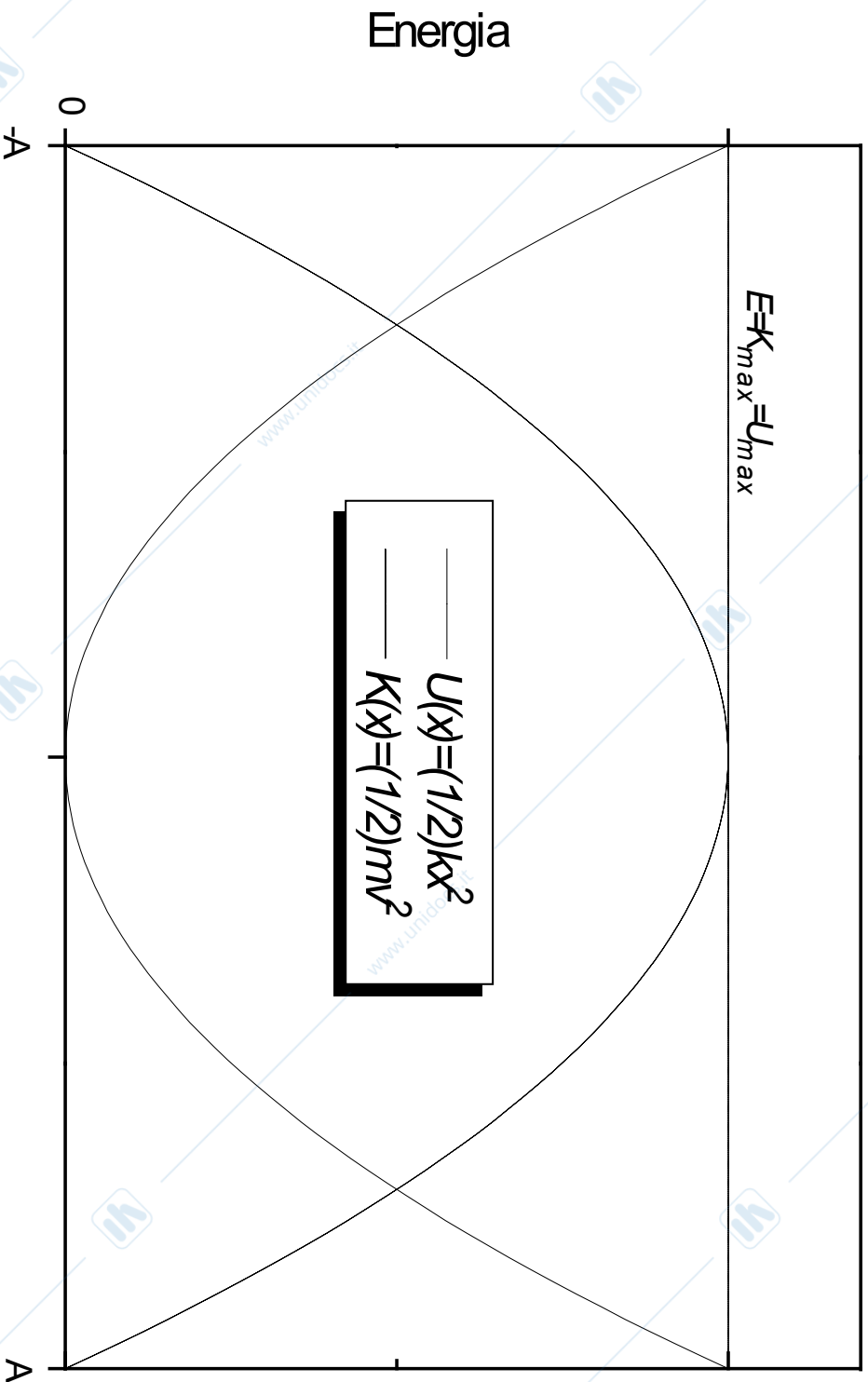
⇒ l'energia meccanica totale E_m si conserva.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Quando l'elongazione è massima $E_k=0$, ma $E_p=(1/2)m\omega^2 A^2$; invece nella posizione di equilibrio $E_p=0$, ma $E_k=(1/2)m\omega^2 A^2$. Nelle posizioni intermedie l'energia è in parte cinetica e in parte potenziale, ma la somma delle due vale sempre $(1/2)m\omega^2 A^2$.

