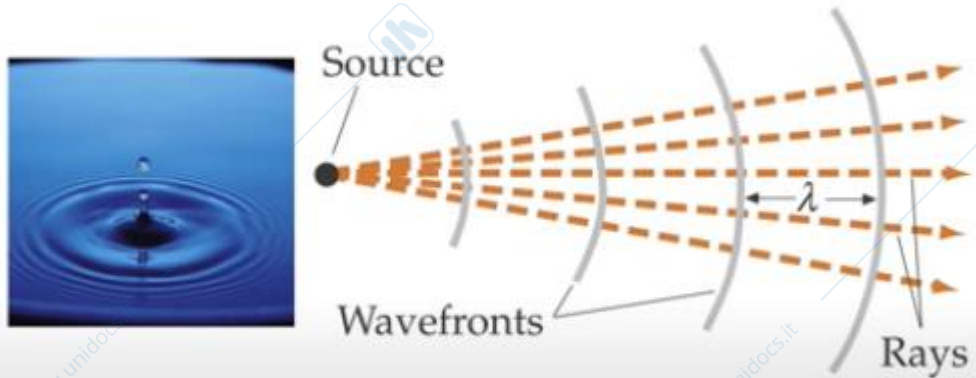


## Continuazione onde:

### Propagazione delle onde

Su di un piano l'onda si propaga con fronti d'onda circolari, nello spazio con fronti d'onda sferici.



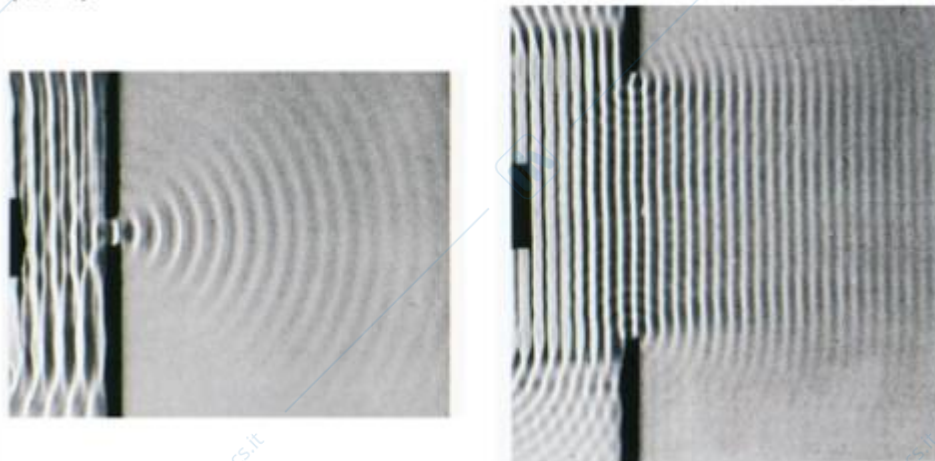
Si può considerare che in un materiale omogeneo e isotropo, sufficientemente distante dalla sorgente, un'onda si propaghi in linea retta, con i fronti d'onda perpendicolari alla direzione della velocità di propagazione

Se consideriamo una propagazione bidimensionale abbiamo fronti d'onda bidimensionali, come quelli delle onde sulla superficie di uno stagno.

Una sorgente puntiforme nello spazio segue una propagazione con fronti d'onda sferici.

### Diffrazione

Se però un'onda incontra ostacoli di dimensioni paragonabili alla lunghezza d'onda intervengono fenomeni di diffrazione. Ogni porzione del fronte d'onda può essere assimilata ad una sorgente puntiforme che dà origine ad nuovi fronti d'onda circolari (sferici).



Abbiamo delle onde approssimativamente piane che passando attraverso una fenditura generano fronti d'onda circolari.

Diffrazione.

