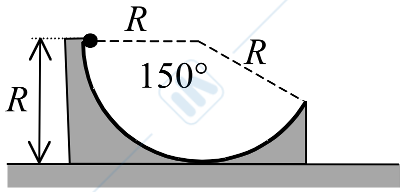
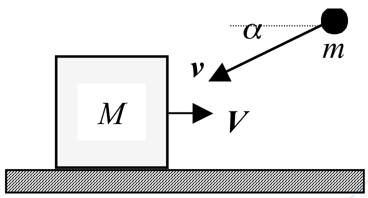
29/6/2009
ore 9:00

FISICA (appello 0)
Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Polli, Torricelli

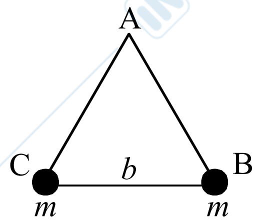
1) Un oggetto puntiforme inizialmente fermo scivola su una guida liscia, fissa, costituita da un arco di circonferenza di raggio R e di ampiezza $\alpha = 150°$. Si calcoli la massima altezza rispetto al suolo raggiunta dall'oggetto, una volta abbandonata la guida.



2) Un proiettile di massa m, in moto con velocità di modulo v lungo una direzione inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale, si conficca in un blocco di massa M che sta scivolando con velocità di modulo V su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito dinamico μ_d. Le direzioni ed i versi dei vettori sono indicati nella figura. Si calcoli lo spostamento del bersaglio tra l'istante dell'impatto e quello in cui si ferma.



3) Un supporto rigido di massa trascurabile, a forma di triangolo equilatero di lato b, può ruotare liberamente in un piano verticale attorno al vertice A, come mostrato nella figura. Ai vertici B e C sono fissate due masse puntiformi identiche. Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio.



4) Dopo aver chiaramente spiegato che cosa si intende per "macchina di Carnot", si enunci e si dimostri il teorema di Carnot.

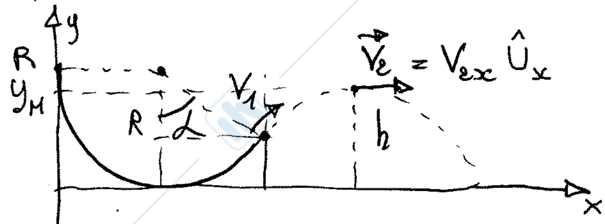
5) Si consideri una trasformazione di un gas ideale monoatomico descritta dall'equazione

$$p = a + bV,$$

dove p è la pressione, V il volume, a e b sono costanti positive. Si ricavi il calore scambiato dal gas durante la trasformazione tra il volume iniziale V_0 ed il volume finale $V_1 = 2V_0$, precisando se è assorbito oppure ceduto.

Soluzione Quesito N.1

1) $V_i = 0$



$\alpha = 60°$

$y(0) = R$

$y(t_1) = R/2$

$V_1 = ?$

$$\cancel{m}gR = \cancel{m}g\frac{R}{2} + \frac{1}{2}\cancel{m}V_1^2$$

$$V_1 = \sqrt{gR}$$

$$\vec{V}_1 = V_1\cos\alpha\,\hat{U}_x + V_1\sin\alpha\,\hat{U}_y$$

$$V_y(t) = V_1\sin\alpha - gt \Rightarrow t_M = \frac{V_1\sin\alpha}{g}$$

$$y(t) = \frac{R}{2} + V_1\sin\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y(t_M) = y_M = \frac{R}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{gR}\right)^2\!\!\Big/g - \frac{1}{2}g\left(\frac{\sqrt{3gR}}{2g}\right)^2 =$$

$$= \frac{R}{2} + \frac{1}{2}\frac{3}{4}R = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)R = \frac{7}{8}R$$

Soluzione Quesito N.2 (approssimata)

e) A rigore il sistema "blocco + proiettile" non è isolato lungo la direzione tangente al piano durante l'urto, per la presenza dell'attrito radente sul blocco; tuttavia tale interazione è superiormente limitata e non può dare origine a forze impulsive. Per il teorema dell'impulso abbiamo quindi che la componente orizzontale della quantità di moto si conserva durante l'urto:

$P_{ix} = MV - m\cos\alpha\, v$ — q.tà di moto prima dell'urto lungo direz. x

$P_{Fx} = (M+m)V_F$ (urto perfett. elastico) — q.tà di moto dopo l'urto lungo direz. x

$p_{ix} = p_{Fx}$

$$MV - m\cos\alpha\, v = (M+m)V_F \Rightarrow V_F = \frac{MV - m\cos\alpha\, v}{M+m}$$

Dopo l'impatto il sistema "blocco + proiettile" si muove con velocità V_F ma è soggetto alle forze di attrito radente che lo frenano fino a determinarne l'arresto dopo un tratto ΔL.