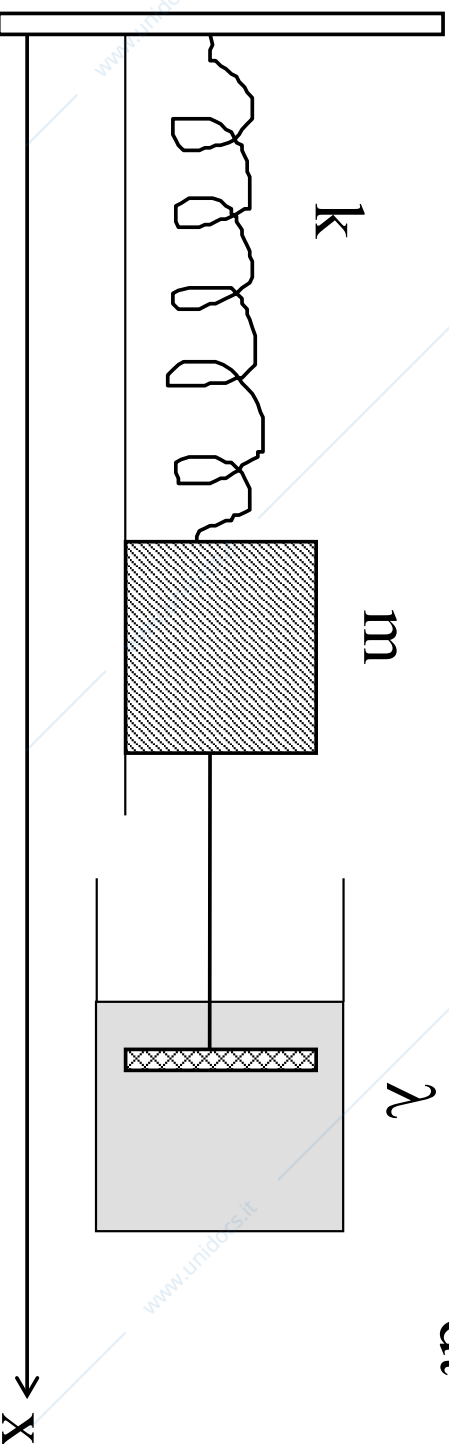


$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 (\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa

Consideriamo ora il moto armonico di un sistema soggetto anche a forze dissipative (oscillatore armonico reale). Per esempio l'ampiezza delle oscillazioni a causa dell'attrito diminuisce gradualmente fino ad annullarsi; il moto è detto smorzato dall'attrito e si chiama armonico smorzato. In molti casi la forza d'attrito risulta proporzionale alla velocità del corpo e diretta in senso opposto ($\vec{F} = -\lambda \vec{v}$, forza di tipo viscoso). Un esempio di oscillatore smorzato è mostrato in figura. A tale schema si possono ricondurre sistemi meccanici o elettronici di varia natura.

Alla massa m è' attaccato un disco immerso in un fluido viscoso che esercita una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \frac{dx}{dt} \hat{u}_x$



L'equazione del moto dell'oscillatore armonico semplice smorzato si ottiene

da $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$, dove $\sum_i \vec{F}_i$ è la somma della forza di richiamo $-kx\hat{u}_x$ e della forza di smorzamento $\vec{F} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\frac{dx}{dt}\hat{u}_x$ (con λ costante positiva [λ]=kg/s)

Proiettando lungo l'asse x del moto $\Rightarrow \sum_i F_i = ma = -kx - \lambda\frac{dx}{dt}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Se definiamo $\gamma = \frac{\lambda}{2m}$

coefficiente di smorzamento [γ]=1/s

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

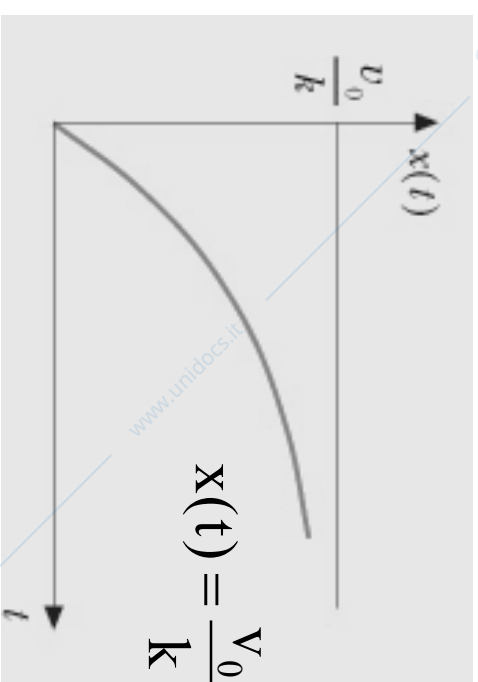
pulsazione propria del sistema [ω_0]=1/s

