

## 2.11 Le Forze di Attrito

### I quattro tipi di attrito

Le forze di attrito si manifestano quando due corpi sono in contatto e si oppongono al moto relativo. Si distinguono quattro tipi principali di attrito:

- *attrito radente*: è la forma più comune di attrito; si manifesta tra le superfici di due corpi solidi in contatto. Si distingue a sua volta in attrito radente *statico* ed attrito radente *dinamico*;
- *attrito volvente*: si manifesta quando un corpo solido rotola su un altro corpo solido;
- *attrito del mezzo* o *attrito viscoso*: costituisce la resistenza opposta da un fluido (liquido o gassoso) al moto di un corpo solido;
- *attrito interno*: agisce fra i diversi strati di un fluido viscoso in moto (liquido o gassoso).

Studieremo ora più in dettaglio le caratteristiche dell'attrito radente.

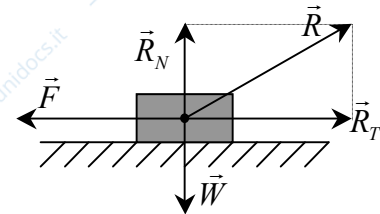
**Oss.** Nel caso di un punto materiale vincolato a muoversi sulla superficie di un corpo solido, l'attrito radente esperito dal punto materiale per effetto del contatto con tale superficie può essere riguardato a tutti gli effetti come una reazione vincolare della superficie stessa, diretta tangenzialmente alla superficie invece che lungo la normale.

### Attrito radente statico

Consideriamo un corpo di massa  $m$  avente una superficie  $S$  appoggiata su un piano orizzontale (non perfettamente liscio). Se applichiamo al corpo una forza  $\vec{F}$  orizzontalmente si verifica che:

- se il modulo  $F$  della forza è inferiore ad un certo valore  $F_{\max}$  il corpo non si sposta, mentre se  $F > F_{\max}$  il corpo si sposta nella direzione di  $\vec{F}$ ;
- il valore limite per l'equilibrio,  $F_{\max}$ , risulta inoltre indipendente, almeno entro ampi limiti, dall'area della superficie di appoggio  $S$ ;
- variando invece il peso  $W = mg = R_N$  del corpo (forza attiva verticale), e quindi della reazione normale del piano,  $F_{\max}$  cresce proporzionalmente secondo la legge:  $F_{\max} = \mu_s \cdot R_N$

Il coefficiente di proporzionalità  $\mu_s$  prende il nome di *coefficiente di attrito statico*, ed è una caratteristica dei due mezzi posti in contatto. Dipende fortemente dallo stato delle superfici (diminuisce se sono molto lisce).



### Origine delle forze di attrito

La superficie di contatto *effettiva* fra i due corpi non dipende dalla superficie di appoggio, che è di norma molto maggiore della prima, ma dalla *forza* che tende ad avvicinare i corpi.

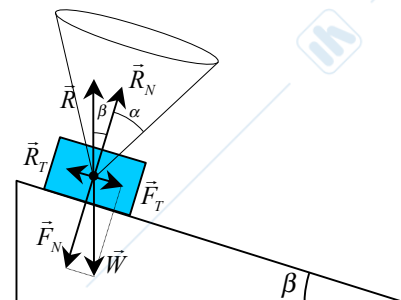
Sulla superficie di contatto effettiva avvengono infatti delle "microfusioni" fra i due corpi, simili a legami chimici, che si oppongono al moto.

### Equilibrio di un corpo appoggiato su un piano inclinato

Se un corpo viene appoggiato su un piano inclinato di un angolo  $\beta$ , la forza peso si può scomporre in una forza normale ed una tangente alla superficie piana, che valgono:

$$F_N = mg \cos \beta \Rightarrow R_N = mg \cos \beta$$

$$F_T = mg \sin \beta \Rightarrow R_T = mg \sin \beta \leq \mu_s mg \cos \beta$$



**Oss.** Dunque un corpo rimane fermo su di un piano inclinato scabro ( $\mu_s$ ) solo se l'angolo di inclinazione del piano  $\beta$  è minore dell'angolo  $\alpha = \arctg(\mu_s)$ .

