LEZIONE 2: MOTO ONDULATORIO PARTE I

DAVIDE PAGANO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

FISICA SPERIMENTALE (OTTICA ONDE)

A.A. 2017/2018

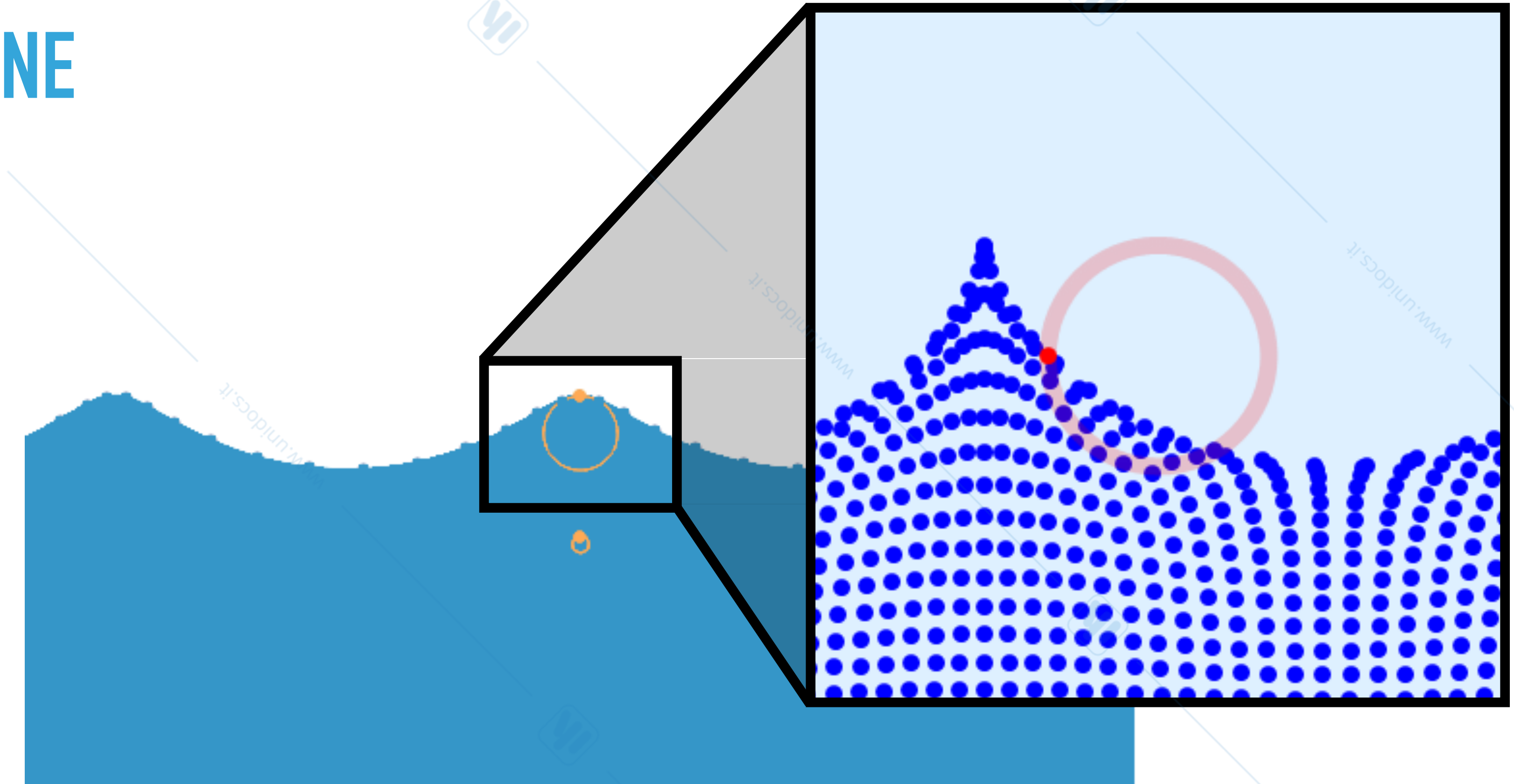
INTRODUZIONE

- Le onde (prima che si infrangano) stanno trasportando acqua dal mare verso la spiaggia?
- **No**, non lo fanno!

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

INTRODUZIONE



http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/waves/wavemotion.html

- Nonostante le onde del mare possano viaggiare anche a notevole velocità ogni molecola oscilla attorno ad una posizione di equilibrio
- Non c'è trasporto di materia!

INTRODUZIONE

- Le onde del mare appena viste sono un caso particolare di un fenomeno estremamente comune in natura: i *fenomeni ondulatori*
- Siamo infatti costantemente investiti da onde luminose, sonore,…
- Tutte descrivibili con lo stesso formalismo matematico
- Anche dallo studio di solo un tipo particolare di onde è possibile apprendere proprietà comuni a tutti i fenomeni ondulatori
- In questa lezione parleremo delle onde meccaniche

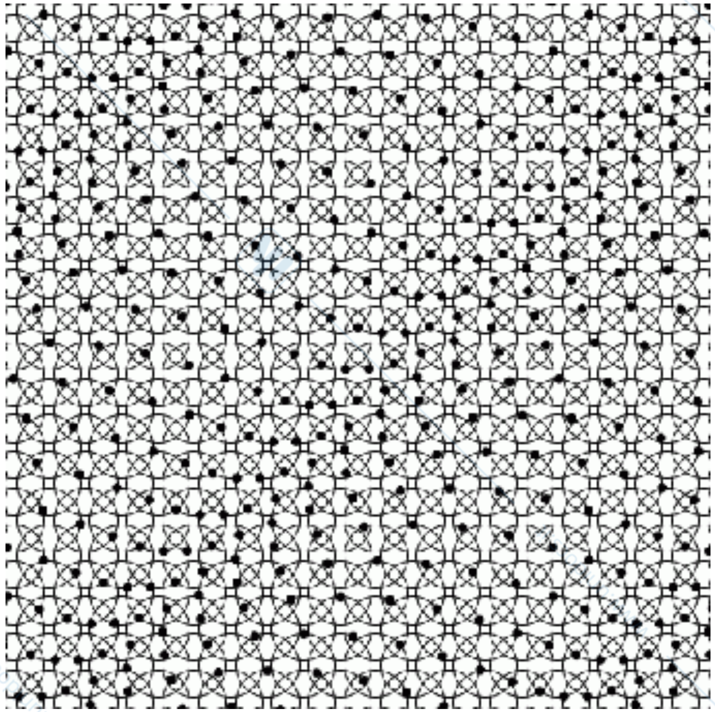
LE ONDE MECCANICHE

- Un'*onda meccanica* è la propagazione di una perturbazione in un *mezzo elastico* (che può essere solido, liquido o gassoso)

- Sono le proprietà elastiche del mezzo che consentono la propagazione

- La propagazione avviene grazie alle forze tra gli atomi (*forze interatomiche*)

- Ogni atomo interagisce con quelli vicini trasmettendo loro il suo moto



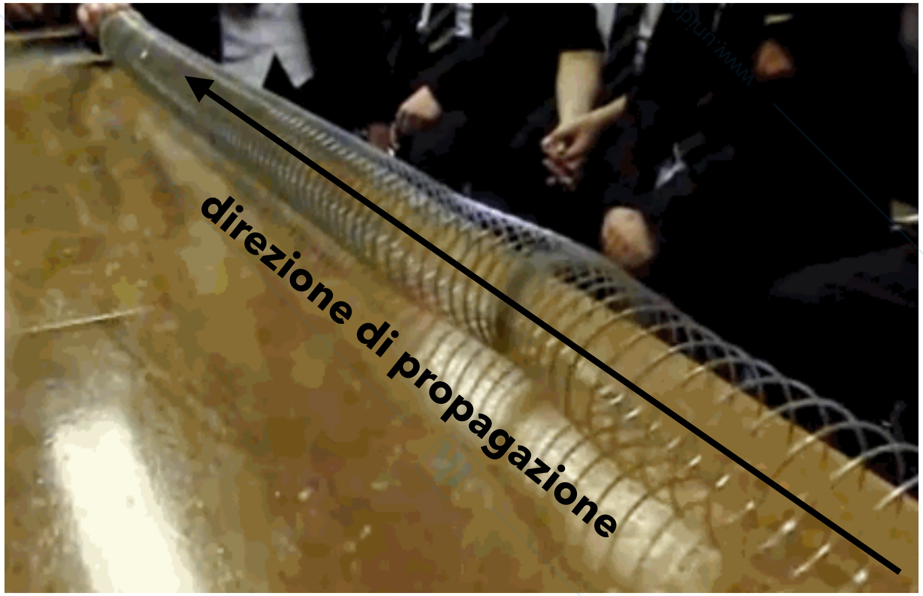
- **Quindi c'è trasporto di energia, quantità di moto e informazioni sulla sorgente ma non c'è trasporto di materia**

LEZIONE 2: MOTO ONDULATORIO

CLASSIFICAZIONE DELLE ONDE

DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

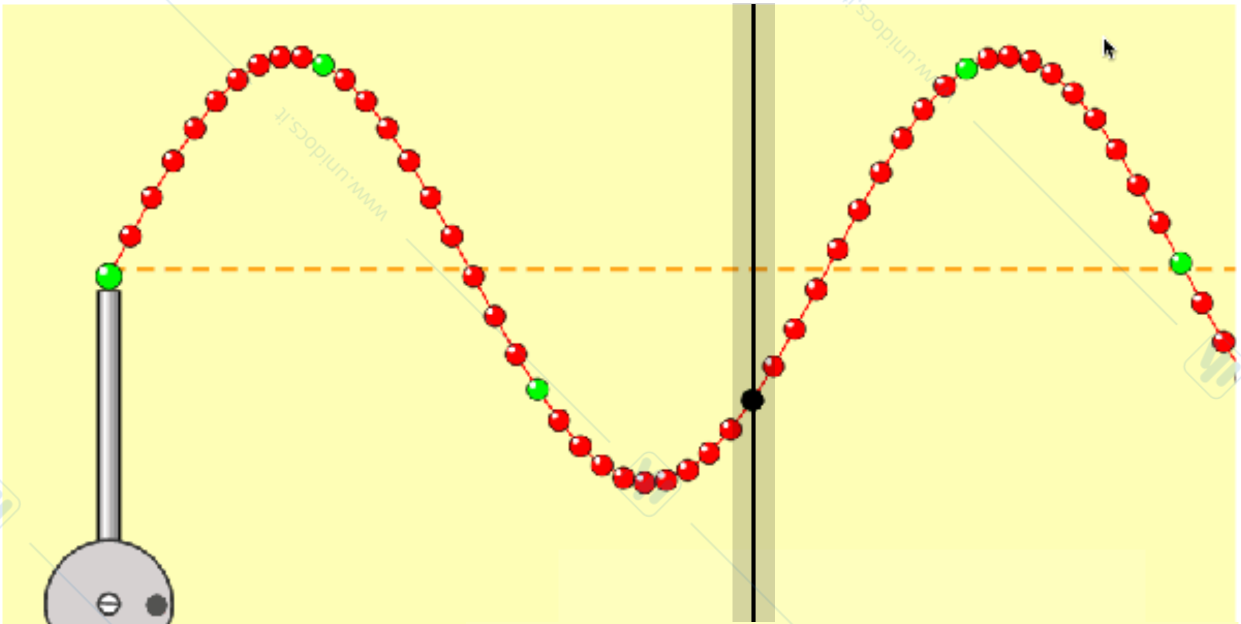
- Consideriamo una perturbazione che si propaga lungo una molla



- Ogni punto della molla oscilla **lungo una direzione parallela a quella di propagazione dell'onda**
- Onde con questa caratteristica sono chiamate <u>*longitudinali*</u>

DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

- Consideriamo un'onda lungo una corda



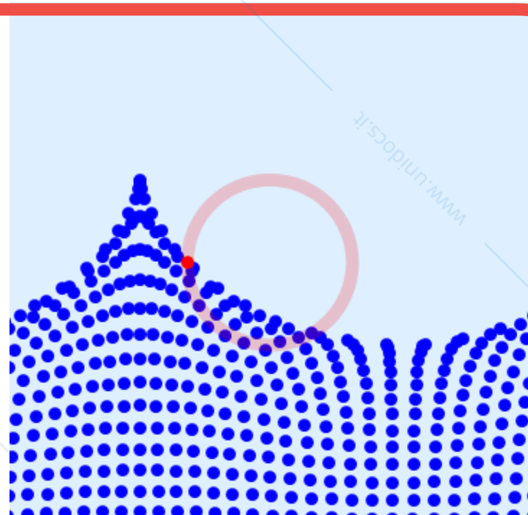
https://phet.colorado.edu/it/simulation/wave-on-a-string