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0$$

Equazione differenziale

dell'oscillatore armonico smorzato (eq. differenziale lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti, omogenea)

Poiché abbiamo visto che la forza di attrito viscoso porta ad un moto rettilineo smorzato esponenzialmente nel tempo:



si cerca una soluzione del tipo: $x(t) = \exp(\alpha t)$

$$\frac{d^2(e^{\alpha t})}{dt^2} + 2\gamma \frac{d(e^{\alpha t})}{dt} + \omega_0^2(e^{\alpha t}) = 0 \quad e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2) = 0$$

Il prodotto = 0 se parentesi è nulla (esponenziale sempre diverso da zero). Ho equazioni di 2° grado in α con soluzioni

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Ho tre casi possibili a cui corrispondono soluzioni diverse, che dipendono dalle relazioni tra i parametri fisici dell'oscillatore

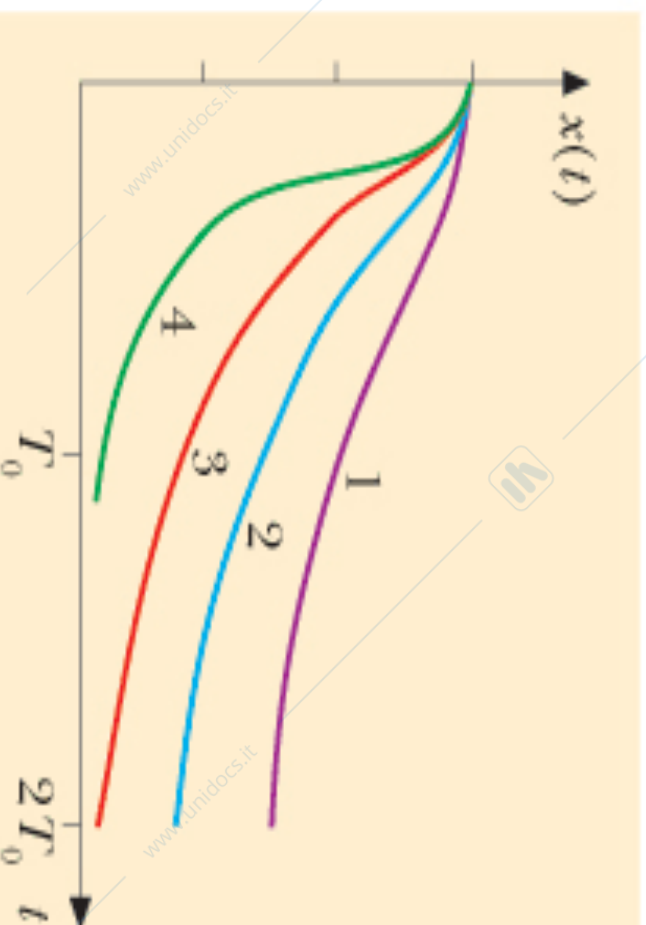
Smorzamento forte e smorzamento critico

Si può dimostrare che se lo smorzamento è forte ($\gamma^2 > \omega_0^2$, $\lambda^2 > 4mk$) la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}$$

dove $\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ $\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Se lo smorzamento è critico ($\gamma^2 = \omega_0^2$, $\lambda^2 = 4mk$) la soluzione dell'equazione differenziale è $x(t) = e^{-\gamma t} (At + B)$