Attrito radente dinamico

Se un corpo si muove su una superficie piana, la forza di attrito  $\vec{R}_T$  risulta proporzionale alla forza attiva normale al piano stesso, ed indipendente dalla superficie di contatto e dalla velocità del corpo.

$$R_T = \mu_d \cdot R_N$$

Il coefficiente di proporzionalità  $\mu_d$  prende il nome di *coefficiente di attrito dinamico*.

**Oss.** Si verifica sperimentalmente che risulta sempre  $\mu_d \leq \mu_s$ .

**Oss.** Ciò significa che la forza necessaria per *mantenere in moto* un corpo vincendo le forze di attrito è sempre *minore* di quella necessaria per *metterlo in moto*.

Ecco alcuni valori tipici di coefficienti di attrito statico e dinamico:

Materiali	$\mu_s$	$\mu_d$
acciaio su acciaio	0.78	0.42
rame su acciaio	0.53	0.36
teflon su teflon	0.04	0.04
platino su platino	1.2	-

## 2.12 Esempi notevoli di moto di un punto materiale

Vediamo di seguito alcuni esempi “notevoli” di problemi di dinamica che sono risolvibili per via analitica. Essi rappresentano per lo più dei veri e propri “classici” della dinamica anche perché ebbero storicamente un ruolo fondamentale proprio agli albori del metodo sperimentale.

### 2.12.1 Moto sotto l'effetto di una forza costante

Il moto è *uniformemente accelerato*, con accelerazione pari al rapporto tra la forza e la massa del punto materiale. La traiettoria è in generale di tipo *parabolico*, come quella di un grave nel campo gravitazionale, che è stato studiato in cinematica (moto del proiettile).

### 2.12.2 Moto lungo un piano inclinato liscio

Un grave (un punto materiale) di massa  $m$  si trova a muoversi su di un *piano liscio* inclinato di un angolo  $\alpha$  rispetto all'orizzontale e di altezza  $h$ . Il punto materiale è inizialmente fermo sulla sommità del piano inclinato. Determinare la legge oraria del suo moto e la velocità finale con cui giunge al suolo.

#### Analisi delle forze in campo e diagramma delle forze a corpo libero.

Poiché il piano è *perfettamente liscio*, trascuriamo le forze di attrito (radente). Avremo perciò, oltre alla **forza peso** del corpo in moto, solo la **reazione vincolare** del piano, ortogonale alla superficie del piano stesso. Rappresentiamo in un disegno tutte le forze agenti sul punto materiale, comprese le reazioni vincolari (diagramma delle forze a corpo libero).

#### Scelta del SdR.

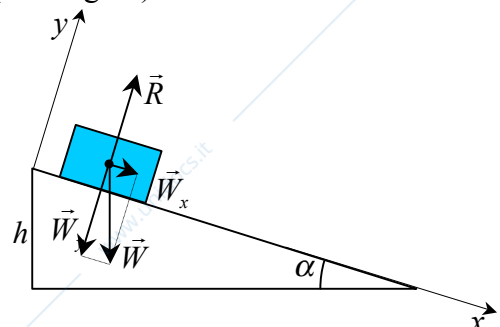
Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano opportuno (vedi figura).

#### Equazioni del moto.

Scomponiamo tutte le forze lungo le direzioni ortogonali del nostro SdR. La forza peso lungo le direzioni  $x$  ed  $y$  avrà rispettivamente componenti:

$$W_x = m g \sin \alpha$$

$$W_y = -m g \cos \alpha$$



Scriviamo le equazioni scalari del moto:

$$\begin{cases} W_x = ma_x & \text{lungo dir. } x \\ R + W_y = ma_y & \text{lungo dir. } y \end{cases}$$

### **Integrazione delle equazioni del moto.**

Integriamo le equazioni del moto imponendo:

- i vincoli cinematici: lungo la direzione  $y$  il vincolo del piano impone che sia  $a_y = 0$ ;
- le condizioni iniziali:  $\vec{x}_0 = 0$  ;  $\vec{v}_0 = 0$ .