- Ogni punto della corda oscilla lungo **lungo una direzione perpendicolare a quella di propagazione dell'onda**
- Onde con questa caratteristica sono chiamate *trasversali*

DIREZIONE DI PROPAGAZIONE

- Ricapitolando:
  - in un'onda longitudinale l'oscillazione avviene lungo una direzione *parallela* a quella di propagazione dell'onda
  - in un'onda trasversale l'oscillazione avviene lungo una direzione *perpendicolare* a quella di propagazione dell'onda

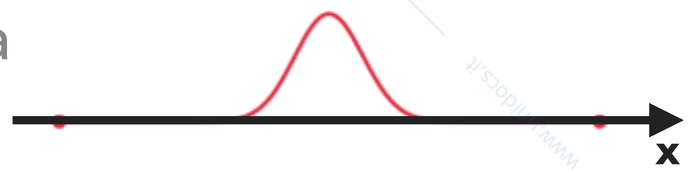
- Un'onda può anche non essere né puramente longitudinale né puramente trasversale



DIMENSIONI

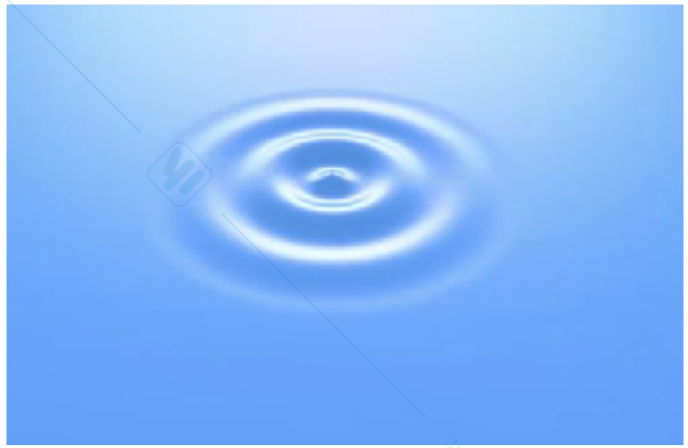
- Onde la cui propagazione avviene lungo una direzione fissa sono dette <u>*unidimensionali*</u>

  (Es. onde su una corda)



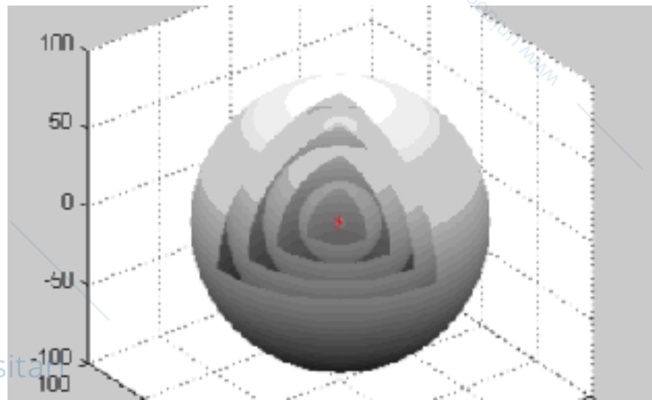
- Onde la cui propagazione avviene in un piano sono dette <u>*bidimensionali*</u>

  (Es. onde sull'acqua)



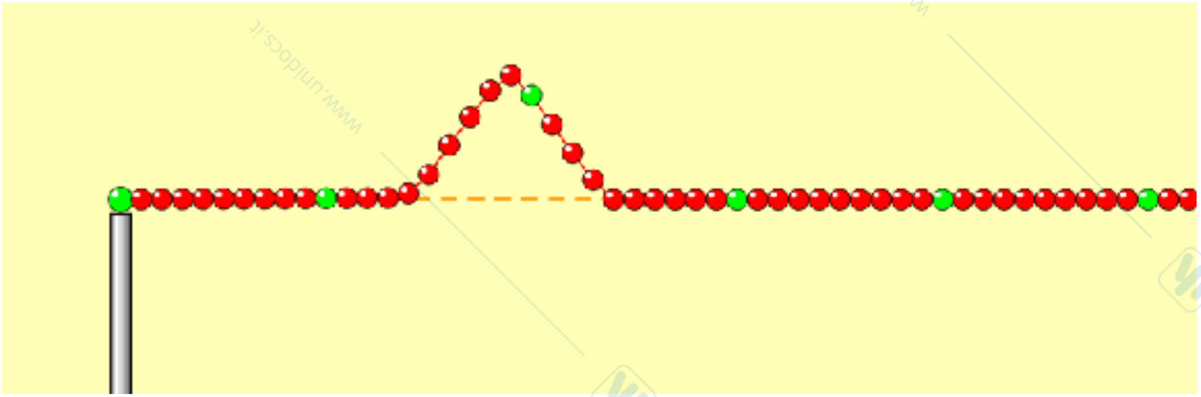
- Infine onde la cui propagazione avviene nello spazio sono dette <u>*tridimensionali*</u>

  (Es. Onde sonore)



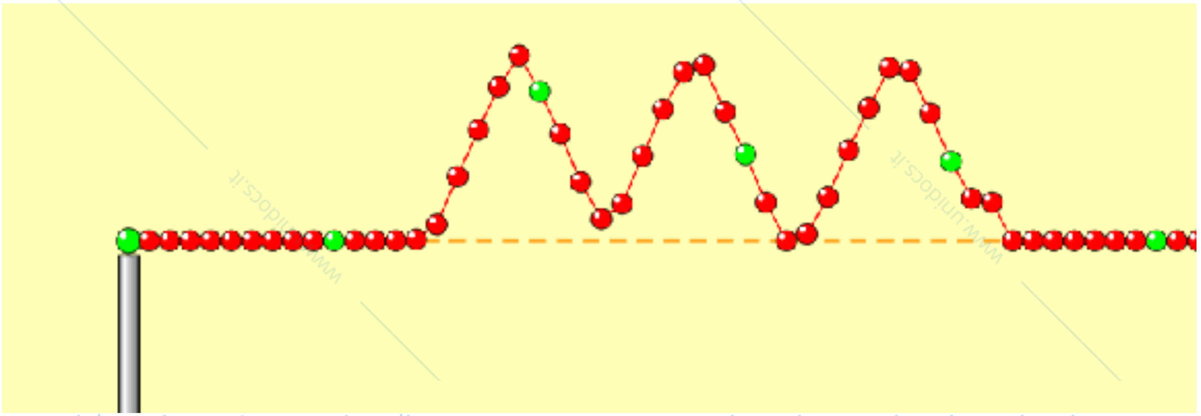
PERIODICITÀ

- Un singolo colpetto all'estremità di una corda tesa genera un *impulso* che viaggia lungo la corda



https://phet.colorado.edu/it/simulation/wave-on-a-string

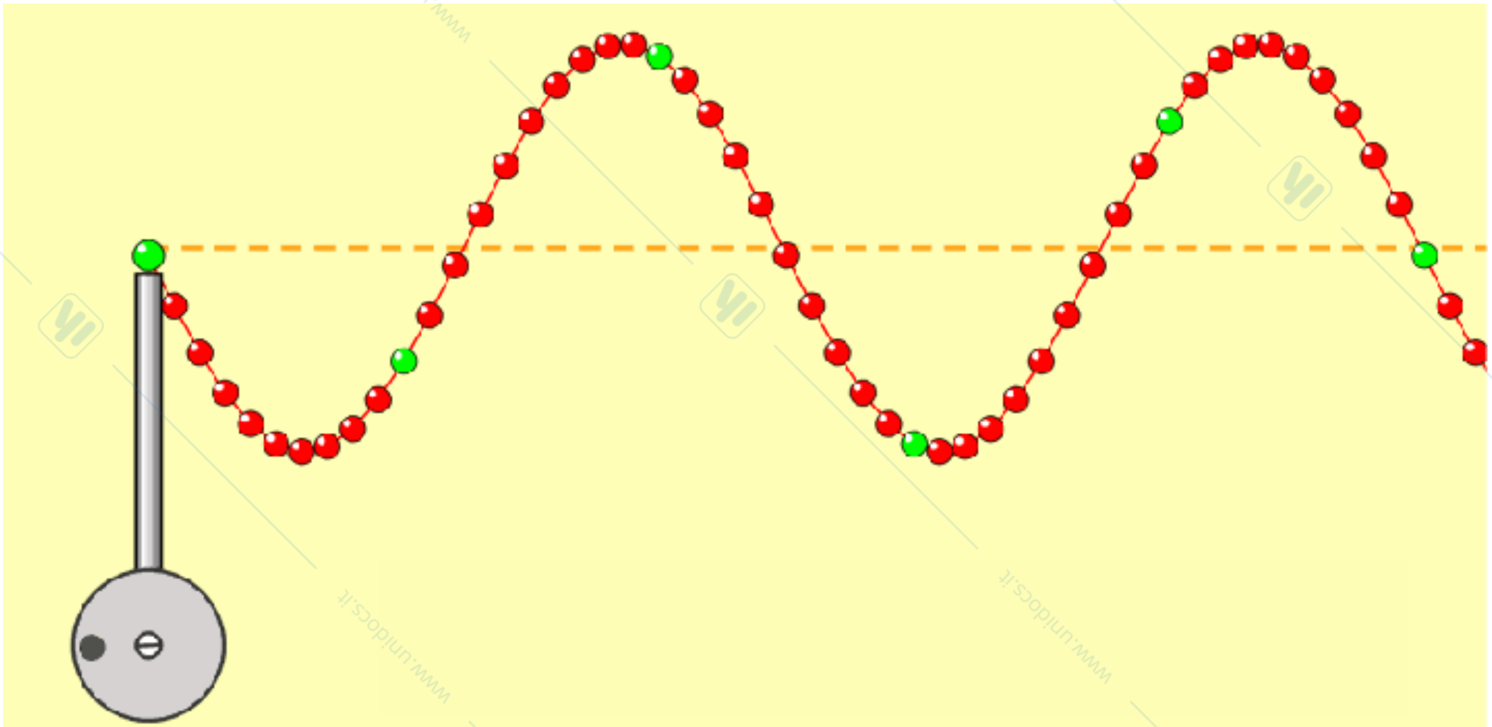
- Se la perturbazione si protrae nel tempo si genera un *treno d'onde*



https://phet.colorado.edu/it/simulation/wave-on-a-string

PERIODICITÀ

- Se la perturbazione è periodica si ha un *treno d'onde periodico* (nell'esempio seguente si ha una perturbazione sinusoidale)



https://phet.colorado.edu/it/simulation/wave-on-a-string

FRONTI D'ONDA

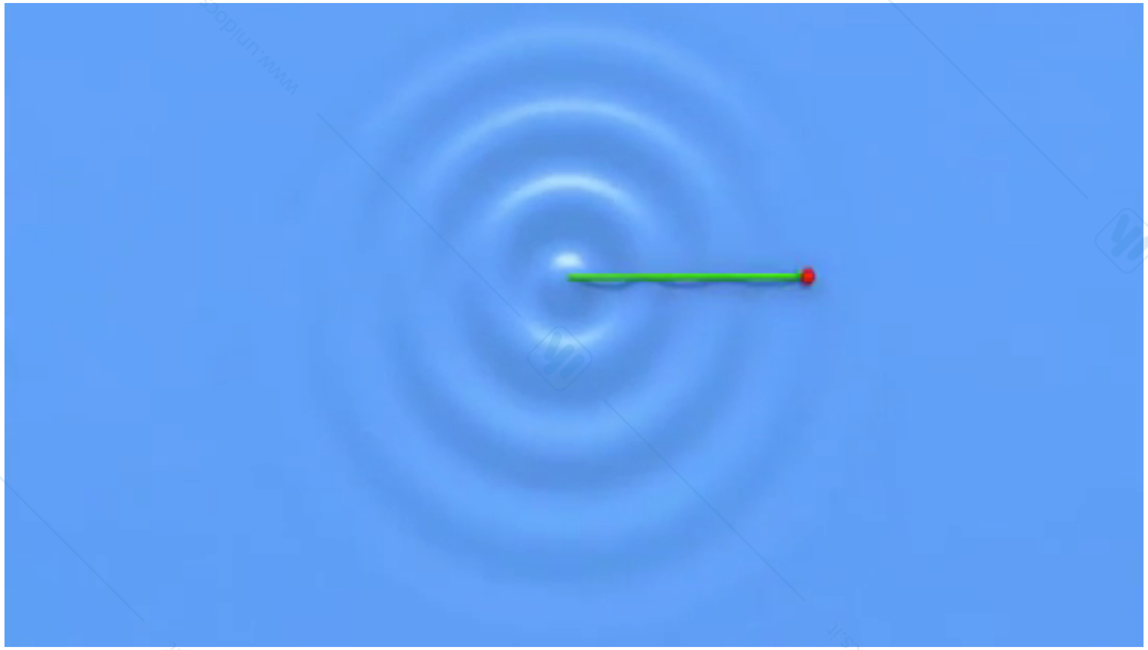
- Consideriamo per esempio le onde (circolari) generate da un sasso sulla superficie dell'acqua

https://www.youtube.com/watch?v=gliLaaeZHwg

- Le increspature dell'acqua formano cerchi concentrici

FRONTI D'ONDA

- Quando le onde raggiungono un generico punto sulla superficie dell'acqua lo mettono in oscillazione (verticale)