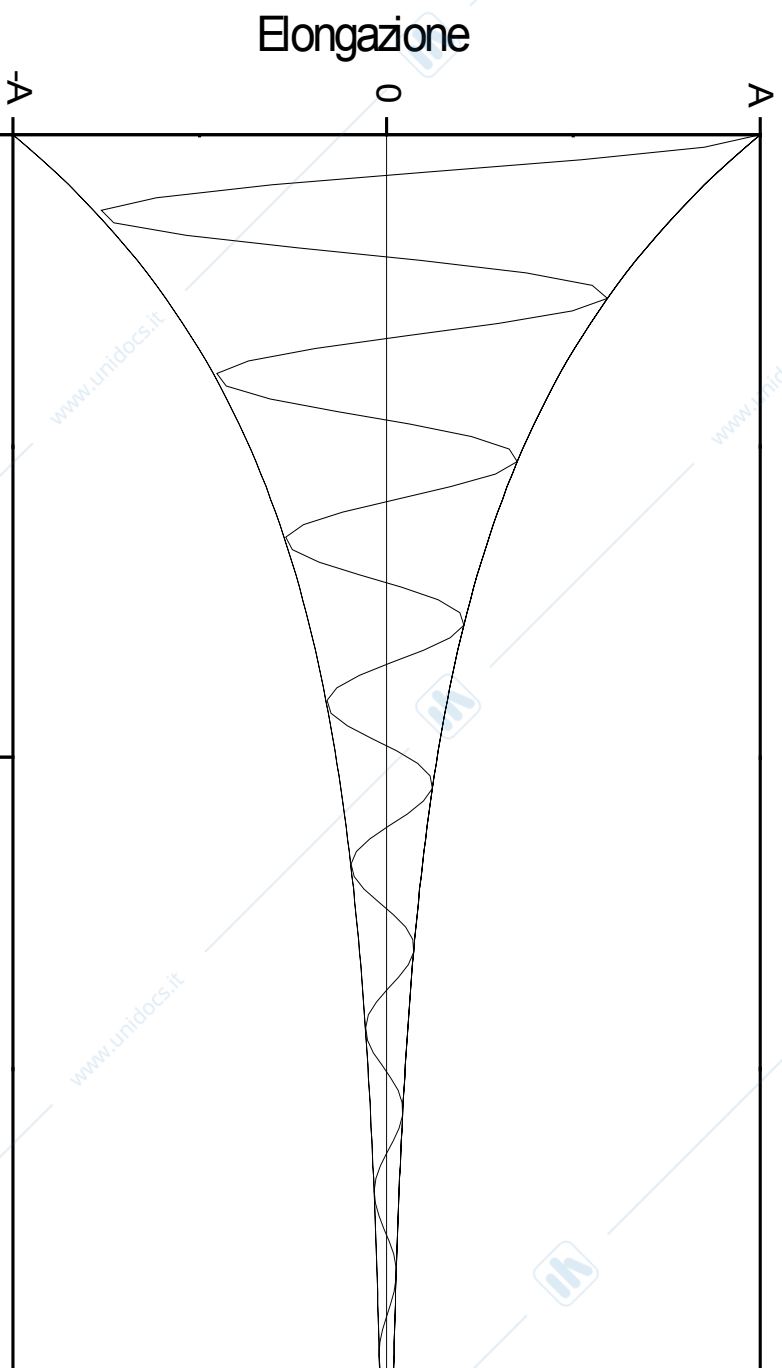


Smorzamento debole

Si può dimostrare che se lo smorzamento è debole ($\gamma^2 < \omega_0^2$, $\lambda^2 < 4mk$) la soluzione dell'equazione differenziale è:

$$x = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \phi)$$

$$\text{dove } \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



Oscillatore armonico forzato e risonanza

Quando si sposta il punto dalla posizione di equilibrio esso tende a ritornarci sotto l'azione di una forza di richiamo.

⇒ se non c'è attrito si ha una oscillazione indefinita

⇒ se c'è attrito si ha un'oscillazione che si esaurisce in un certo tempo
Consideriamo quest'ultimo caso ed applichiamo una forza oscillante esterna $\vec{F} = F_0 \text{sen}(\omega''t) \hat{u}_x$

L'equazione del moto dell'oscillatore armonico forzato si ottiene dalla

$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$ dove $\sum_i \vec{F}_i$ è la somma della forza di richiamo $-kx\hat{u}_x$, della forza di smorzamento $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ e della forza oscillante esterna.

$$\sum_i F_i = ma = -kx - \lambda \frac{dx}{dt} + F_0 \text{sen}(\omega''t)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \text{sen}(\omega''t)$$