In base al teorema delle forze vive:

$\mathcal{L}_{attrito} = \Delta E_c$, ove sono

$$\mathcal{L}_{attrito} = -\mu_d (M+m) g\, \Delta L$$

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2}(M+m)V_F^2 = -\frac{(MV - m\cos\alpha\, v)^2}{2(M+m)}$$

$$\Rightarrow \Delta L = \frac{1}{2\mu_d g}\left(\frac{MV - m\cos\alpha\, v}{M+m}\right)^2$$

Soluzione Quesito N.2 (rigorosa)

La precedente soluzione risulta tuttavia inconsistente a rigore con l'ipotesi che il moto del blocco M lungo la direzione orizzontale non sia soggetto ad interazioni impulsive. Infatti assumere che sia $I_x = 0$ implicherebbe anche $I_y = 0$, cioè anche lungo la direz. verticale il sistema non dovrebbe essere soggetto ad interazioni impulsive, cosa assurda visto che la quantità di moto lungo y non si conserva e abbiamo appunto

$$I_y = \Delta p_y = + mv \sin\alpha$$

Tale impulso è quello della reazione normale del piano quindi $I_y = I_N$, cioè la reazione normale del piano risulta essere una forza impulsiva, e se continuiamo ad assumere che la forza di attrito radente sia proporzionale alla reazione N, allora anche F_a (forza di attrito) è impulsiva e quindi

$$I_x = I_{F_a} = -\mu_d I_N = -\mu_d I_y = -\mu_d mv \sin\alpha.$$

Per il teorema dell'impulso applicato lungo la direzione orizzontale x abbiamo

$$I_x = \Delta p_x = p_{Fx} - p_{ix}$$

$$-\mu_d mv \sin\alpha = (M+m)V_F - MV + m\cos\alpha\, v$$

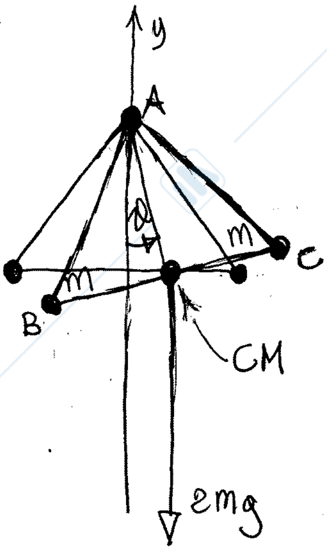
Quindi risulta

$$V_F = \frac{MV - mv(\cos\alpha + \mu_d \sin\alpha)}{M+m}$$

Si osservi che la nuova V_F è un poco minore della precedente in ragione della quantità $\left(\frac{m}{M+m}\mu_d \sin\alpha\right)v$.

Soluzione Quesito N.3

3)



Il centro di massa del sistema si trova nel punto medio del segmento BC.
Il corpo in esame si comporta come un pendolo fisico con momento di inerzia
$I_A = 2mb^2$

Dalla seconda equazione cardinale della dinamica abbiamo:

$$\tau_A = I_A \alpha$$

ove τ_A è la risultante dei momenti applicati al sistema, cioè $\tau_A = -2mgb\sqrt{3}/2 \sin\vartheta$, e $\alpha = d^2\vartheta/dt^2$ è la accelerazione angolare del sistema, con ϑ posizione angolare (vedi Figura)

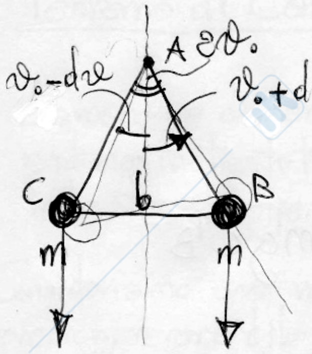
$$-\cancel{2m}\cancel{b}g\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta = \cancel{2m}b^{\cancel{2}}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

Nell'ipotesi di piccole oscillazioni è $\sin\vartheta \simeq \vartheta$, quindi troviamo: $\ddot{\vartheta} + \frac{\sqrt{3}g}{2b}\vartheta = 0$ (con $\ddot{\vartheta} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$)
Questa è l'equazione di un moto armonico di pulsazione $\omega = \left(\frac{\sqrt{3}g}{2b}\right)^{1/2}$, cioè di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{b}{g}}$$

Soluzione Quesito N.3 (alternativa)

3)



$\vartheta_0 = 30°$

Considero il sistema come un corpo rigido costituito da due masse uguali, sottoposto alla azione di due momenti esterni dovuti alla forza peso.