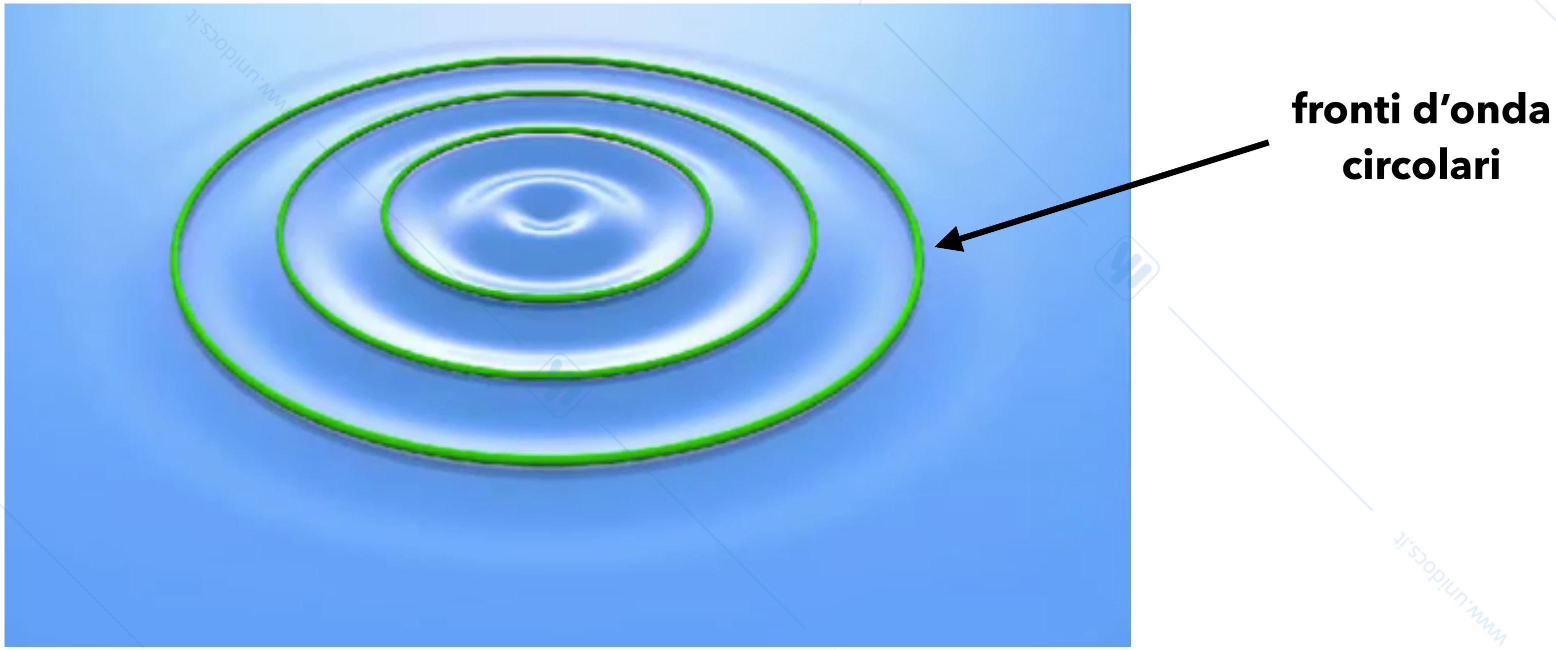


https://www.youtube.com/watch?v=gliLaaeZHwg

- Punti diversi alla stessa distanza dalla sorgente della perturbazione **oscillano in fase**

FRONTI D'ONDA

- Tutti questi punti che oscillano in fase formano un *fronte d'onda*

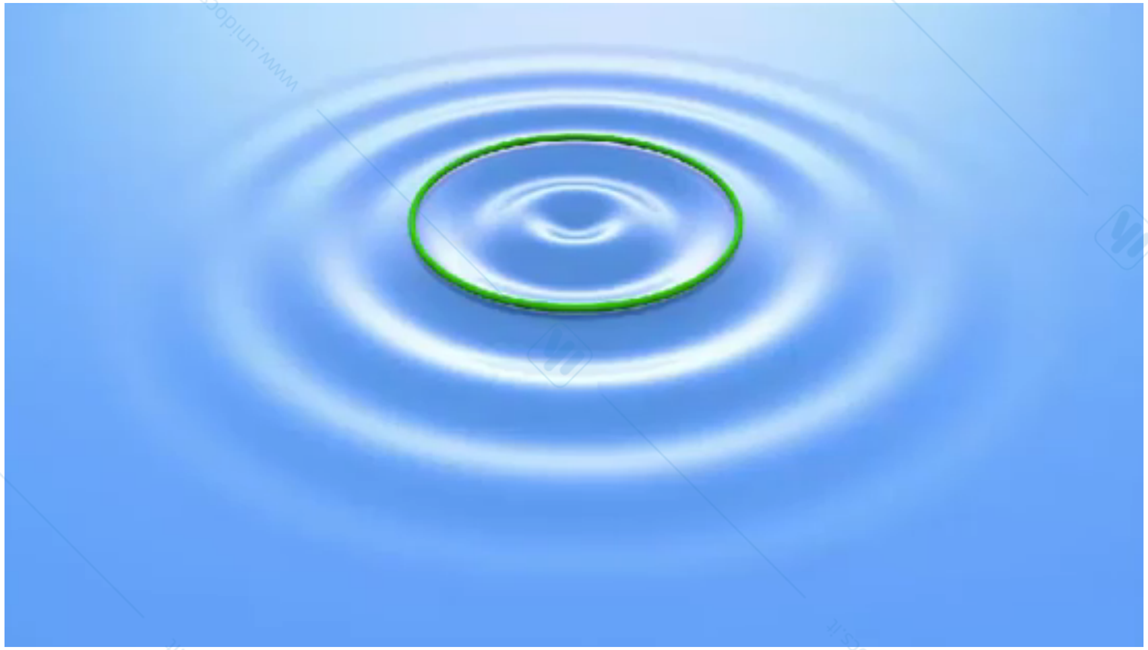


https://www.youtube.com/watch?v=gliLaaeZHwg

- In questo caso specifico i fronti d'onda sono circolari (sebbene in generale possano avere forme diverse)

FRONTI D'ONDA

- La propagazione dell'onda può essere compresa studiando la propagazione dei fronti d'onda

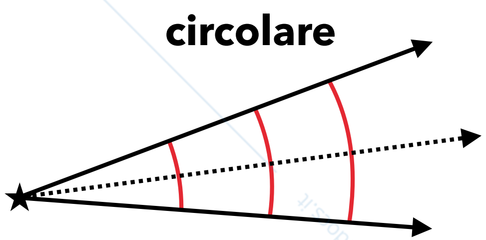


https://www.youtube.com/watch?v=gliLaaeZHwg

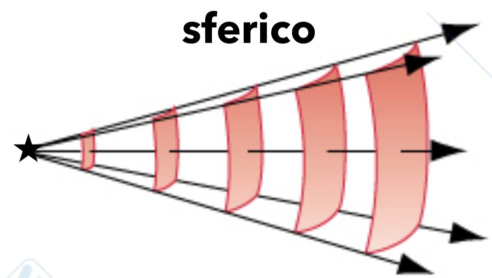
- Una linea ortogonale a un fronte d'onda in un suo punto è detta *raggio* e indica la **direzione di propagazione dell'onda**

FRONTI D'ONDA

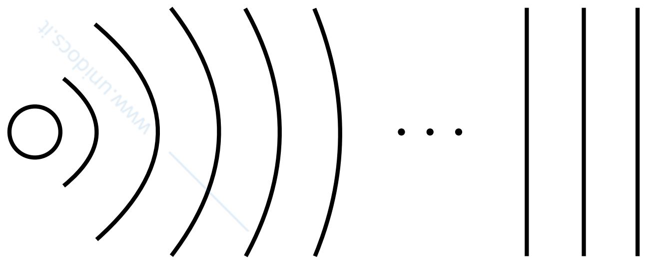
- I fronti d'onda possono avere moltissime forme



- Una sorgente puntiforme può produrre *fronti d'onda circolari* (es. il sasso sulla superficie dell'acqua) e *sferici* (es. onde sonore)



- A **grande distanza** dalla sorgente però **i fronti d'onda circolari sono approssimabili a fronti d'onda lineari**, mentre **quelli sferici sono approssimabili a fronti d'onda piani**



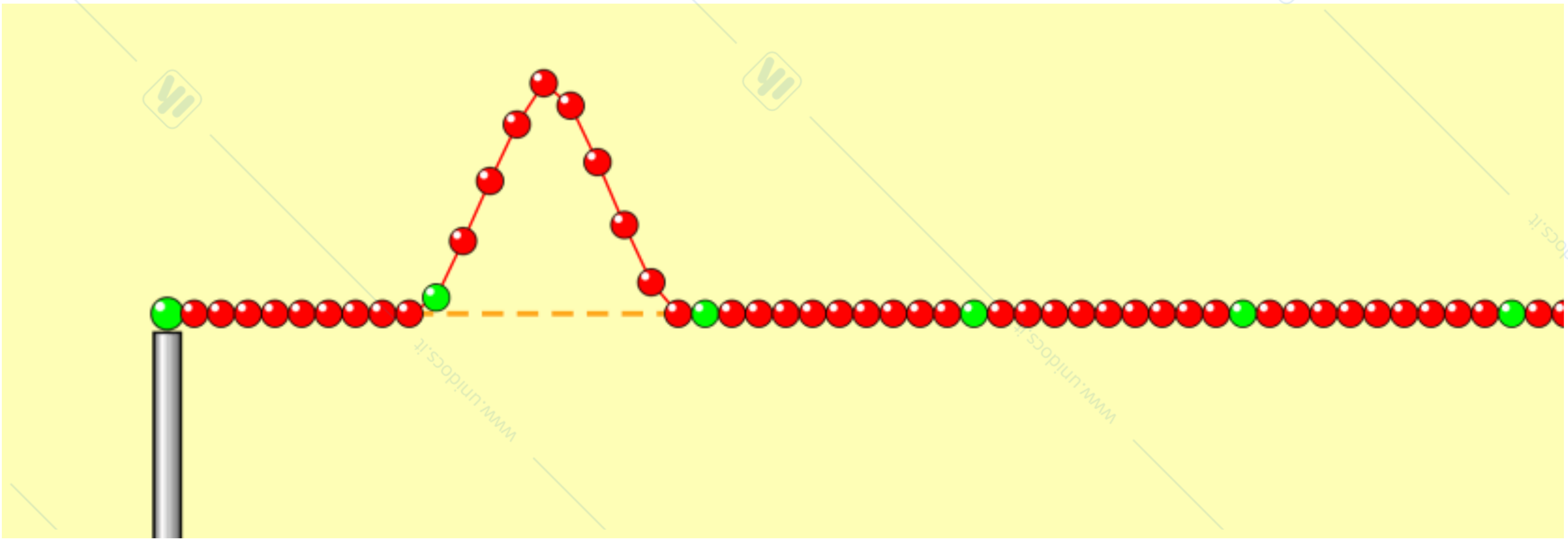
LEZIONE 2: MOTO ONDULATORIO

ONDE SU UNA CORDA TESA

ONDE (TRASVERSALI) SU UNA CORDA TESA

- Consideriamo una *corda ideale*, ovvero dove trascuriamo tutti gli effetti dissipativi (es. l'attrito tra la corda e l'ambiente)
  - **Su una corda ideale la forma dell'onda rimane la stessa**

