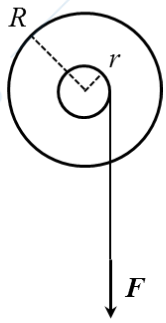
Politecnico di Milano – Scuola di Ingegneria dell'Informazione
AA 2011-2012

2/7/2012
ore 16:30

FISICA (seconda verifica in itinere)

Proff. Della Valle, Nisoli, Torricelli

1) Un disco circolare omogeneo di raggio R e massa M è libero di ruotare senza attrito attorno a un asse orizzontale passante per il suo centro. Inizialmente il disco è fermo. Su un cilindretto (coassiale e rigidamente collegato al disco) di raggio r e di massa trascurabile è avvolta una fune ideale. All'altro estremo della fune è applicata una forza costante di modulo F. Partendo da fermo, il disco si mette in moto e compie 5 giri completi in un intervallo di tempo Δt secondi. Si determini, in funzione di R, r, M e Δt:
a) il modulo della velocità angolare del disco in funzione del tempo;
b) il modulo della forza $\boldsymbol{F}$.



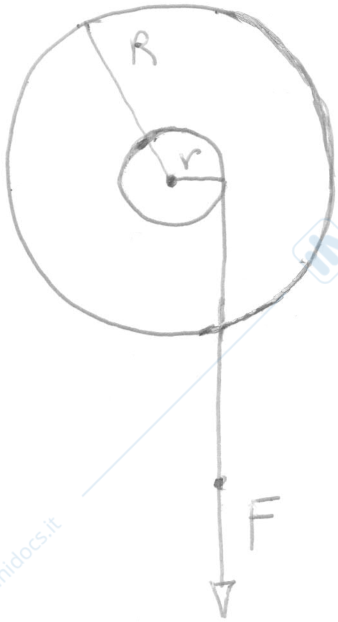
2) Si calcoli la velocità di fuga (per un osservatore terrestre) di un oggetto lanciato lungo la verticale nel piano equatoriale nei due casi seguenti:
a) trascurando la rotazione della Terra;
b) considerando anche la rotazione della Terra.
[Si indichi con M la massa della Terra, con R il suo raggio, con ω la sua velocità di rotazione e con G la costante di gravitazione universale]

3) Un gas perfetto monoatomico viene fatto espandere secondo la trasformazione pV^2 = costante. Si determini il rapporto fra il calore scambiato e il lavoro prodotto durante la trasformazione.

4) Si consideri un sistema termodinamico che può scambiare calore con una sola sorgente. Si dica, giustificando la risposta, se le seguenti affermazioni sono corrette.
a) In nessuna circostanza il sistema può compiere lavoro.
b) Quando il sistema assorbe calore la sua entropia necessariamente aumenta.
c) Quando il sistema cede calore la sua entropia necessariamente diminuisce.

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA
- ***FIRMARE*** *l'elaborato*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate*

1.



In base alla II eq. cardinale della dinamica per un corpo rigido abbiamo:

$$\tau_z = I_z \alpha$$

essendo $\tau_z = Fr$ il momento risultante di tutte le forze esterne applicate al sistema rispetto ad un polo fisso situato sull'asse z, I_z il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse z, α la accelerazione angolare istantanea di rotazione intorno a z.
Per un disco omogeneo è noto che risulti $I_z = \frac{1}{2}MR^2$, da cui

$$\alpha = \frac{2rF}{MR^2}$$

Il corpo rigido ruota quindi con accelerazione angolare costante, si muove perciò di moto rotatorio uniformemente accelerato, secondo la legge

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Poichè inizia il moto sotto l'azione di F, $\omega_0 = 0$.

Quindi

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}rF}{MR^2}t^2, \text{ (assumendo } \vartheta_0 = 0\text{)}.$$

Possiamo allora determinare F imponendo la condizione che al tempo $t = \Delta t$ $\vartheta(t)$ valga $5 \cdot 2\pi$ (cinque giri in un intervallo di tempo Δt). Abbiamo:

$$10\pi = \frac{rF}{MR^2}(\Delta t)^2$$

da cui

$$F = \frac{10\pi MR^2}{r(\Delta t)^2}$$

Il modulo della velocità angolare ω in funzione del tempo sarà dunque:

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{2\cancel{r}}{\cancel{MR^2}} \cdot \frac{10\pi \cancel{MR^2}}{\cancel{r}(\Delta t)^2} t = \frac{20\pi}{(\Delta t)^2} t$$

2.