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \text{sen}(\omega'' t)$$

La soluzione e' del tipo:

$$x(t) = A \text{sen}(\omega'' t + \phi)$$

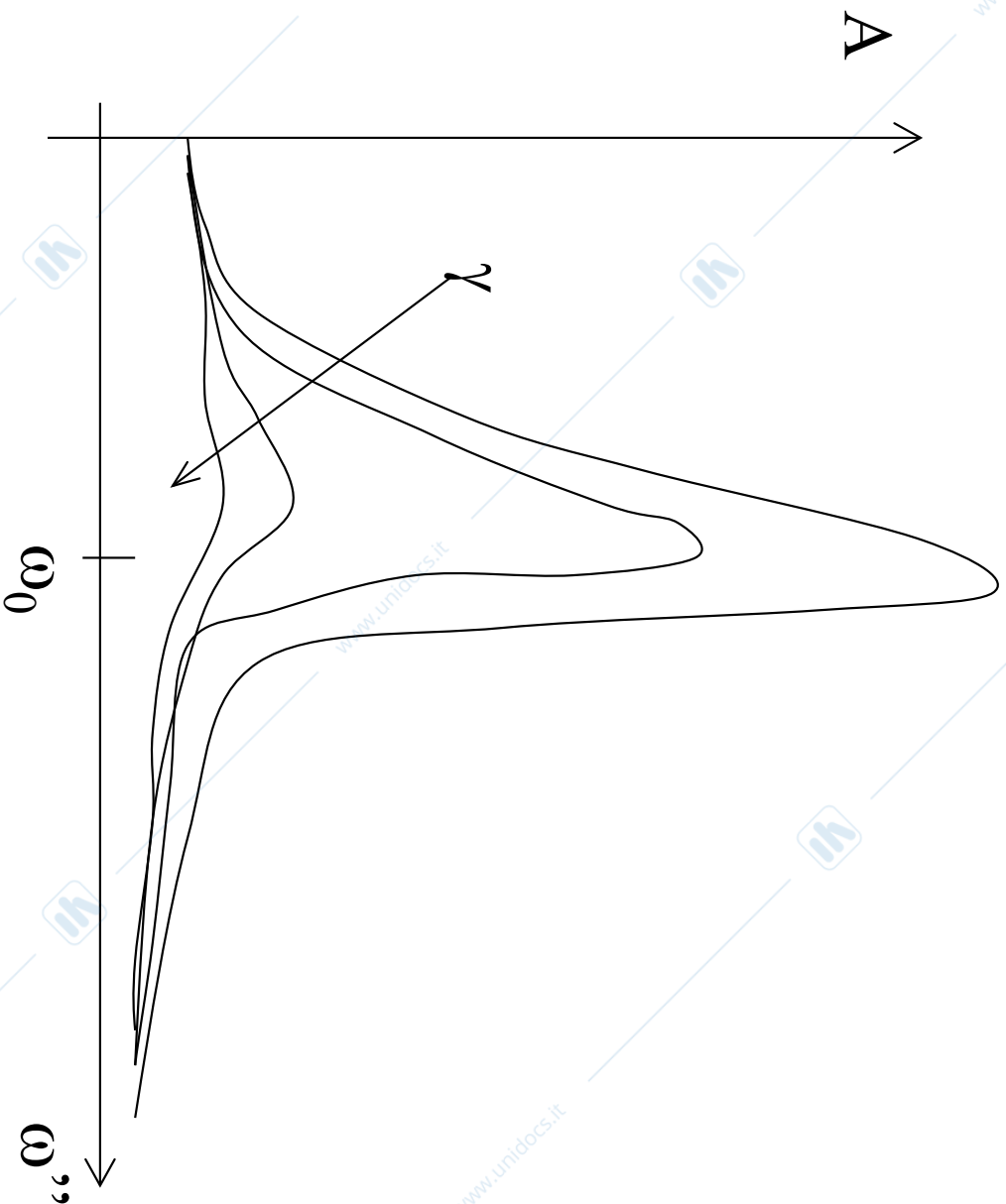
dove

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega''^2)^2 + 4\gamma^2 \omega''^2}}$$

$$\text{tg}\phi = -\frac{2\gamma\omega''}{(\omega_0^2 - \omega''^2)} \quad ; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

⇒ il sistema vibra con la pulsazione ω'' della forza esterna

⇒ il moto è armonico non smorzato



Se $\gamma \rightarrow 0$ e $\omega'' \rightarrow \omega_0$
(pulsazione propria)

$$\Rightarrow A \rightarrow \infty$$

negli altri casi esiste un
valore caratteristico di ω''
in corrispondenza del
quale l'ampiezza di
oscillazione A è massima.

Questa condizione è
chiamata *risonanza*

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega''^2)^2 + 4\gamma^2 \omega''^2}} = \text{ampiezza di oscillazione}$$