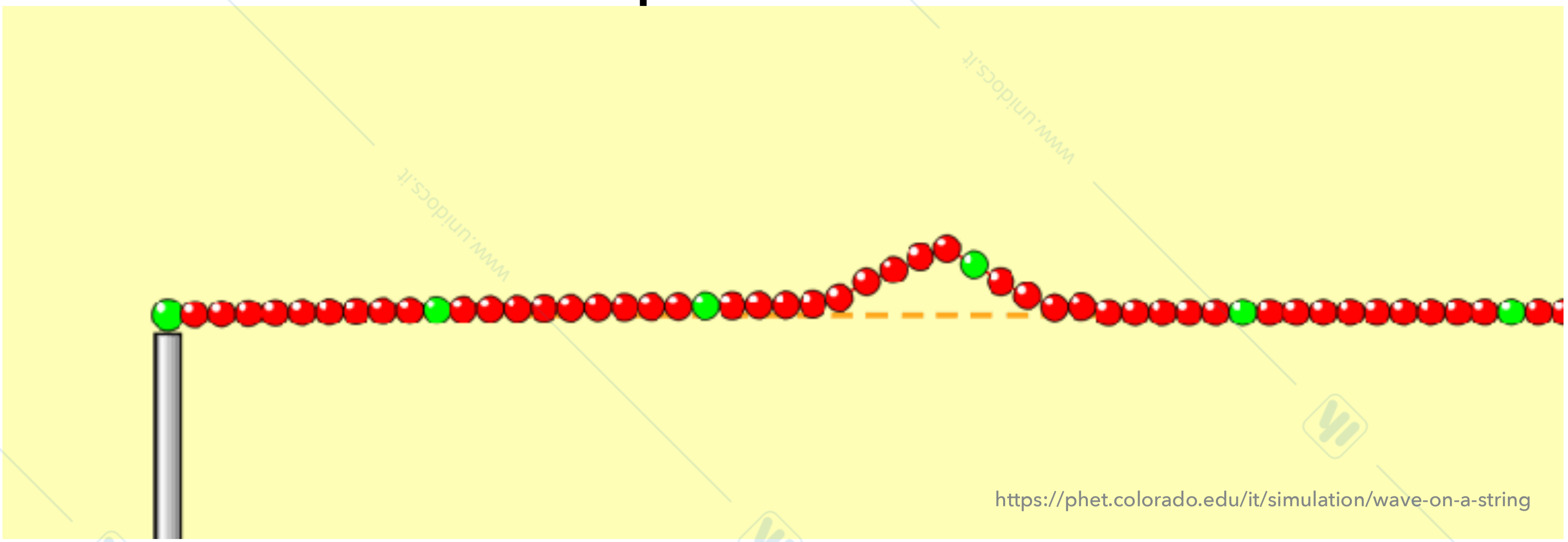
in assenza di attrito



https://phet.colorado.edu/it/simulation/wave-on-a-string

ONDE (TRASVERSALI) SU UNA CORDA TESA

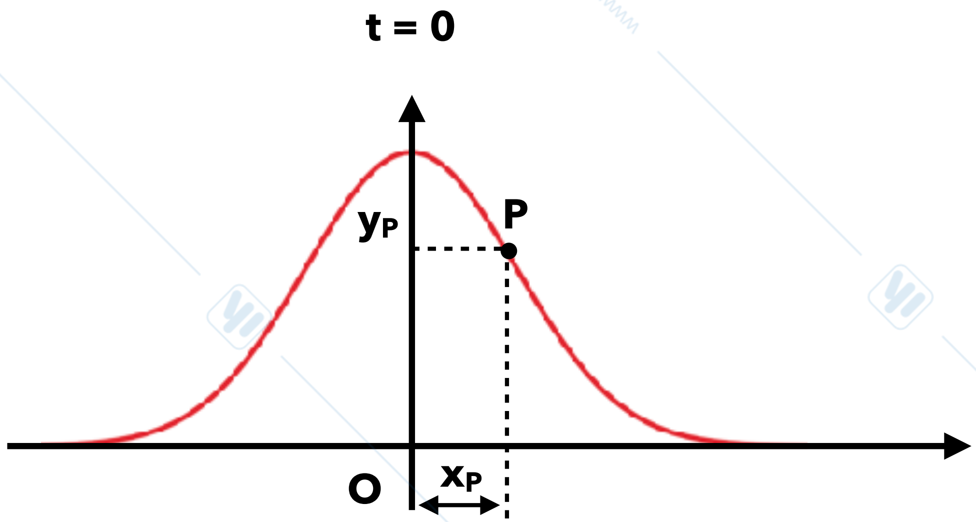
in presenza di attrito



- Data una corda ideale su cui si propaga un impulso, vogliamo trovare lo spostamento verticale di un generico punto della corda al variare del tempo: $y(x, t)$

ONDE (TRASVERSALI) SU UNA CORDA TESA

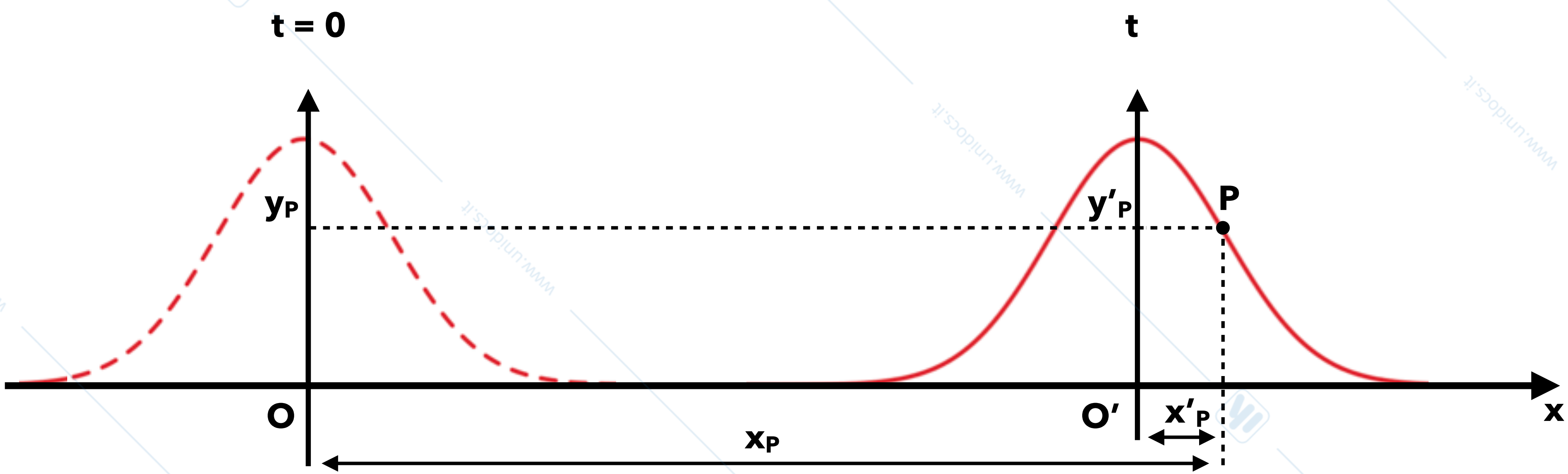
- Al tempo t = 0 lo spostamento di un generico punto P dalla posizione di equilibrio è



$$y_P = y(x_P, 0) = f(x_p)$$

- Dove f(x) è la funzione che descrive la forma dell'impulso (al tempo t = 0)

ONDE (TRASVERSALI) SU UNA CORDA TESA

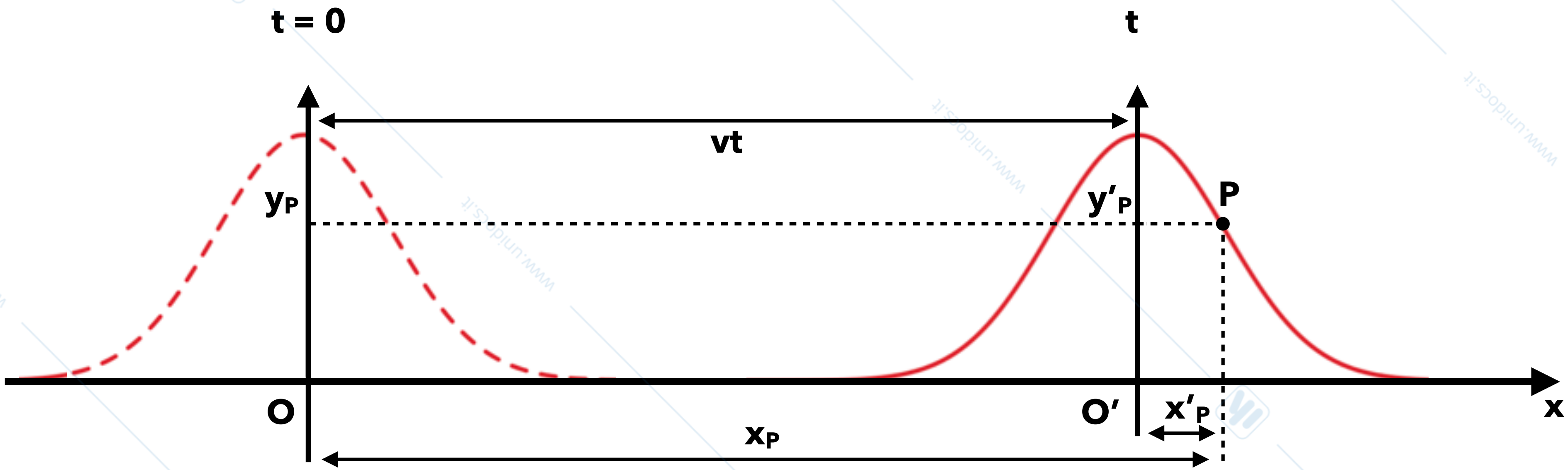


- Vogliamo calcolare $y_P = y(x_P, t)$ del generico punto P

- Siccome la forma dell'impulso non cambia nel tempo lo spostamento del punto P dalla posizione di equilibrio in O' è

$$y'_P = f(x'_P) = y_P$$

ONDE (TRASVERSALI) SU UNA CORDA TESA

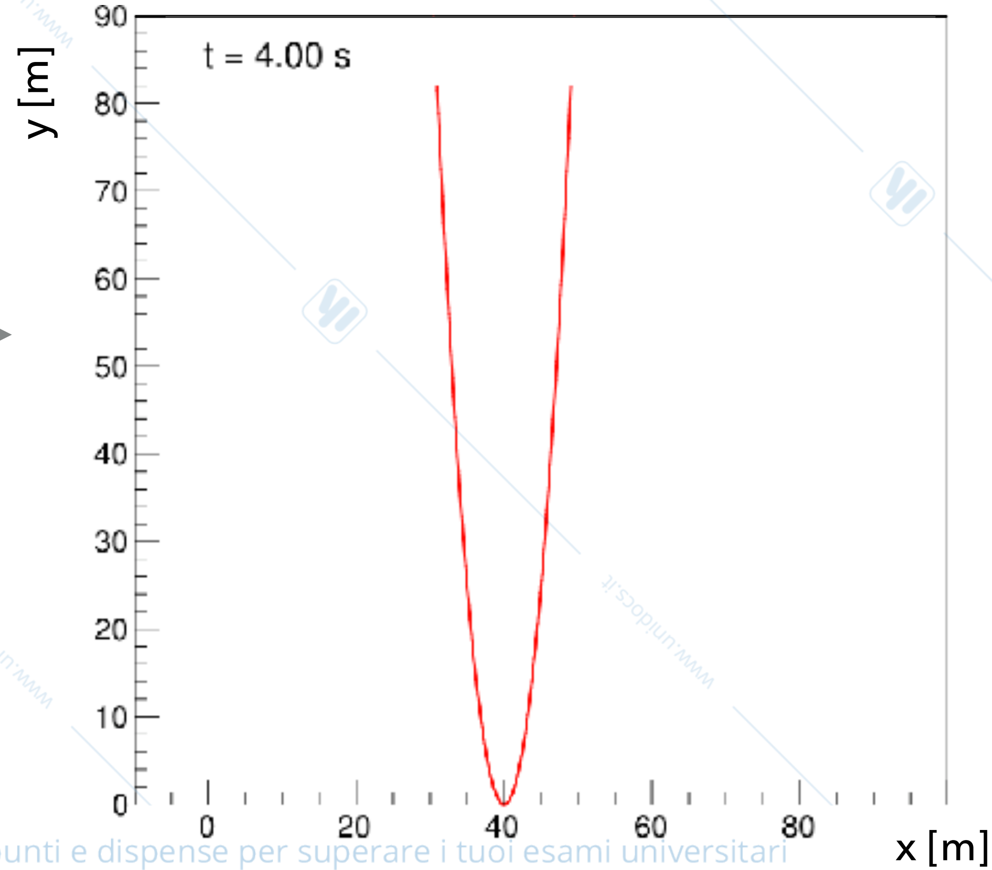


- Nel tempo t l'impulso si è spostato di uno spostamento pari vt
- Pertanto possiamo scrivere $x'_P = x_P - vt \longrightarrow y_P = f(x'_P) = f(x_P - vt)$
- Ma essendo P un punto generico: $\boxed{y(x,t) = f(x - vt)}$

ONDE (TRASVERSALI) SU UNA CORDA TESA

- Sostituendo in una **qualsiasi** funzione *f(x)* la variabile *x-vt* al posto della variabile *x* si ottiene un'*onda viaggiante* alla velocità *v* **nel verso positivo dell'asse *x***

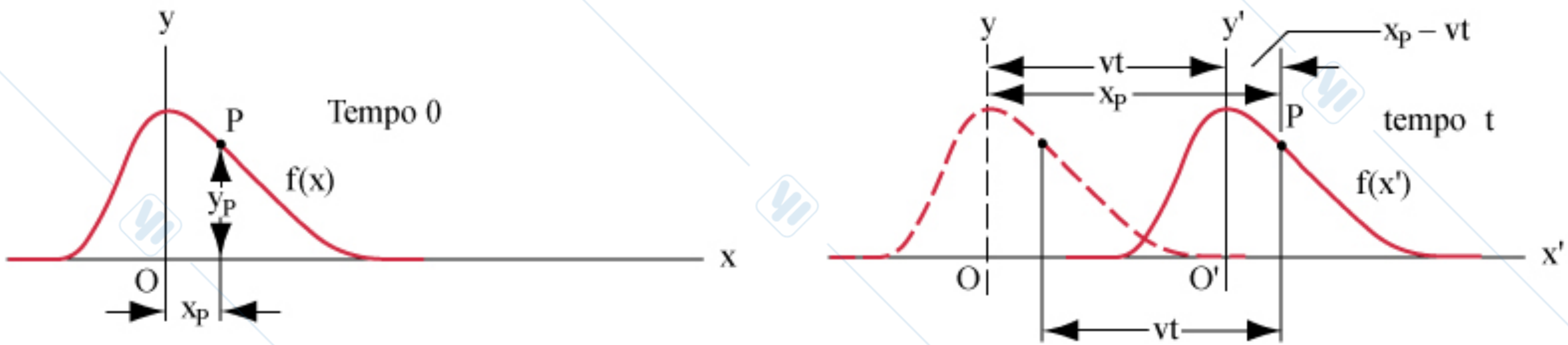
$$y(x,t) = (x - vt)^2$$



ONDE (TRASVERSALI) SU UNA CORDA TESA

- Analogamente sostituendo $x+vt$ al posto si x si ottiene un'onda viaggiante alla velocità v **nel verso negativo dell'asse x**

- Consideriamo il moto di un punto P particolare della forma d'onda



- Siccome in una corda ideale la forma d'onda non cambia allora l'ordinata y_P del punto P **non cambia durante la propagazione**

- Ma $y_P = f(x_P - vt) \longrightarrow f(x_P - vt) = costante \longrightarrow x_P - vt = costante$

ONDE (TRASVERSALI) SU UNA CORDA TESA

- $x - vt = costante \longrightarrow \frac{d}{dt}(x - vt) = 0 \longrightarrow v = \frac{dx}{dt}$
- Un generico punto della forma d'onda è detto _fase_ dell'onda
- $v = \frac{dx}{dt}$ è detta _velocità di fase_ o semplicemente _velocità dell'onda_
- La funzione y(x,t) contiene tutte le informazioni relative alla forma dell'onda e al suo moto
- $t = t_1 \longrightarrow y(x, t_1)$ descrive la **forma della corda** al tempo considerato
- $x = x_1 \longrightarrow y(x_1, t)$ descrive il moto di un **particolare punto**

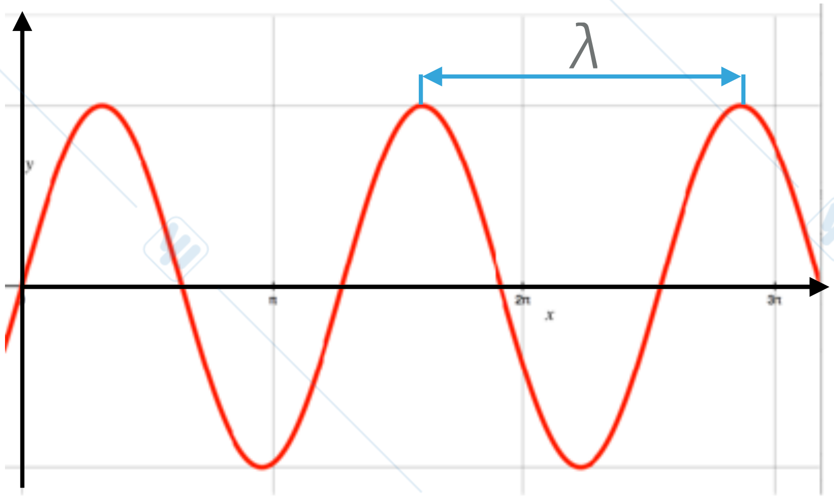
LEZIONE 2: MOTO ONDULATORIO

ONDE SINUSOIDALI

ONDE SINUSOIDALI

- Quanto appena vista è valido in **generale**

- Concentriamoci adesso su un caso particolare: le *onde trasversali armoniche*, che sono descritte da una funzione d'onda sinusoidale



forma d'onda

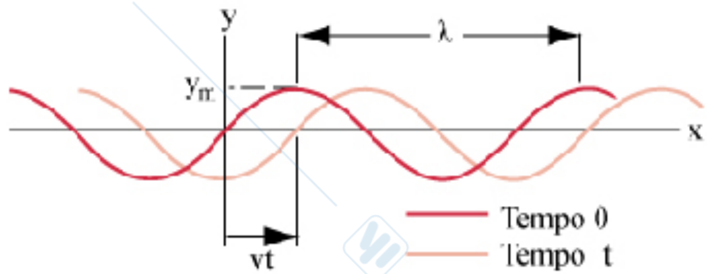
$$f(x) = y_m sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

- y_m è l'*ampiezza* ovvero il massimo scostamento degli elementi della corda, mentre λ è detta *lunghezza d'onda* tra due creste o ventri (consecutivi) di un'onda periodica

ONDE SINUSOIDALI

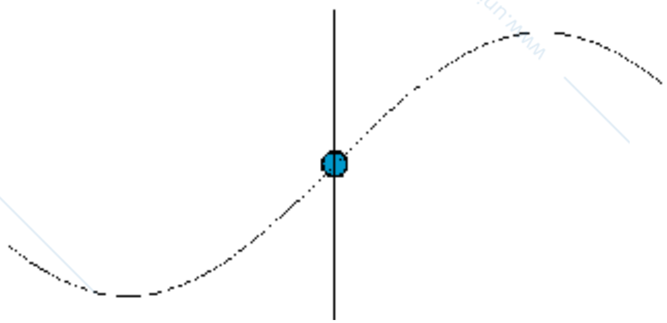
- Un'onda viaggiante (nella direzione positiva) con la forma d'onda sinusoidale vista prima è descritta dell'equazione

$$y(x,t) = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$



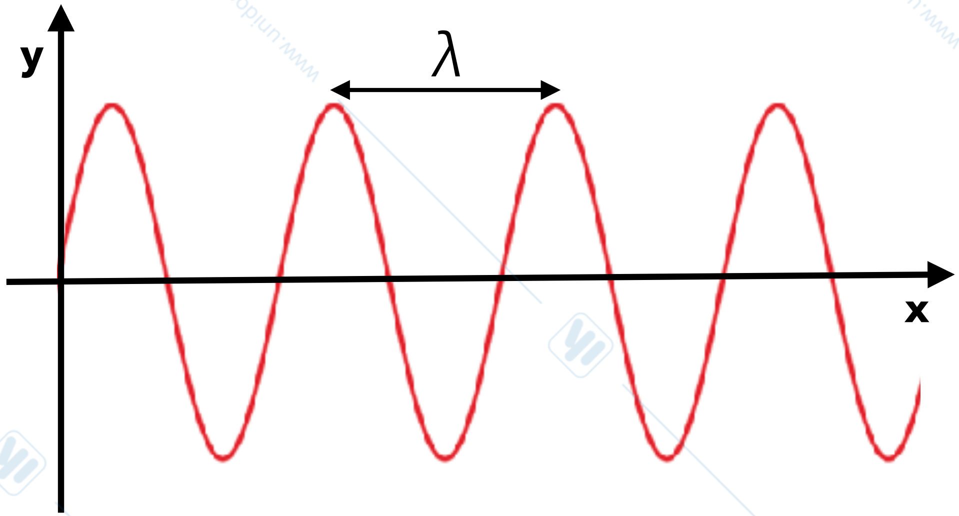
- λ rappresenta la **periodicità spaziale** dell'onda: fissato il tempo punti distanti $n\lambda$ hanno la stessa ampiezza

- Il *periodo* T è definito come il tempo impiegato da un generico elemento di corda per compiere un'oscillazione completa: **periodicità temporale**



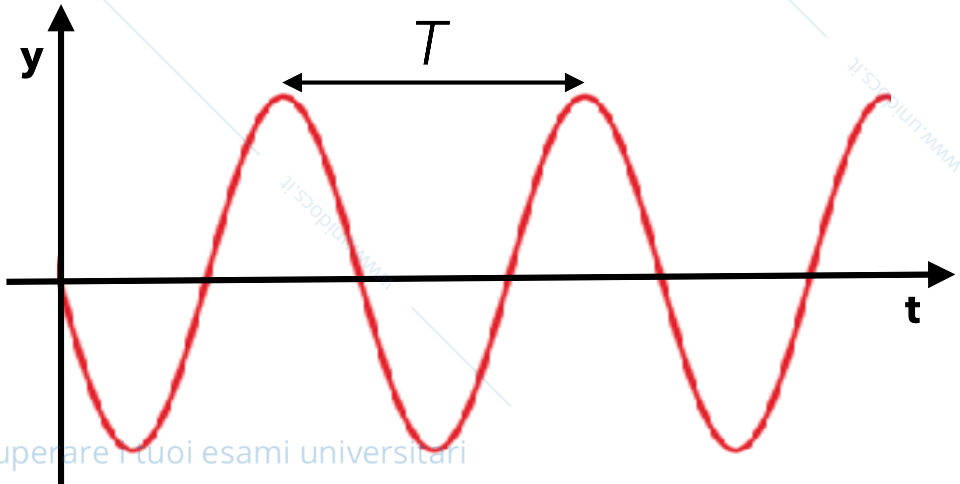
ONDE SINUSOIDALI

- $y(x,t) = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$



Fisso t (es. t = 0)

$$y(x,0) = y_m sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$



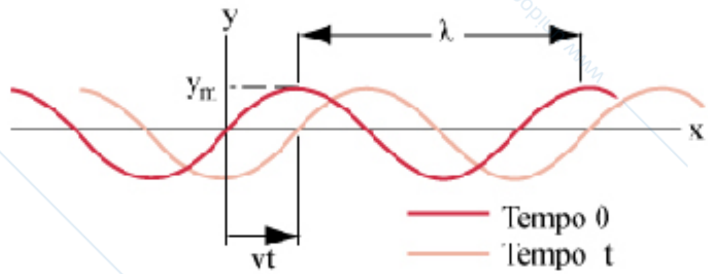
Fisso x (es. x = 0)

$$y(0,t) = y_m sin\left(-\frac{2\pi}{\lambda}vt\right)$$

ONDE SINUSOIDALI

- Durante il tempo T l'onda percorre una distanza che deve corrispondere alla lunghezza d'onda

$$\lambda = vT$$



- $\nu = \frac{1}{T}$ è la *frequenza* che si misura in s^{-1} o Hertz (Hz)

- $y(x,t) = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \rightarrow y(x,t) = y_m \sin\left(\boxed{\frac{2\pi}{\lambda}}x - \boxed{\frac{2\pi}{T}}t\right)$

costanti

- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ è detto *numero d'onda*
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ è detta *pulsazione*

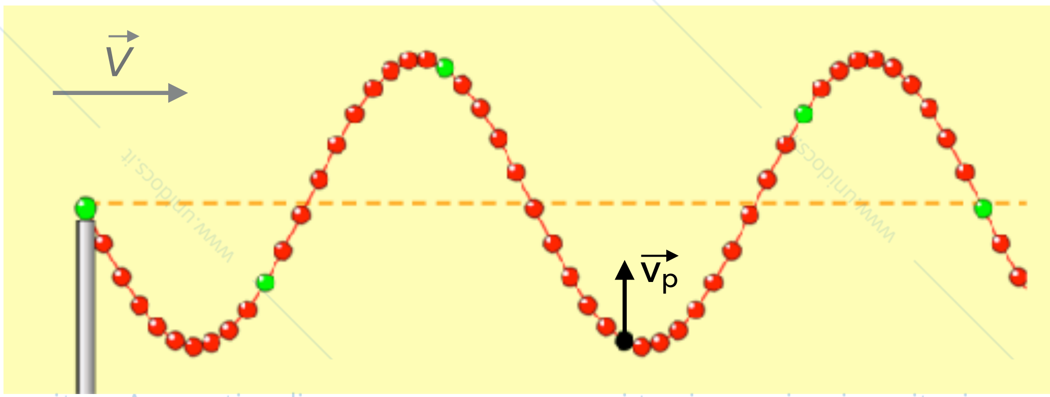
$$\boxed{y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)}$$

ONDE SINUSOIDALI

- Analogamente $y(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t)$ rappresenta un'onda viaggiante nella **direzione negativa** dell'asse x

- $v = \lambda \nu = \dfrac{\lambda}{T} = \dfrac{\omega}{k}$

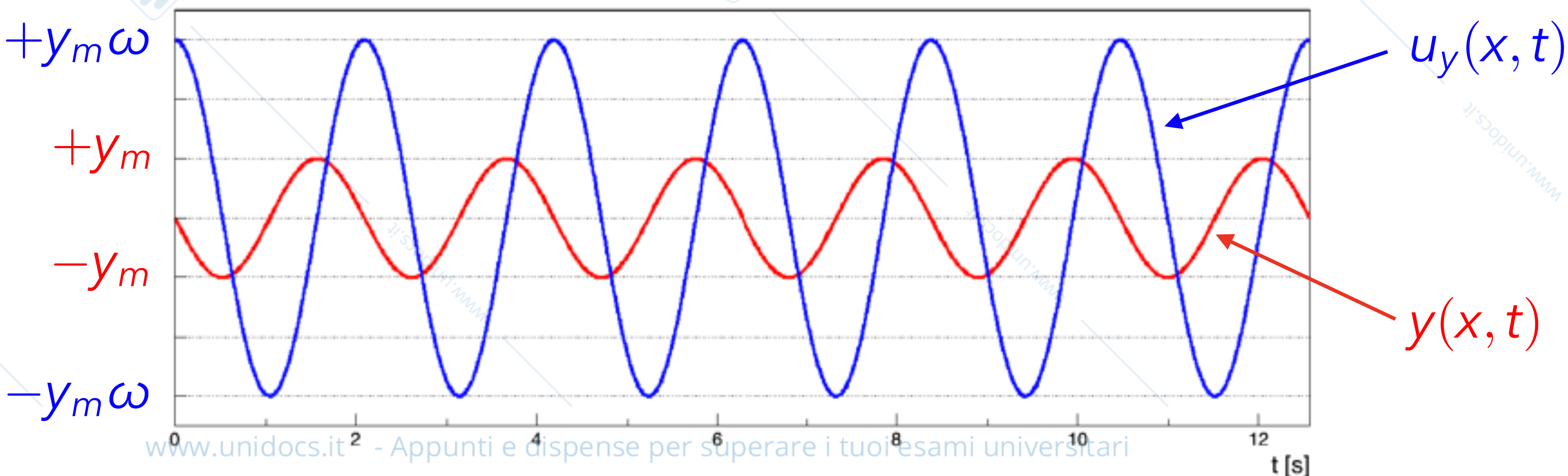
- La velocità di fase è la **velocità con cui si propaga l'onda** ma **non** è la velocità con cui si muovono le particelle investite dall'onda



ONDE SINUSOIDALI

- La velocità di un elemento di corda è parallela all'asse y
- La velocità $u_y(x, t)$ di un elemento di corda di ascissa x è la **derivata parziale** della funzione d'onda rispetto al tempo

$$u_y(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[y_m sin(kx - \omega t)\right] = -y_m \omega cos(kx - \omega t)$$

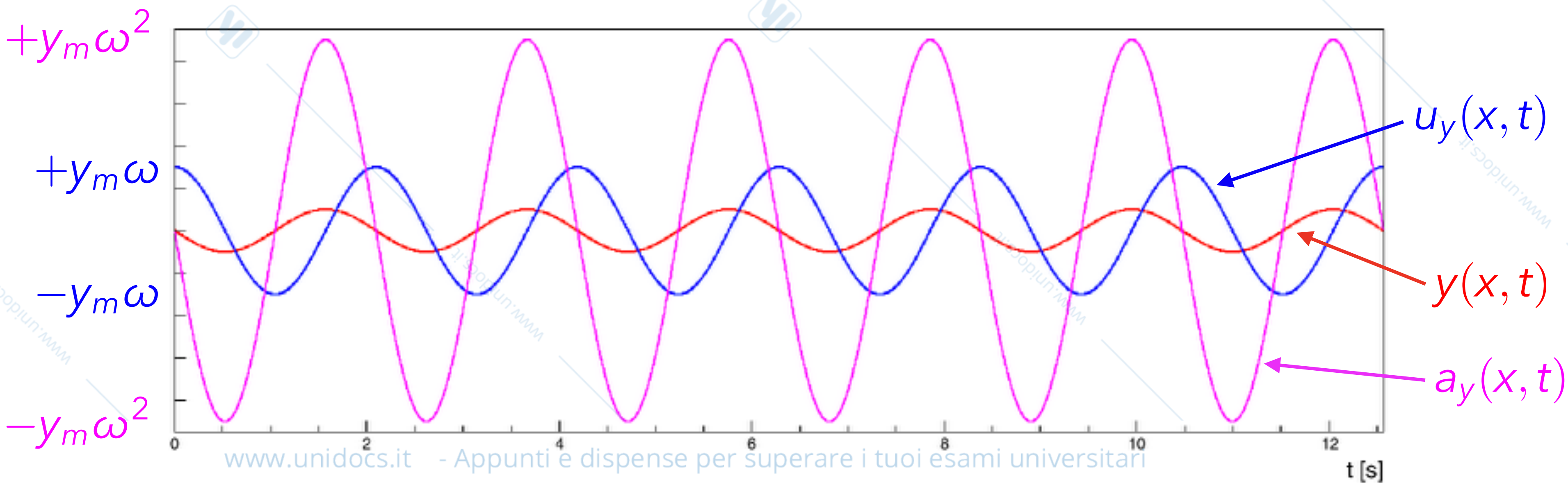


ONDE SINUSOIDALI

- Analogamente possiamo ricavare l'accelerazione

$$a_y(x,t) = \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = -y_m \omega^2 sin(kx - \omega t) = \boxed{-y\omega^2}$$

- Il passaggio di un'onda **sinusoidale** mette in moto gli elementi di corda di **moto armonico**



ONDE SINUSOIDALI

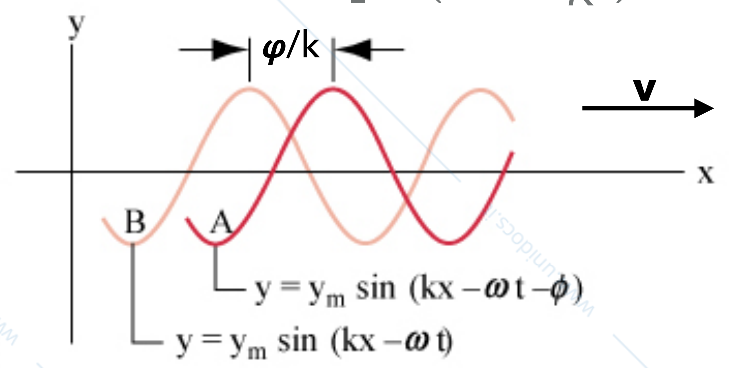
- L'equazione $y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$ **non** è nella forma più generale, ma descrive il caso particolare in cui $y(0,0) = 0$

- $y(x,t) = y_m \sin(\boxed{kx - \omega t - \varphi})$ è la forma più generale

  fase

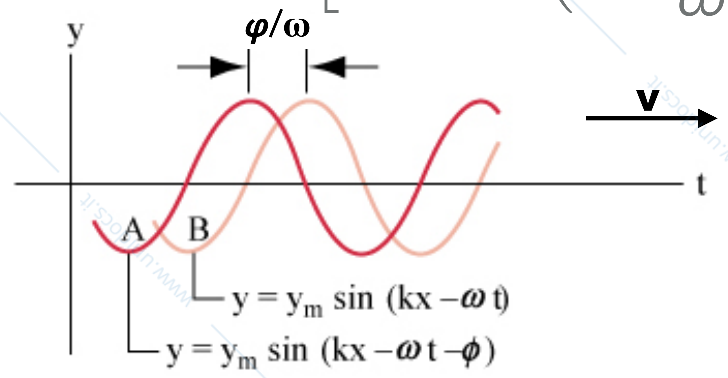
- φ è detta <u>*costante di fase*</u> e **descrive una traslazione dell'onda**

$$y(x,t) = y_m \sin\left[k\left(x - \frac{\varphi}{k}\right) - \omega t\right]$$



A precede B di φ/k

$$y(x,t) = y_m \sin\left[kx - \omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right]$$



A anticipa B di φ/ω

DISPERSIONE E DISSIPAZIONE

- Abbiamo visto che su una corda ideale la forma dell'onda rimane la stessa durante la propagazione

- Più in generale un impulso può cambiare forma (allargandosi) propagandosi in un mezzo, fenomeno noto come *dispersione*

- In questi casi definiamo il mezzo come *dispersivo*

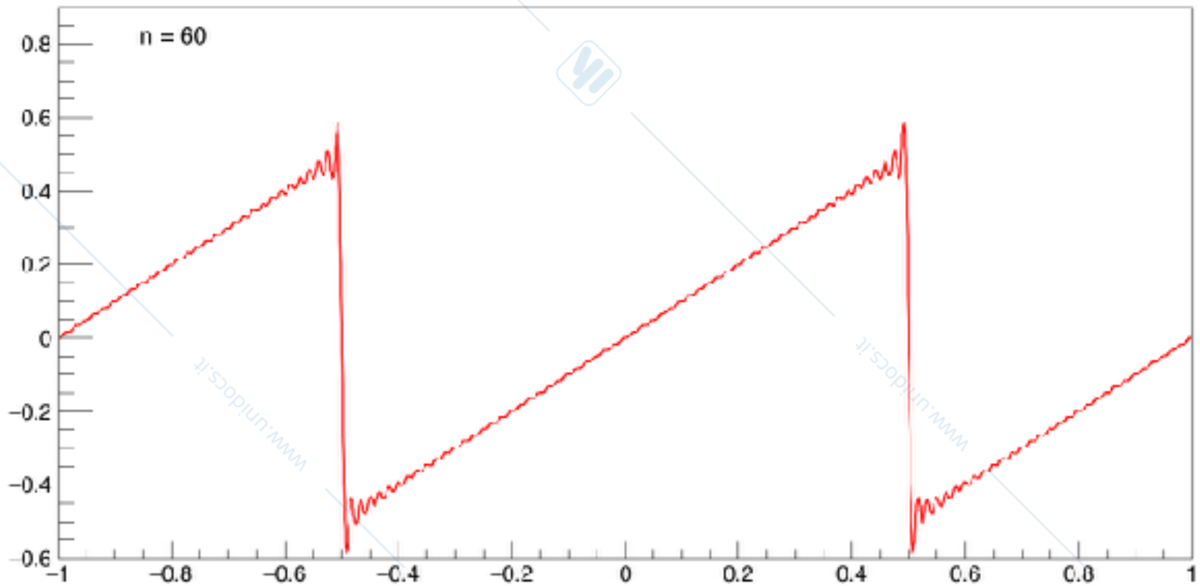
- La dispersione non va confusa con la *dissipazione*, infatti possiamo avere un mezzo **dispersivo ma non dissipativo**, in cui l'energia trasportata dall'impulso non decresce nel tempo

VELOCITÀ DI GRUPPO

- Le onde sinusoidali descritte in precedenza sono fondamentali
- È infatti possibile dimostrare che una **qualunque** onda periodica può essere pensata come la **sovrapposizione di infinite componenti sinusoidali** (con diversa ampiezza e frequenza)

Analisi di Fourier

Esempio



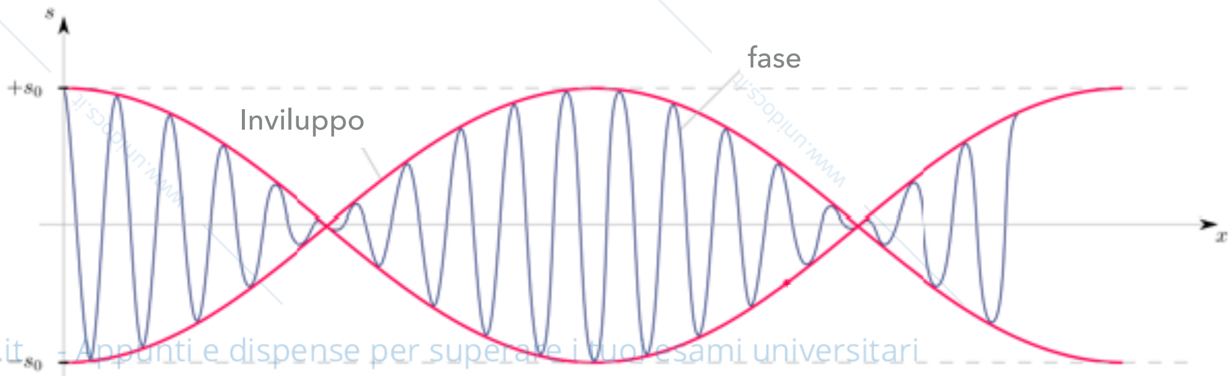
VELOCITÀ DI GRUPPO

- Una generica onda può essere quindi ricondotta ad una somma di onde sinusoidali di diversa ampiezza e frequenza (in generale)
- La velocità di fase **in un mezzo non dispersivo** dipende solo dalle **proprietà del mezzo e non dalle caratteristiche dell'onda**
- **In un un mezzo dispersivo** però dipende anche dalla **frequenza dell'onda** e ciò determina il cambiamento della forma d'onda
- Quindi oltre ad avere (in generale) differenti ampiezze e frequenze, **avranno anche differenti velocità di fase**

VELOCITÀ DI GRUPPO

- Che velocità avrà quindi questo *pacchetto* di onde sinusoidali?

- Introduciamo un nuovo concetto: la <u>*velocità di gruppo*</u>
- La velocità di gruppo è la velocità con cui si propaga l'<u>*inviluppo*</u> dell'onda ed è la **velocità con cui energia ed informazione sono trasportate**

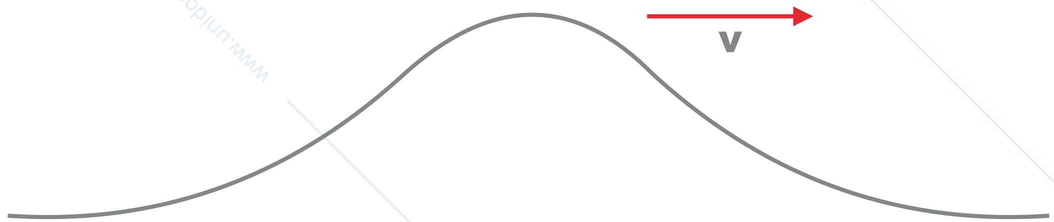


LEZIONE 2: MOTO ONDULATORIO

VELOCITÀ DI UN'ONDA SU UNA CORDA TESA

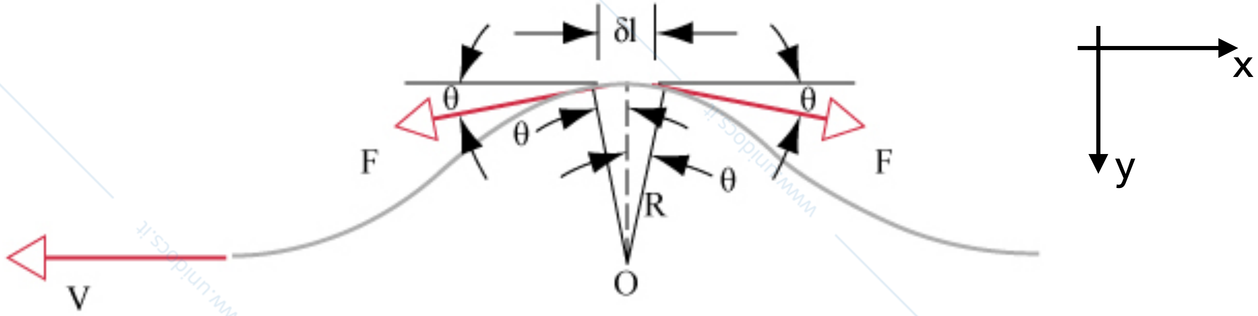
VELOCITÀ DI UN'ONDA SU UNA CORDA TESA

- Consideriamo un impulso che si propaga su una corda tesa (ideale) da **sinistra verso destra** con velocità di fase di modulo v



- In un **sistema di riferimento che viaggia con l'impulso** è la corda a muoversi da **destra verso sinistra** con velocità (di modulo) v

VELOCITÀ DI UN'ONDA SU UNA CORDA TESA

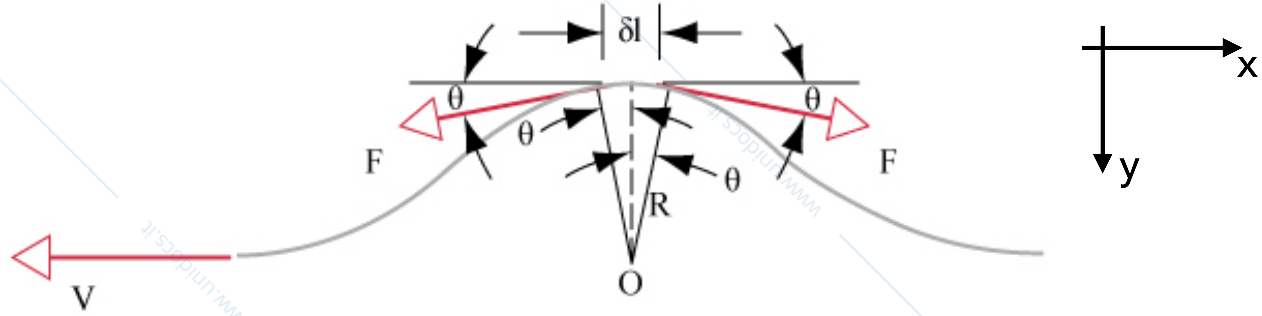


- Consideriamo un piccolo elemento di corda δl come in figura
- Le tensioni agli estremi (dirette tangenzialmente) si annullano in x e si sommano in y: $F_y = 2F\sin\theta$
- Se δl è sufficientemente piccolo possiamo scrivere

$$F_y = 2F\theta \quad \text{e} \quad \delta l = 2R\theta \longrightarrow F_y = F\frac{\delta l}{R}$$

Arco di circonferenza

VELOCITÀ DI UN'ONDA SU UNA CORDA TESA



- La forza F_y è la **forza centripeta** che permette alla particelle dell'elemento di corda di muoversi lungo un arco di circonferenza
- L'accelerazione agente su ogni particella è allora $a_y = \frac{v^2}{R}$
- Per l'elemento di corda δl: $\sum F_y = \delta m a_y$

$$\longrightarrow F\frac{\delta l}{R} = \delta m a_y \longrightarrow F\frac{\delta l}{R} = \delta m \frac{v^2}{R} \longrightarrow F\frac{\delta l}{R} = \mu \delta l \frac{v^2}{R} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

densità lineare

VELOCITÀ DI UN'ONDA SU UNA CORDA TESA

- $\sqrt{\frac{F}{\mu}}$ è dimensionalmente una velocità:

$$\left[\frac{F}{\mu}\right] = [\mathrm{kg\ m\ s^{-2}\ kg^{-1}\ m}] = [\mathrm{m^2\ s^{-2}}] = [v^2]$$

- μ è legato dell'inerzia della corda pertanto è prevedibile che al crescere di μ diminuisca la velocità

- La propagazione di un'onda in un mezzo è generalmente dovuta ad una perturbazione periodica e pertanto la $\nu_{onda} = \nu_{perturbazione}$

- Essendo la velocità determinata dalle proprietà del mezzo la lunghezza d'onda è **univocamente identificata**: $\lambda = v/\nu$

LEZIONE 2: MOTO ONDULATORIO

EQUAZIONE DELLE ONDE

EQUAZIONE DELLE ONDE

- Nella lezione 1 parlando delle oscillazioni abbiamo visto come moltissimi fenomeni sono descritti dalla legge oraria

$$x = x_m cos(\omega t + \varphi) \quad \text{soluzione di} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x$$

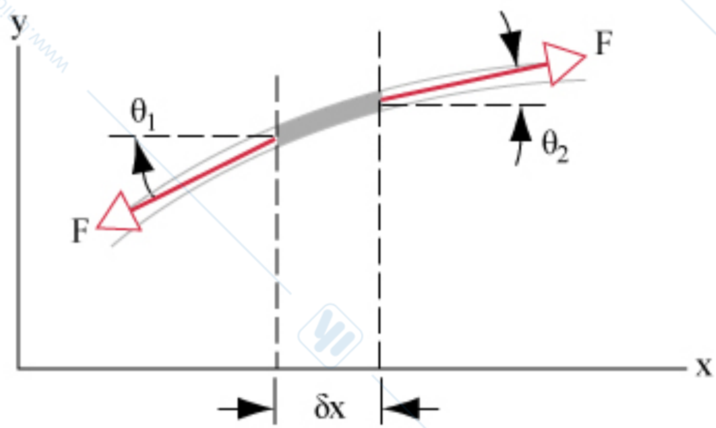
- Analogamente anche per fenomeni ondulatori da un'analisi puramente meccanica troveremo un equazione per le onde che ha un carattere generale e descrive moltissimi fenomeni fisici

- Dovendo rappresentare un'onda viaggiante, la soluzione di questa equazione sarà della forma

$$y(x,t) = f(x - vt) \quad \text{o} \quad y(x,t) = f(x + vt)$$

EQUAZIONE DELLE ONDE

- Considеriamo l'elemento di corda in figura che per effetto del passaggio di un'onda si scosta dalla posizione di equilibrio



- $\sum F_y = F\sin\theta_2 - F\sin\theta_1 \longrightarrow \sum F_y \approx F\tan\theta_2 - F\tan\theta_1 = F\delta(\tan\theta)$

$$\tan\theta_2 - \tan\theta_1 = \delta(\tan\theta)$$

- Trascurando attrito o alte sollecitazioni: $\sum F_y = \delta m a_y$

EQUAZIONE DELLE ONDE

- $\delta m = \mu \delta x \longrightarrow \sum F_y = \mu \delta x\, a_y \longrightarrow F\delta(tan\theta) = \mu \delta x\, a_y$

  $\longrightarrow \dfrac{\delta(tan\theta)}{\delta x} = \dfrac{\mu}{F} a_y$ 1

- $a_y = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ e $tan\theta = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ $\longleftarrow$ pendenza della corda