Momento d'inerzia $I_A = 2mb^2$

$\tau_A = I_A \alpha$ II eq. cardinale dinamica

$$\alpha = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \ddot{\vartheta}$$

$$\tau_A = -mgb\sin(\vartheta_0 + \vartheta) + mgb\sin(\vartheta_0 - \vartheta)$$
$$= mgb\left(\sin(\vartheta_0 - \vartheta) - \sin(\vartheta_0 + \vartheta)\right)$$

Per ϑ piccolo $(\vartheta \ll \vartheta_0)$ approssimiamo il $\sin(\vartheta)$ con ϑ stesso e $\cos(\vartheta)$ con 1.

$$\tau_A \cong mgb\left(\cancel{\sin\vartheta_0} - \cos\vartheta_0\, \vartheta - \cancel{\sin\vartheta_0} - \cos\vartheta_0\, \vartheta\right)$$
$$\cong -2mgb\cos\vartheta_0\, \vartheta = -\sqrt{3}\, mgb\, \vartheta$$

$$\tau_A = I_A \ddot{\vartheta}$$

$$-\sqrt{3}\, \cancel{m} g \cancel{b}\, \vartheta = 2\cancel{m} b^{\cancel{2}} \ddot{\vartheta}$$

$$\frac{\sqrt{3}\, g}{2b}\vartheta + \ddot{\vartheta} = 0$$

equazione moto armonico di pulsazione ω_0, con: $\omega_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{b}$, da cui

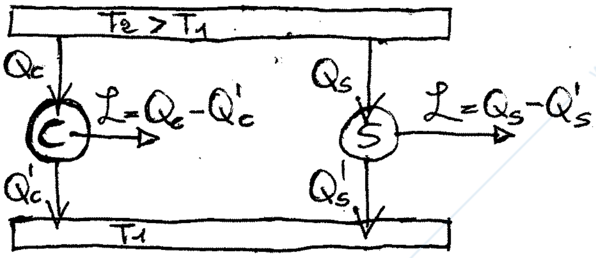
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{b}{g}}$$

Soluzione Quesito N.4

Teorema di Carnot

La macchina di Carnot è quella dotata del massimo rendimento tra tutte le macchine termiche operanti tra le stesse temperature estreme T_1 e T_2.

Consideriamo una macchina di Carnot C ed una macchina S (generica, reversibile o meno).
Esse vengono fatte operare tra le due stesse temperature in modo che in un ciclo compiano lo stesso lavoro, $\mathcal{L}$.

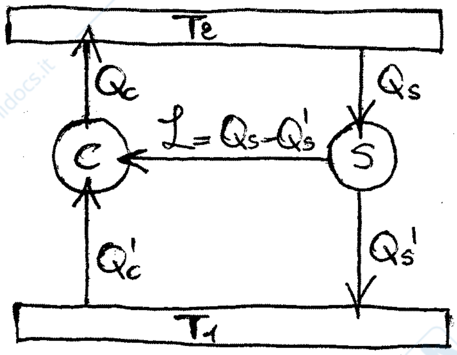


$$\mathcal{L}=Q_c-Q_c'=Q_s-Q_s'$$

$$\eta_c=\frac{\mathcal{L}}{Q_c}\ ;\ \eta_s=\frac{\mathcal{L}}{Q_s}$$

Supponiamo per assurdo che si abbia $\eta_c<\eta_s$, allora:

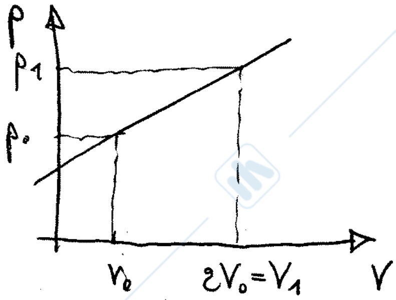
$\frac{\mathcal{L}}{Q_c}<\frac{\mathcal{L}}{Q_s}\Rightarrow Q_c>Q_s$, allora se costruissimo una macchina combinazione della C in modalità frigorifera e della S, avremmo la possibilità di trasferire la quantità non nulla di calore $Q_c'-Q_s'=$ $=Q_c-Q_s$ da una sorgente più fredda ad una più calda in modo spontaneo (senza lavoro), in violazione del II principio (vedi formulazione di Clausius).



Dunque l'ipotesi che sia $\eta_c<\eta_s$ è assurda e quindi si deve avere $\eta_c\geq\eta_s$ e $=$ vale se S è reversibile, altrimenti vale il $>$.

Soluzione Quesito N.5

5)



$$Q = \mathcal{L} + \Delta U$$

$$\mathcal{L} = \int_{V_0}^{V_1} p(V)\,dV = \int_{V_0}^{2V_0} (a + bV)\,dV = \left[aV + \frac{1}{2} bV^2\right]_{V_0}^{2V_0} =$$

$$= aV_0 + \frac{3}{2} bV_0^2$$

$$\Delta U = n c_v \Delta T = n c_v (T_1 - T_0) = \cancel{n} c_v \left(\frac{p_1V_1 - p_0V_0}{\cancel{n}R}\right) =$$

$$= \frac{c_v}{R}(2p_1 - p_0)V_0 = (2a + 4bV_0 - a - bV_0)\frac{c_vV_0}{R} =$$

$$= \frac{aV_0 + 3bV_0^2}{\cancel{R}} \cancel{c_v}\frac{3}{2}\cancel{R} = \frac{3}{2} aV_0 + \frac{9}{2} bV_0^2$$

$$Q = \frac{5}{2} aV_0 + 6bV_0^2 = \frac{1}{2} V_0 (5a + 12bV_0)$$