Dunque il moto risulta essere unidimensionale lungo la direzione  $x$ :

$$v_x(t) = v_{0,x} + \int_0^t a(t') dt' = g \sin \alpha t$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt' = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

**Oss.** Il moto è uniformemente accelerato ed il diagramma spazio-tempo è di tipo parabolico.

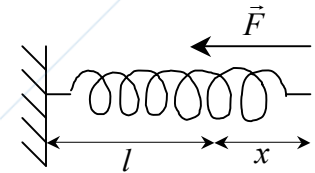
**Oss.** Nota la lunghezza  $L$  del piano inclinato possiamo determinare l'intervallo di tempo  $t_f$  che il corpo impiega a percorrerlo e quindi la sua velocità finale  $v_f$ :

$$L = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha t_f^2 \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2 \alpha}} ; v_f = v(t_f) = \sqrt{2gh}$$

**Oss.** La velocità finale non solo non dipende dalla massa, ma neppure dall'inclinazione  $\alpha$  del piano, ed inoltre risulta essere la stessa di un grave in caduta libera dalla quota  $h$ .

### 2.12.3 Moto di un punto materiale vincolato ad una molla elastica

Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  appoggiato su di un piano orizzontale liscio vincolato ad una molla di costante elastica  $k$  ed in moto lungo l'asse parallelo alla molla, asse  $x$ .



**Oss.** Se scegliamo lo zero dell'asse  $x$  in corrispondenza dell'estremo libero della molla quando essa si trova a riposo, allora la deformazione  $\Delta l$  della molla si indica semplicemente con  $x$ .

Dall'espressione della forza elastica si ricava subito l'equazione del moto:

$$F = -kx = ma_x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Riconosciamo in essa l'equazione caratteristica di un moto armonico semplice lungo l'asse  $x$  di pulsazione  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Perciò la soluzione è del tipo  $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ , come si verifica facilmente sostituendo tale espressione nella precedente equazione differenziale.

**Oss.** Per determinare il valore delle due costanti  $A$  e  $\varphi$ , imponiamo le condizioni iniziali.

Ricordando che  $v(t) \triangleq dx(t)/dt = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$ , abbiamo:

$$\begin{cases} x(0) = A \sin \varphi = x_0 \\ v(0) = \omega A \cos \varphi = v_0 \end{cases}$$

Se, ad esempio, assumiamo  $v_0 = 0$ , avremo

$$\begin{cases} \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \\ A = \pm x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \pm x_0 \sin\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) = x_0 \cos(\omega t) \Rightarrow v(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$$

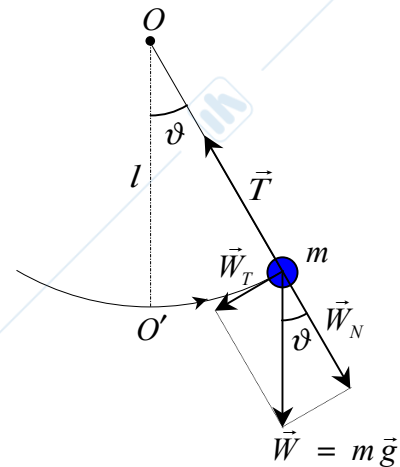
### 2.12.4 Moto di un pendolo semplice

Un punto materiale di massa  $m$  è vincolato ad un punto  $O$  attraverso una fune ideale (inestensibile di lunghezza  $l$  e di massa trascurabile).

**Oss.** La traiettoria del suo moto non può che essere un arco di circonferenza di raggio  $l$ , sul quale prendiamo un'ascissa curvilinea  $s$ .

**Oss.** Trascuriamo la forza di attrito viscoso dell'aria e le altre forze di attrito.

Prendiamo come verso positivo della coordinata curvilinea il verso antiorario di percorrenza della traiettoria, e fissiamo lo zero nel punto in cui la massa transita per la verticale. Abbiamo allora  $s(t) = \vartheta(t) \cdot l$



Scegliamo un sistema di riferimento cartesiano locale T,N, e scomponiamo lungo queste due direzioni le forze agenti su  $m$ :  $W_T = -mg \sin \vartheta$  ;  $W_N = -mg \cos \vartheta$

Le equazioni del moto lungo le direzioni tangente e normale alla traiettoria sono allora:

$$\begin{cases} W_T = m a_T = m \frac{d^2 s}{dt^2} = ml \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta \\ T + W_N = m a_N \Rightarrow T - mg \cos \vartheta = m \frac{v^2(\vartheta)}{l} = \frac{m}{l} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = ml \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \end{cases}$$

#### **Oss.**

Si tratta di un sistema di due **equazioni differenziali non lineari** nella due funzioni incognite  $\vartheta(t)$  e  $T(t)$ . Quindi una soluzione analitica in generale non c'è!