- Sostituendo le precedenti nella 1 otteniamo $\dfrac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \dfrac{\mu}{F}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

- Nel limite per cui la massa $\rightarrow$ 0: $\lim\limits_{\delta x \rightarrow 0} \dfrac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

EQUAZIONE DELLE ONDE

- L'equazione $\frac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ diventa $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \boxed{\frac{\mu}{F}}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$1/v^2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Equazione delle onde

- La precedente è stata ricavata nel caso di un'onda su corda ma **la stessa equazione riappare nei più disparati settori della fisica**

- Vogliamo verificare adesso che l'espressione generale per un'onda $y(x,t) = f(x \pm vt)$ è soluzione dell'equazione delle onde

EQUAZIONE DELLE ONDE

- Iniziamo a calcolare le derivate di *y(x, t)* rispetto a *x* e *t* usando per comodità la sostituzione $z = x \pm vt \longrightarrow y = f(z)$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \boxed{\frac{d^2 f}{dz^2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = \pm v\frac{df}{dz}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}} = \frac{d}{dz}\left(\pm v\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = (\pm v)^2\frac{d^2 f}{dz^2} = \boxed{v^2\frac{d^2 f}{dz^2}}$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

LEZIONE 2: MOTO ONDULATORIO

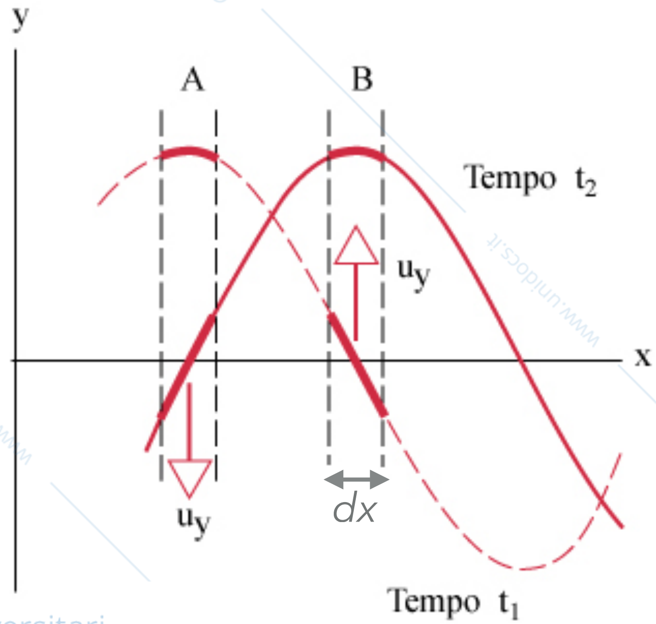
ENERGIA TRASPORTATA DA UN'ONDA

ENERGIA TRASPORTATA DA UN'ONDA

- Facendo oscillare un estremo libero di una corda si compio un **lavoro sulla corda** e le **trasferisce energia che si propaga con l'onda**

- Ogni elemento di corda possiede un'**energia cinetica** per il suo moto trasversale e un'**energia potenziale** essendo sottoposto alla tensione degli elementi adiacenti

- Consideriamo due elementi di corda di lunghezza dx agli istanti a t_1 e $t_2 = t_1 + T/4$

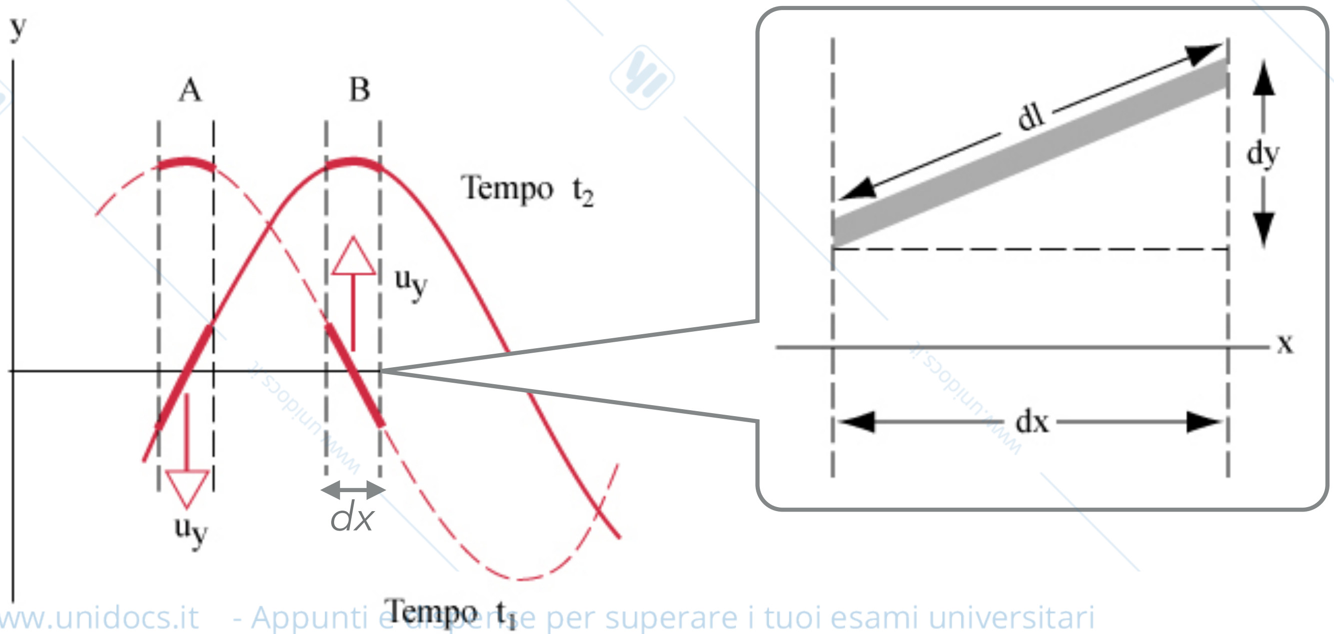


- La massa dell'elemento di corda è

$$dm = \mu dx$$

ENERGIA TRASPORTATA DA UN'ONDA

- $v_A(t_1) = 0$ mentre $v_A(t_2) > 0$ quindi acquista **energia cinetica**
- La lunghezza dell'elemento A all'istante t_1 è ~dx, mentre all'istante t_2 la sua **lunghezza è maggiore a causa della tensione della corda**, quindi acquista anche **energia potenziale**



ENERGIA TRASPORTATA DA UN'ONDA

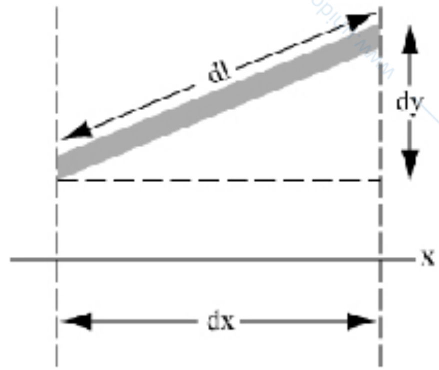
- Come visto in precedenza ogni punto della corda oscilla con una velocità pari a $u_y(x,t) = -y_m \omega cos(kx - \omega t)$

- L'*energia cinetica* dell'elemento di corda è quindi

$$dK = \frac{1}{2} dm u_y^2 = \frac{1}{2}(\mu dx)[-y_m \omega cos(kx - \omega t)]^2 = \frac{1}{2}\mu\, dx\, y_m^2 \omega^2 cos^2(kx - \omega t)$$

- L'*energia potenziale* corrisponde al lavoro compiuto dalla tensione F per allungare l'elemento di corda da dx a dl

$$dU = F(dl - dx) = F\left(\sqrt{dx^2 + dy^2} - dx\right)$$

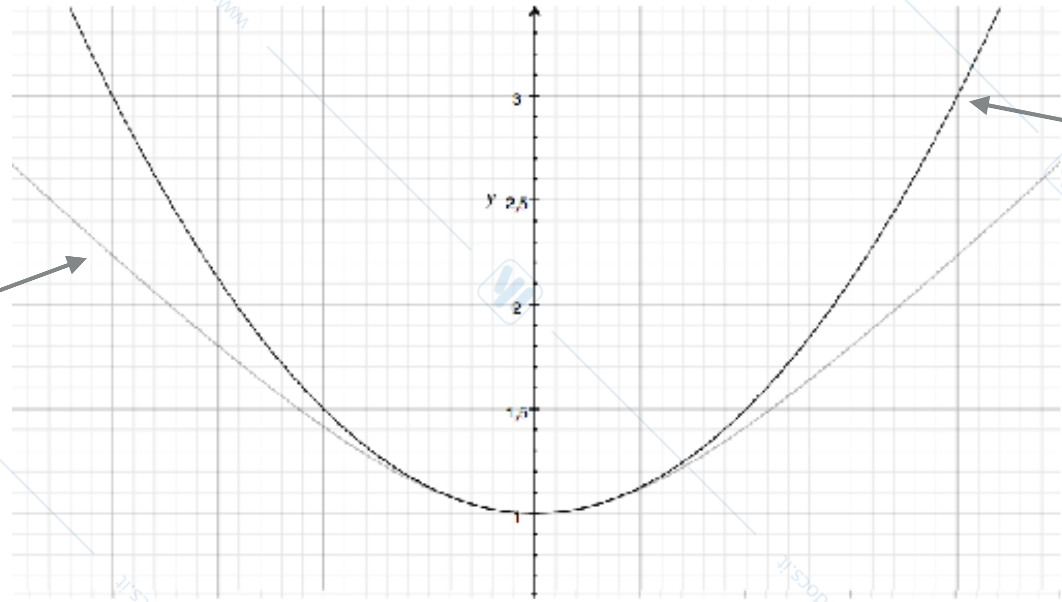


ENERGIA TRASPORTATA DA UN'ONDA

- $dU = F\left(\sqrt{dx^2 + dy^2} - dx\right) \longrightarrow dU = Fdx\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1\right]$

sviluppo in serie binomiale

$(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$



$1 + \frac{1}{2}x^2$

- Se $\frac{\partial y}{\partial x}$ è piccolo $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

ENERGIA TRASPORTATA DA UN'ONDA

- $dU = \frac{1}{2}Fdx\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

- $y(x,t) = y_m sin(kx - \omega t) \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = y_m kcos(kx - \omega t)$

$v^2\mu = (w/k)^2\mu$

$$dU = \frac{1}{2}F dx\, y_m^2 k^2 cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2}\mu\, dx\, y_m^2 \omega^2 cos^2(kx - \omega t)$$

- È uguale all'energia cinetica $dE = \frac{1}{2}\mu\, dx\, y_m^2 \omega^2 cos^2(kx - \omega t)$

- L'energia meccanica totale $dE = dK + dU$ **non si conserva!**

ENERGIA TRASPORTATA DA UN'ONDA

- Il fatto che l'energia totale **di un elemento di corda** non si conservi non è un problema: **non è un sistema isolato**

- La variazione di *dE* in un tempo *dt* (ovvero la _potenza trasportata dall'onda_) è quindi

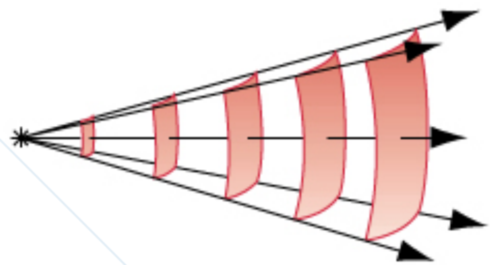
$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 2\frac{dU}{dt} = \mu\omega^2 y_m^2 v \cos^2(kx - \omega t)$$

- La _potenza media_ è $\overline{P} = \mu\omega^2 y_m^2 v\overline{\cos^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 v$

- La potenza trasportata da un'onda (**qualsiasi**) dipende dal quadrato dell'ampiezza e dal quadrato della frequenza

INTENSITÀ

- Per onde sferiche il contenuto energetico di un fronte d'onda si distribuisce su un'area sempre più grande



- È utile pertanto introdurre il concetto di *intensità* $I = \frac{P}{A} \left[\frac{W}{m^2}\right]$

- Per l'intensità delle onde sonore (ma non solo) è molto utilizzato il concetto di *decibel (dB)*

$$I_L = 10\, log_{10} \left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Intensità acustica in dB

Intensità acustica

Soglia udibilità $10^{-12}\ W/m^2$