### Sovrapposizione degli effetti

L'equazione matematica che descrive il comportamento fisico dell'onda è un'equazione lineare

L'ampiezza risultante di un'onda in un punto dove arrivano due (o più) onde è la somma vettoriale delle ampiezze

L'origine dell'interferenza è matematica → di un'equazione lineare.

$$\begin{array}{r}
 y = 2x \\
 x = 1 \quad y = 2 \\
 x = 2 \quad y = 4 \\
 \hline
 3 \quad 6 \\
 c = 2 \cdot 3
 \end{array}$$

anche sommando due soluzioni dell'equazione si ottiene un'altra soluzione dell'equazione.

È lineare perché contiene solo derivate.

### Sovrapposizione degli effetti

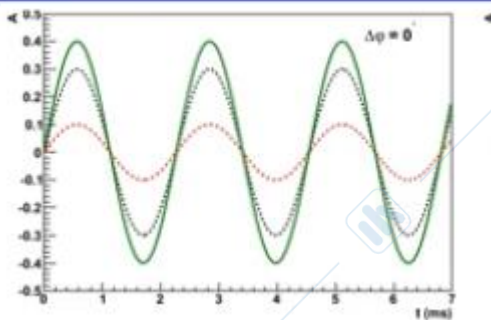
L'equazione matematica che descrive il comportamento fisico dell'onda è un'equazione lineare

L'ampiezza risultante di un'onda in un punto dove arrivano due (o più) onde è la somma vettoriale delle ampiezze

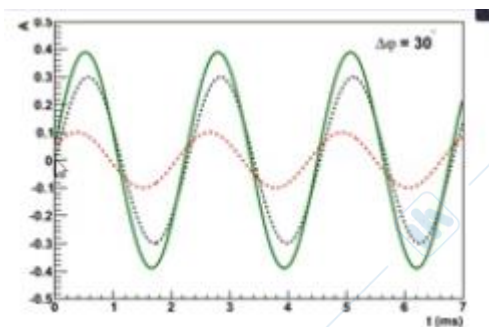
Due situazioni sono particolarmente interessanti:

- onde con lo stesso periodo e **coerenti** (la differenza di fase tra le due onde è costante nel tempo)  
si produce il fenomeno dell'interferenza
- onde con periodi leggermente diversi  
si producono i battimenti

## Interferenza

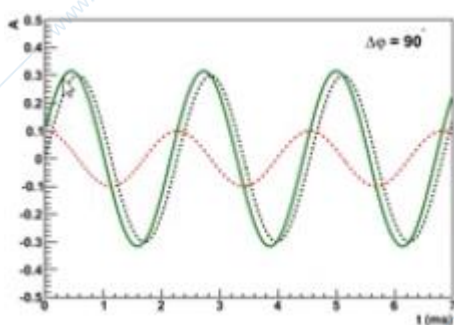


Le onde si dicono in fase perché hanno la stessa frequenza in quanto il periodo di oscillazione è identico e la stessa fase che non cambia nel tempo, la differenza di fase tra le due onde è zero, perché una sale quando l'altra sale e scende quando l'altra scende e gli zeri sono nello stesso punto.

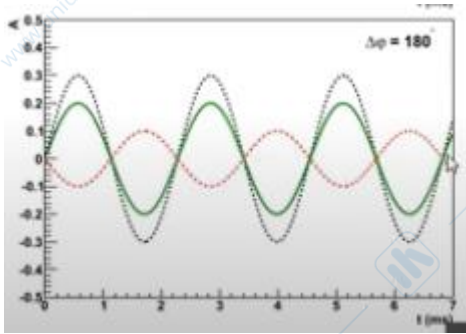


Possiamo introdurre una differenza di fase per cui l'onda rossa risulta in anticipo.

L'onda verde non ha + la stessa ampiezza.



Una scende quando l'altra sale.

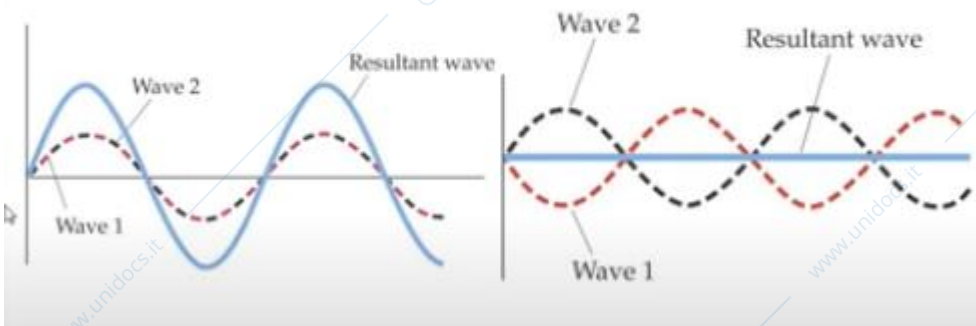


Se abbiamo uno sfasamento di  $180^\circ$ , cioè le due onde sono in opposizione di fase, allora vediamo come l'ampiezza dell'onda risultante verde raggiunge il suo valore minimo.

Una differenza di fase  $= 0$  viene detta interferenza costruttiva perché le due onde interferiscono costruttivamente per dare un'onda verde di ampiezza + grande; la condizione di differenza di fase di  $180^\circ = \pi$  greca è interferenza distruttiva, perché sono in opposizione di fase.

Se si considera l'interferenza di due onde della stessa ampiezza si può avere:

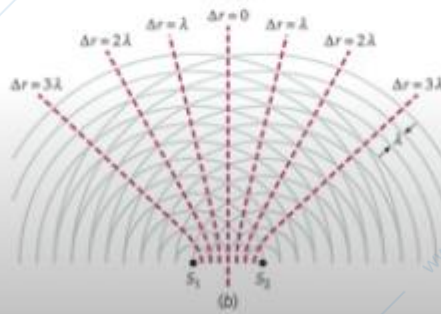
- un raddoppio dell'ampiezza in caso di interferenza costruttiva
- una cancellazione completa del suono nel caso di interferenza distruttiva



## Esempio di interferenza



(a)



(b)

Abbiamo zone dello spazio dove si può avere interferenza costruttiva e zone dove si può avere interferenza distruttiva.

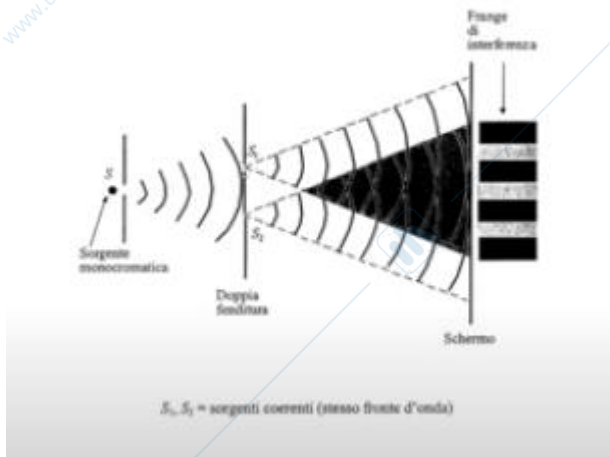
Questo perché lo sfasamento delle onde è determinato dal tempo dell'onda a raggiungere un certo punto. Quindi, in certe zone la differenza di tempo di percorrenza fa sì che ci si trovi in una condizione di interferenza costruttiva e in altre zone di interferenza distruttiva.

06. interferenza della luce:

### Esperimento di Young

- Nel 1801 Thomas Young eseguì un esperimento il quale dimostrava la **natura ondulatoria** della luce.
- L'**esperimento di Young** (o della **doppia fenditura**) è rappresentato schematicamente in figura. Un fascio di luce monocromatica passa attraverso una prima fenditura e quindi attraverso due altre fenditure ( $S_1$  e  $S_2$ ). Sullo schermo si forma una figura (**figura di interferenza**) che consiste di una serie di fasce chiare alternate a fasce scure, dette **frange di interferenza**.

L'interferenza è una conseguenza del principio di sovrapposizione degli effetti che vale per le onde, v. slides 08-1-elasticita.pdf, pagina 59



Abbiamo un fascio di luce monocromatica che passa prima da una fenditura e dopo attraverso due altre fenditure.

La luce di questa sorgente che viene diffratta passando attraverso questa prima fenditura genera dei fronti d'onda sferici; quando questi fronti d'onda arrivano sulle altre due fenditure, l'onda risultante è coerente, perché prodotta da questo passaggio e cioè da questa prima diffrazione.

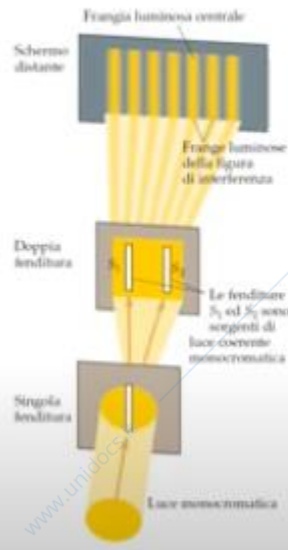
A questo punto si ottengono due sorgenti che sono coerenti che sono nella stessa fase.

Sono sorgenti adatte per produrre il fenomeno dell'interferenza.

Quando si vede che cosa succede alla luce proiettata sullo schermo si ottengono le frange di interferenza: dove la luce che arriva dalle due fenditure arriva in fase, oppure con la differenza di fase di una lunghezza d'onda, oppure di due lunghezze d'onda abbiamo la luce.

Quando la lunghezza è di mezza sfasamento d'onda allora si ha un'interferenza distruttiva ed abbiamo buio.

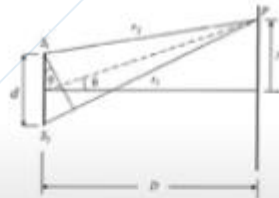
## Interferenza e coerenza



- Il fenomeno della sovrapposizione degli effetti avviene sempre
- Per poter osservare l'interferenza occorre che la differenza di fase di due onde rimanga costante nel tempo  $\Rightarrow$  coerenza temporale
- Nella dimostrazione in aula dell'interferenza delle onde sonore la coerenza veniva realizzata utilizzando due altoparlanti pilotate dalla stessa sorgente ad una frequenza fissata. [V. slides 08-1-elasticita.pdf, pagina 63](#)
- Nell'esperimento di Young la stessa sorgente luminosa illumina le due fenditure.

### Spiegazione quantitativa

- Dalla figura si vede che le due onde, provenienti da  $S_1$  e  $S_2$ , percorrono cammini diversi (rispettivamente  $r_1$  e  $r_2$ ) per raggiungere un generico punto  $P$  sullo schermo.
- La differenza di cammino tra le due onde è ( $d$  = distanza tra le due fenditure,  $D$  = distanza tra le fenditure e lo schermo):



$$r_1 - r_2 = d \theta \quad d \ll D \quad \Rightarrow \quad \theta = \sin \theta$$

$$r_1 - r_2 = d \sin \theta$$

$$d \sin \theta = n \lambda$$

$n$  indica 'n volte'.

- Se la differenza di cammino è un **multiplo intero** di lunghezze d'onda si ha **interferenza costruttiva** e il **massimo** di intensità sullo schermo (centro delle frange chiare).

$$r_1 - r_2 = m\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



- Se la differenza di cammino è un **multiplo semintero** di lunghezze d'onda si ha **interferenza distruttiva** e **intensità uguale zero** sullo schermo (centro delle frange scure).

$$r_1 - r_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

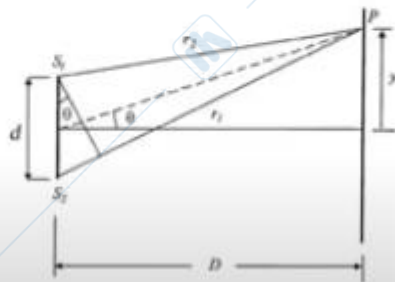


Conoscendo l'angolo  $\theta$ :

### Distanza tra due frange adiacenti

- Dalla figura si ottiene per la coordinata  $y$  del punto  $P$  sullo schermo:

$$y = D \tan \theta = D \sin \theta$$



Possiamo trovare la posizione sullo schermo della frangia di interferenza.

## Interferenza da uno strato sottile



Si generano due onde coerenti che hanno una differenza di cammino dovuto al fatto che una è stata riflessa sulla superficie e l'altra dalla parte inferiore dello strato, quindi si allontanano nella stessa direzione e interferiscono.

## Iridescenza



In natura l'interferenza produce colorazioni senza la presenza di pigmenti.

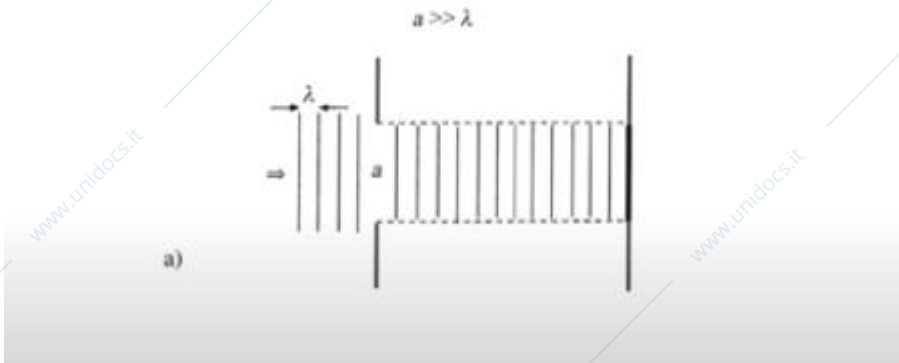
In natura viene sfruttata per produrre colorazioni senza la presenza di pigmenti, per esempio il colore blu è prodotto da un fenomeno di interferenza; soltanto per la lunghezza d'onda della luce blu si ha un'interferenza costruttiva.

È una situazione particolare che viene detta iridescenza.

07. diffrazione della luce.

### Il fenomeno della diffrazione

- La figura a) rappresenta un'onda luminosa piana che incide su uno schermo contenente un foro circolare di diametro  $a$ . Se  $a$  è grande rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$  della luce, su di uno schermo a grande distanza  $D$  dal foro appare un disco luminoso (immagine dell'apertura) dello stesso diametro  $d$ , come previsto dall'ottica geometrica.

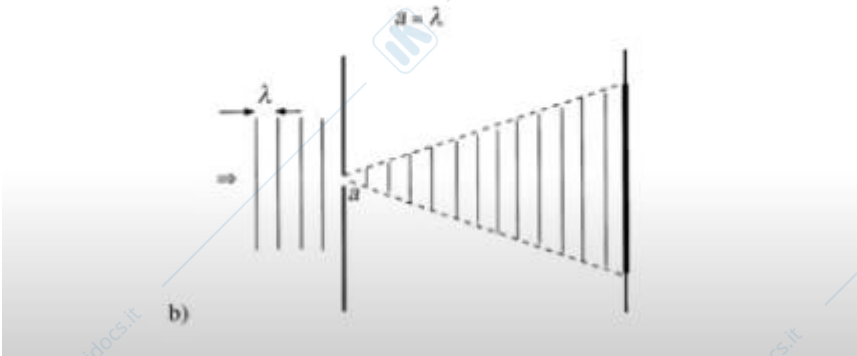


Anche le onde luminose subiscono la rifrazione, ma solo quando incontrano fenditure di dimensioni paragonabili a quelle della lunghezza d'onda incidente.

Se le onde meccaniche passano da una fenditura molto maggiore della lunghezza d'onda, il fenomeno non appare evidente.

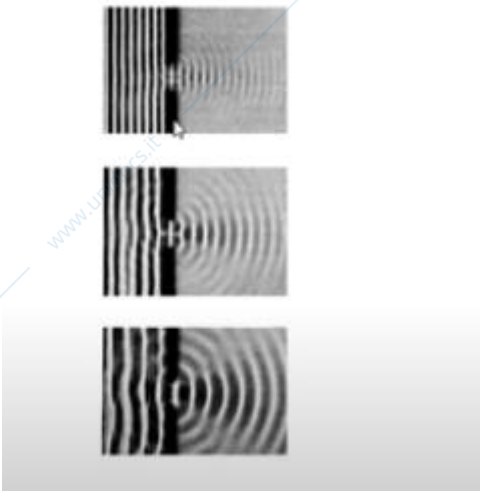
Se noi consideriamo un raggio di luce che incide su una fenditura molto grande, l'immagine proiettata nello schermo avranno la stessa dimensione della fenditura. Ad un certo punto abbiamo un fascio di raggi paralleli.

- Se si diminuisce il diametro del foro fino a dimensioni dell'ordine della lunghezza d'onda  $\lambda$ , il fascio emergente si allarga, e sullo schermo appare un disco luminoso di diametro diverso da quello previsto dall'ottica geometrica (proporzionale a  $2\lambda D/a$ ), circondato da anelli alternativamente chiari e scuri. Questo è il fenomeno della **diffrazione** che diventa evidente quando l'approssimazione dell'ottica geometrica ( $a \gg \lambda$ ) non è più valida.



Se andiamo a restringere il diametro della fenditura e andiamo a larghezze paragonabile alla lunghezza d'onda, si osserva che l'immagine proiettata ma anziché continuare a stringersi si allarga e si forma un disco + grande della fenditura che ha prodotto questa immagine un disco circondato da anelli alternativamente + scuri e + chiari.

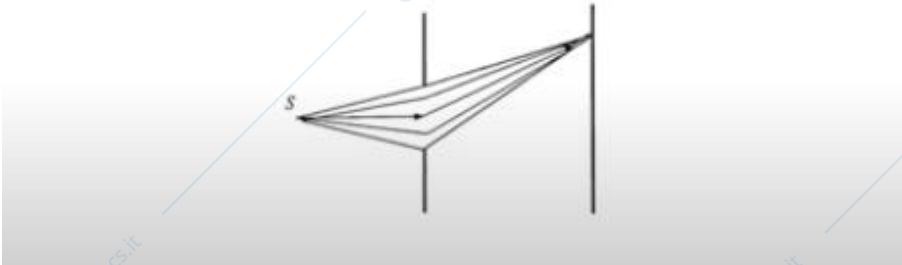
#### Diffrazione di onde liquide



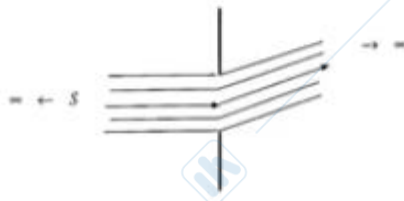
+ diventa piccolo il diametro del foro, + le diffrazioni sono evidenti.

## Diffrazione di Fresnel e di Fraunhofer

- **Diffrazione di Fresnel:** figure di diffrazione che si osservano quando la sorgente luminosa e lo schermo su cui si forma la figura di diffrazione sono posti a distanza finita dall'apertura (o dall'ostacolo) che producono la diffrazione della luce. In questo caso i fronti d'onda non sono piani e i raggi associati ai fronti d'onda che arrivano sullo schermo non sono paralleli.



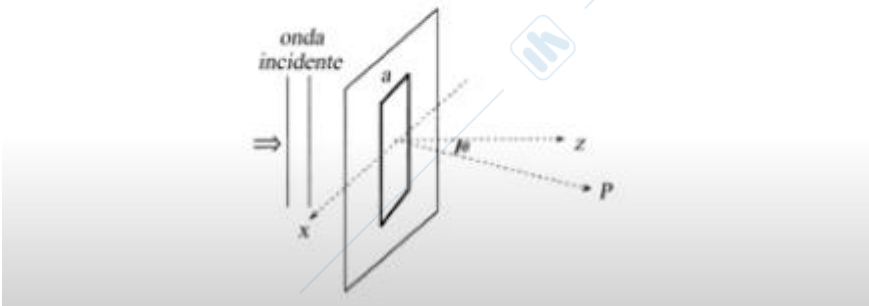
- **Diffrazione di Fraunhofer:** figure di diffrazione che si osservano quando la sorgente e lo schermo sono a grande distanza dall'apertura (o dall'ostacolo). In questo caso i fronti d'onda sono piani e i raggi sono paralleli.

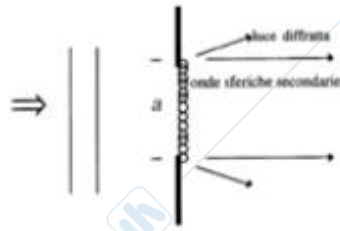


- La diffrazione di Fraunhofer è un caso particolare della diffrazione di Fresnel, ed è più facile da trattare dal punto di vista matematico.
- Le figure di Fraunhofer si possono osservare usando una lente per fare convergere i raggi paralleli sullo schermo posto nel piano focale della lente.

## Fenditura rettangolare

- La figura rappresenta un'apertura (*fenditura*) rettangolare di larghezza  $a$  sulla quale incide un'onda piana in direzione perpendicolare. Sullo schermo posto a distanza  $D$  dalla fenditura si forma la figura di diffrazione ( $\theta$  è l'angolo sotto cui dal centro della fenditura si vede un punto  $P$  sullo schermo).



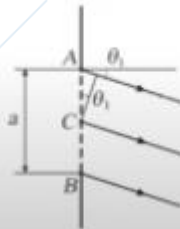


- Per il principio di Huygens, ogni punto del fronte d'onda che colpisce la fenditura è sorgente di onde sferiche secondarie. Gli involucri di queste onde rappresentano i fronti d'onda piani (*diffrazione di Fraunhofer*) delle onde emergenti dalla fenditura ai vari angoli. L'interferenza tra queste onde secondarie produce la *figura di diffrazione* in figura.



### Minimi di intensità

- Angolo ( $\theta_1$ ) dove si ha il primo minimo di intensità della figura di diffrazione (a destra e a sinistra del massimo centrale):
  - Si considerino i due raggi che hanno origine nel punto A (bordo superiore della fenditura) e C (centro della fenditura) e che formano l'angolo  $\theta_1$  con la direzione orizzontale.
  - La differenza di cammino tra le onde secondarie che hanno origine in questi due punti è  $x = 1/2 a \sin \theta_1$ ; questa è la differenza di cammino tra le onde generate da tutte le coppie di punti (da A a B) che distano  $a/2$ .



Si ha un minimo di intensità ( $I = 0$ ) quando le coppie di onde secondarie sono in **opposizione di fase**; e questo si verifica quando  $x$  è uguale a  $\lambda/2$ :

$$x = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow a \sin \theta_1 = \lambda$$

- I minimi di ordine superiore si hanno in corrispondenza degli angoli  $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots$  e sono dovuti all'**interferenza distruttiva** dei raggi paralleli che hanno origine dalle coppie di punti sul fronte d'onda che distano  $a/4; a/6, a/8, \dots$ :

$$\frac{a}{4} \sin \theta_2 = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow a \sin \theta_2 = 2\lambda$$

$$\frac{a}{2m} \sin \theta_m = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow a \sin \theta_m = m\lambda$$

**Minimi di diffrazione ( $I = 0$ )**

$$a \sin \theta = m \lambda \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

### Massimi di intensità

- Oltre al **massimo centrale**, il quale corrisponde a  $\theta = 0$  (tutti i raggi provenienti dai vari punti del fronte d'onda sono paralleli, e le corrispondenti onde secondarie sono tutte in fase), ci sono dei piccoli **massimi secondari** che si trovano approssimativamente a metà strada tra due minimi. Gli angoli corrispondenti a questi massimi si ricavano dalla seguente relazione:

#### Massimi secondari di diffrazione

$$a \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

(i calcoli precisi danno  $m = \pm 0.93, \pm 1.96, \pm 2.97, \dots$ )

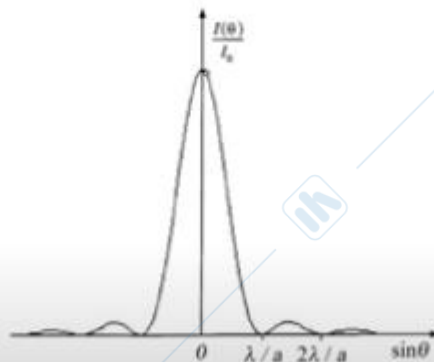
### Distribuzione dell'intensità

- Dal calcolo della **distribuzione dell'intensità** della figura di diffrazione (funzione  $I(\theta)$ ) si ottiene :

$$I = I_0 \left( \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2$$

$$\alpha = \frac{k a}{2} \sin \theta = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta$$

- In figura è rappresentata la distribuzione di intensità  $I(\theta)$  in funzione di  $\sin \theta$ .



## Osservazioni

- Il massimo principale (centrale) si ha per  $\theta = 0$  ( $\sin\theta = 0$ ), ed è  $I = I_0$ .
- Quando  $\theta$  ( $\sin\theta$ ) aumenta, i massimi secondari diventano sempre più piccoli, con valori:

$$I_1 = 0.047 I_0, I_2 = 0.017 I_0, I_3 = 0.0088 I_0, \dots$$

- Più del 90% dell'intensità è concentrata attorno al massimo principale tra i valori  $\sin\theta = \pm\lambda/a$  (posizione angolare del primo minimo a destra e a sinistra del massimo principale). Per piccoli valori di  $\lambda/a$  ( $\sin\theta \approx \theta$ ), la semiampiezza angolare del massimo centrale è  $\theta_s = \lambda/a$ .
- Il rapporto  $\lambda/a$  determina la larghezza della figura di diffrazione: per una data lunghezza d'onda ( $\lambda$ ), al diminuire di  $a$ , aumenta la larghezza della figura di diffrazione (cioè, si accentua il fenomeno della diffrazione). Questo è l'aspetto caratteristico del comportamento ondulatorio della luce.

## Potere risolutivo

- Se l'apertura è circolare invece che rettangolare, la figura di diffrazione da essa formata è un disco circolare (massimo centrale) circondato da alcuni anelli secondari, progressivamente meno intensi.



- La curva che rappresenta l'intensità in funzione di  $\sin\theta$  (nelle condizioni di Fraunhofer) è dello stesso tipo di quella dell'apertura rettangolare. La posizione angolare del primo minimo, a differenza del caso della fenditura rettangolare, è data da ( $d$  = diametro dell'apertura circolare):

$$\sin\theta = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad \sin\theta = \theta \Rightarrow \theta = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

- Questa formula permette di stabilire un criterio per distinguere due sorgenti puntiformi distanti la cui separazione angolare è piccola. In figura le due sorgenti indipendenti  $S_1$  e  $S_2$  emettono radiazioni della stessa lunghezza d'onda, hanno la stessa intensità, e sono separate dall'angolo  $\theta$ . Al decrescere di  $\theta$ , le due figure di diffrazione si sovrappongono sempre più, fino a che sarà difficile riconoscere se le sorgenti sono due o una sola.



- Il **criterio**, detto **criterio di Rayleigh**, stabilisce che la minima separazione angolare di due sorgenti puntiformi tale che si possa dire che le loro immagini su di uno schermo distante sono separate è

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d}$$

in corrispondenza della quale il massimo della figura di diffrazione di una sorgente coincide con il primo minimo della figura di diffrazione dell'altra sorgente.

### Osservazioni

- L'angolo  $\theta_R$  è denominato '**risoluzione angolare**' dell'apertura circolare: se  $\theta > \theta_R$  le due sorgenti si considerano distinte.
- Il reciproco della risoluzione angolare è detto **potere risolutivo** (o **potere separatore**) dell'apertura circolare. Esso indica la capacità di uno strumento ottico di **risolvere** due oggetti vicini tra di loro, cioè, di darne immagini distinte.

$$\theta_R = 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad d \approx 3 \text{ mm} \quad \lambda \approx 500 \text{ nm}$$

$$\theta_R = 1.22 \frac{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\frac{1}{60} : 360 = \alpha : 2\pi \quad \alpha = \frac{2\pi}{360} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