**Oss.** Consideriamo la prima equazione. Se ci limitiamo al caso di *piccole oscillazioni* del pendolo, cioè ad angoli molto minori di 1 rad, essa ammette una soluzione analitica. Avremo infatti:

$$\sin \vartheta \cong \vartheta \Rightarrow \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l} \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta(t) = A \sin(\omega t + \varphi) ; \omega = \sqrt{g/l}$$

**Oss.** Consideriamo ora la seconda equazione. Poichè abbiamo già determinato  $\vartheta(t)$  dalla prima, è immediato determinare  $T(t)$ .

Della espressione di  $\vartheta(t)$  ricaviamo  $\frac{d\vartheta}{dt} = A\sqrt{g/l} \cos(\omega t + \varphi)$ , e quindi:

$$T(t) = mg \cos \vartheta + ml \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = mg \left[ \cos \vartheta + \frac{l}{g} \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right] = mg \left\{ \cos[A \sin(\omega t + \varphi)] + A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \right\}$$

#### **Oss. Estremi relativi della velocità.**

La velocità della massa  $m$  è  $v(t) = l \frac{d\vartheta}{dt} = A\sqrt{gl} \cos(\omega t + \varphi)$  dunque, sempre per piccole oscillazioni, presenta anch'essa un andamento di tipo armonico, ma sfasato di  $90^\circ$  rispetto a quello di  $\vartheta(t)$ . Dunque la velocità è minima ove  $\vartheta(t)$  è massima, e cioè nei punti estremi della

oscillazione, anche detti punti di inversione della oscillazione, e risulta massima quando  $\vartheta(t)$  è minima, ossia quando  $\vartheta(t)$  è nulla, cioè al passaggio di  $m$  per la verticale.

**Oss. Condizioni iniziali e determinazione delle costanti.**

Analogamente a quanto fatto per il moto oscillatorio di un punto materiale vincolato ad una molla, dalle condizioni iniziali del moto si determinano i valori di  $A$  e  $\varphi$ .

Ad esempio, se diciamo che il pendolo inizia ad oscillare quando viene spostato di un angolo  $\vartheta_0$  dalla verticale, intendiamo che  $\vartheta(t=0) = \vartheta_0$  e che  $v(t=0) = 0$ . Ma, in base all'espressione generale della soluzione, deve essere  $\vartheta(t=0) = A \sin(\varphi)$  e quindi  $\vartheta_0 = A \sin(\varphi)$ . Inoltre, sempre in base alla espressione generale della velocità, deve essere  $v(t=0) = A\sqrt{gl} \cos(\varphi)$  e quindi  $A\sqrt{gl} \cos(\varphi) = 0$ . L'ultima equazione è evidentemente soddisfatta se  $\varphi = \pi/2$  (il caso  $A = 0$  va escluso perchè risulterebbe in una soluzione identicamente nulla ad ogni istante) e possiamo perciò concludere che  $\vartheta_0 = A \sin(\pi/2) = A$ .

La soluzione diventa quindi  $\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\omega t + \pi/2) = \vartheta_0 \cos(\omega t)$ .

**Oss.** Si noti che la tensione è massima quando il pendolo è verticale, nella posizione di equilibrio: in questo caso vale  $mg(1 + A^2)$ , dovendo bilanciare l'intera forza peso ed assicurare anche la massima accelerazione centripeta poichè in questo punto del moto è massima la velocità.

**OSS. Legge di isocronismo del pendolo.**

Il periodo di oscillazione risulta quindi essere:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Si noti che non dipende dalla *massa*  $m$  del corpo, né dall'*ampiezza*  $A$  delle oscillazioni (finché rimangono "piccole"), ma solo dalla lunghezza del pendolo. Questo è il contenuto della **legge di isocronismo del pendolo**, scoperta da Galileo.