La condizione di fuga è rappresentata dalla orbita aperta dotata della minima energia (orbita parabolica) in un sistema di riferimento inerziale. È noto che tale orbita possiede energia nulla in un tale sistema di riferimento. La velocità di fuga si determina quindi imponendo

$$E = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = 0, \text{ da cui}$$

$$v = v_F = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Tale velocità è riferita ad un sistema di riferimento inerziale, perciò coincide con la velocità di fuga misurata da un osservatore solidale con la superficie terrestre solo se si trascura il moto rotatorio della Terra, diversamente si ha invece che tale velocità di fuga v_F' (relativa) risulta minore, dovendo valere la seguente legge di composizione:

$$v_F^2 = v_F'^2 + \omega^2 R^2, \text{ da cui}$$

$$v_F' = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \omega^2 R^2}$$

3.

Si noti che essendo definita da una relazione matematica la trasformazione in esame è senz'altro quasistatica, dunque il lavoro compiuto dal sistema lungo la trasformazione sarà $\mathcal{L} = \int p\,dV$.

Consideriamo un tratto infinitesimo della trasformazione, allora $\delta\mathcal{L} = p\,dV$ e $\delta Q = n c_v dT + p\,dV$ in base al I PTD per un gas ideale ($\delta Q = dU + \delta\mathcal{L}$ e $dU = n c_v dT$). Il rapporto $\delta Q/\delta\mathcal{L}$ vale quindi

$$r = \frac{\delta Q}{\delta\mathcal{L}} = 1 + \frac{n c_v dT}{p\,dV}$$

Differenziando l'equazione di stato del gas ideale abbiamo:

$$d(pV) = d(nRT) \Rightarrow p\,dV + V\,dp = nR\,dT$$

Perciò risulta

$$r = 1 + \frac{c_v}{R}\,\frac{p\,dV + V\,dp}{p\,dV} = 1 + \frac{c_v}{R} + \frac{c_v}{R}\,\frac{V\,dp}{p\,dV}$$

Differenziando la legge di trasformazione troviamo infine:

$$d(pV^2) = d(\text{costante}) \Rightarrow p\,2V\,dV + V^2 dp = 0$$

da cui $V\,dp = -2p\,dV$, quindi

$$r = 1 + \frac{c_v}{R} - 2\frac{c_v}{R} = 1 - \frac{c_v}{R} = -\frac{1}{2} \quad \left(c_v = \frac{3}{2}R\right)$$

4.

a) Falso.
Infatti in una trasformazione isoterma reversibile di un gas ideale il sistema compie lavoro assorbendo calore da una sola sorgente.
Inoltre in generale alla luce del I PTD il lavoro compiuto dal sistema è

$$\mathcal{L} = Q - \Delta U$$

Quindi qualunque sistema termodinamico che compia una trasformazione monoterma nella quale la variazione di energia interna ΔU risulti negativa oppure risulti positiva ma minore della quantità di calore assorbita dal sistema Q può compiere lavoro ($\mathcal{L} > 0$).
Tuttavia se si considerano trasformazioni cicliche allora il II PTD nella formulazione di Kelvin vieta la possibilità di compiere lavoro scambiando calore con una sola sorgente.
Dunque l'asserto (a) è vero certamente per tutte le trasformazioni cicliche.

b) Vero.
Consideriamo infatti il sistema termodinamico unione della sorgente e del sistema che compie la trasformazione monoterma. Sia U tale sistema unione.

Per costruzione risulta che U è termicamente isolato. Sappiamo quindi che vale per U la legge di accrescimento della entropia. Cioè ogni trasformazione di U da origine ad una variazione di entropia positiva (trasf. irreversibile) o nulla (trasf. reversibile). Quindi

$$\Delta S_U = \Delta S + \Delta S_s \geq 0 \text{, ove}$$

ΔS: variazione di entropia del sistema che compie la trasf. monoterma

ΔS_s: variazione di entropia della sorgente.

Per una qualunque sorgente ideale alla temperatura T, si ha, come è noto:

$$\Delta S_s = -\frac{Q}{T}$$

essendo Q la quantità di calore assorbito ($Q>0$) o ceduto ($Q<0$) dal sistema che scambia calore con tale sorgente.

Quindi se $Q>0$ (sistema assorbe calore) $\Delta S_s < 0$, ma dovendo essere $\Delta S_U \geq 0$, quindi $\Delta S + \Delta S_s \geq 0$, possiamo certamente concludere che $\Delta S \geq -\Delta S_s > 0$.

Quindi l'asserto b) è sempre vero.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

c) Falso.
Analogamente al caso precedente ma con $\Delta S_s > 0$, troviamo

$$\Delta S \geq -\Delta S_s \ (<0)$$

Quindi sono ammissibili per ΔS anche valori positivi (l'entropia può quindi aumentare anche se il sistema cede calore).
Tuttavia se la trasformazione è reversibile, valendo l'uguaglianza, sarà

$$\Delta S = -\Delta S_s \ (<0)$$

Quindi solo per trasf. reversibili l'asserto c) è certamente vero.

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari