

Le leggi della dinamica

Si consideri un blocco fissato ad una molla e libero di muoversi senza attrito.

Quando la molla viene *allungata* di un tratto x , esercita sul blocco una forza data da

$$F_x = -k x(t)$$

Prende il nome di **legge di Hooke** o **legge della forza elastica**.

La **costante k** dipende dalla molla (è una misura della sua rigidità).

Il segno meno indica che **la molla si oppone allo spostamento** (positivo o negativo).

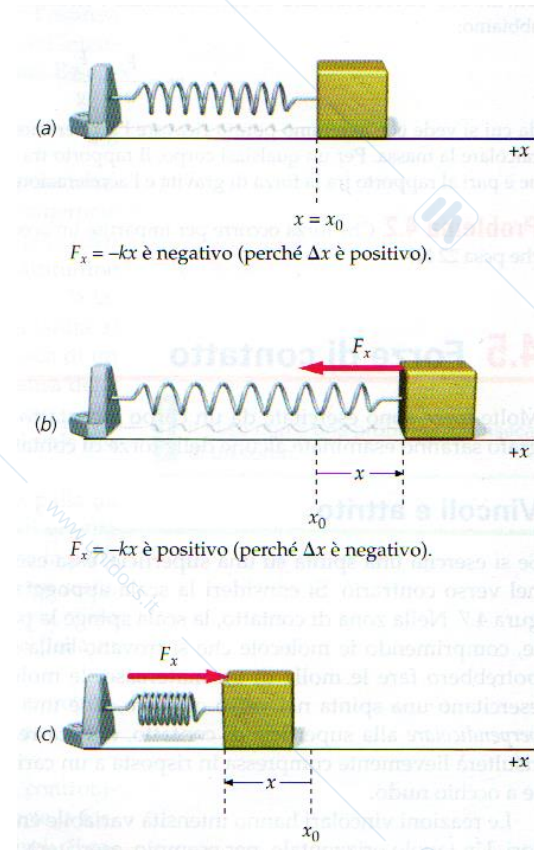
Si può poi anche scrivere che è:

$$F_x = -k x(t) = m a_x(t) \quad \Rightarrow \quad a_x(t) = -\frac{k}{m} x(t)$$

e anche che

$$a_x(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t)$$

L'**accelerazione** è **proporzionale** allo **spostamento** ed il segno meno indica che le due grandezze hanno **verso opposto**.



Questa espressione, riportata qui sotto, è una caratteristica dei *moti armonici semplici*, che abbiamo già incontrato precedentemente:

$$a(t) = -\frac{k}{m} x(t)$$

Dalla matematica si può vedere che l'equazione è soddisfatta ad esempio da una funzione del tipo

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

con $A =$ **ampiezza**, $\omega =$ **frequenza angolare** e $\phi =$ **fase iniziale** costanti.

Infatti è

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

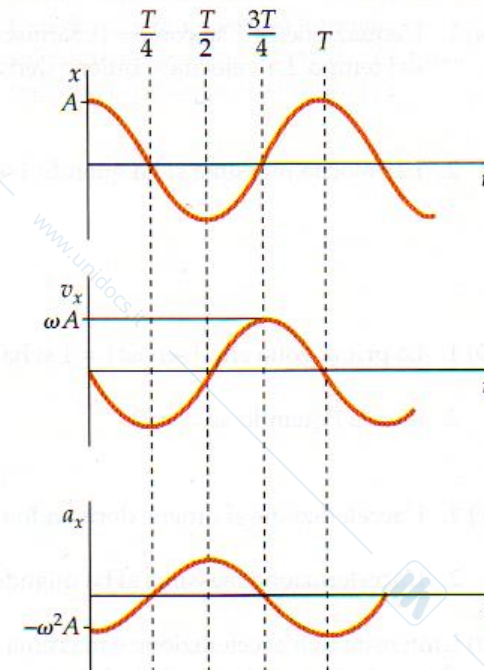
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

e sostituendo nell'equazione precedente si vede che è soddisfatta assumendo che sia

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Il **periodo** T del moto è il **più breve intervallo** per il quale si ha

$$x(t) = x(t + T)$$



e quindi

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \phi) &= A \cos[\omega(t + T) + \phi] \\ &= A \cos(\omega t + \phi + \omega T) \end{aligned}$$

La funzione **coseno** (come la funzione seno) è una *funzione periodica* con periodo 2π , quindi deve essere

$$\omega T = 2\pi \quad \longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \longrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

L'inverso del periodo è la **frequenza** ν del moto (in Hertz $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$):

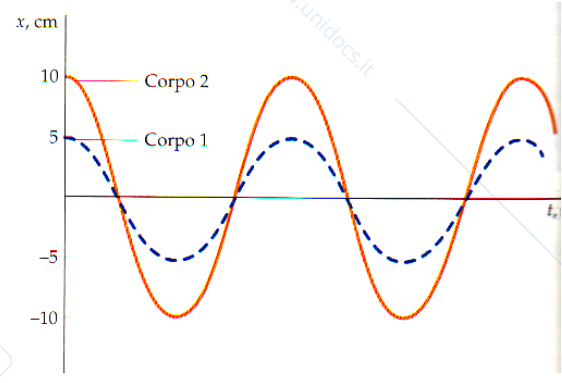
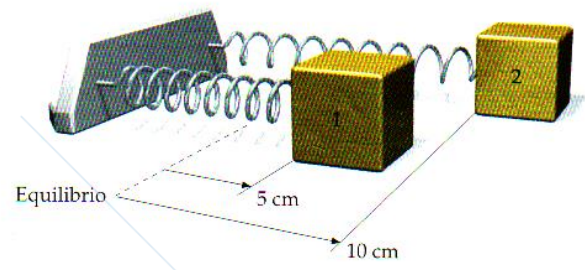
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Ovviamente, combinando le espressioni precedenti, è anche

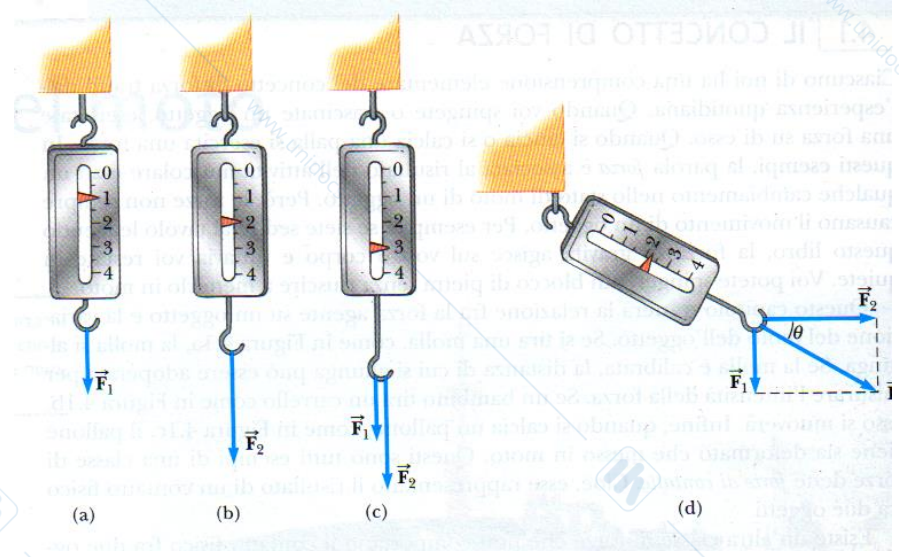
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

È interessante notare che T e ν non dipendono dai parametri del moto (A e ϕ) ma solo dalla massa m e dalla **costante elastica** della molla k .

Due corpi identici, attaccati a due molle identiche, hanno oscillazioni uguali anche se partono da elongazioni differenti.



Proprio le caratteristiche della legge di Hooke, permettono di costruire uno strumento per la *misura delle forze*, il **dinamometro**:



Altro sistema interessante è il **pendolo semplice**.

La massa m è appesa ad un filo di lunghezza L , e compie piccole oscillazioni.

Su di essa agiscono la **forza di gravità** mg e la **tensione** della fune T .

Scomponendo la forza peso come in figura, si ha che nella direzione tangenziale alla traiettoria agisce la forza

$$-mg \sin \phi = ma = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

La lunghezza dell'arco s è data da

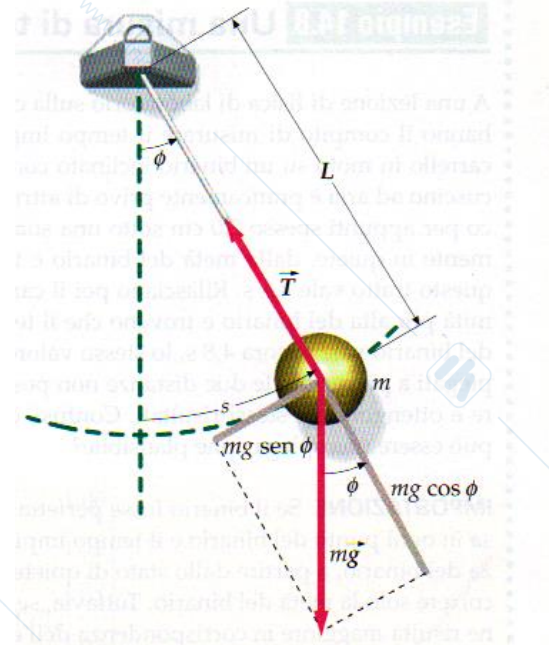
$$s = L\phi$$

Derivando due volte si ha che

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = L \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

e sostituendo

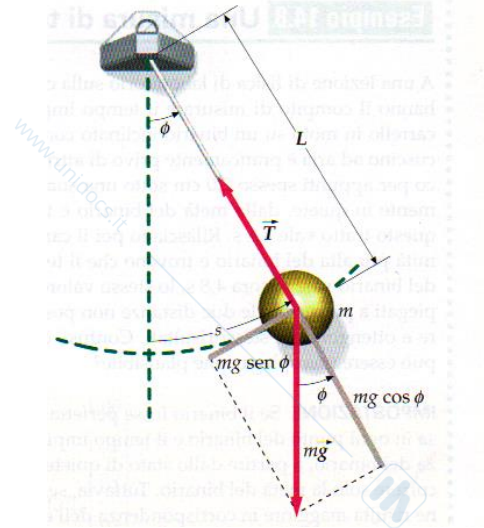
$$-mg \sin \phi = m \frac{d^2 s}{dt^2} = mL \frac{d^2 \phi}{dt^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \phi$$



Si vede tra l'altro che la **massa m non compare** nell'espressione del **moto del pendolo!**

Per **piccoli angoli** è

$$\sin \phi \approx \phi \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} \approx -\frac{g}{L} \phi(t)$$



Ha la stessa forma dell'equazione del *moto della molla* (***moto armonico semplice***), con

$$\frac{d^2 \phi(t)}{dt^2} = -\frac{g}{L} \phi(t) = -\omega^2 \phi(t) \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

$$\longrightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Per **piccole oscillazioni** il **moto** del **pendolo semplice** **dipende** solo dalla **lunghezza del pendolo L**.

Forze di attrito

Quando un **corpo** è in **movimento**, in effetti compaiono sempre delle **forze** che si **oppongono** al moto, che sono chiamate **forze di attrito**.

Se si sposta un corpo come in figura, su di esso agiscono le forze rappresentate.

Si osserva che si deve applicare una certa forza prima che il bidone si metta in moto (**attrito statico** f_s). Successivamente, si osserva che per mantenere il bidone in moto è sufficiente una forza minore (**attrito dinamico** f_d).

Inoltre la forza da applicare per vincere queste **forze di attrito** dipende anche dalla massa del bidone.

Le forze di attrito si **oppongono al moto** e sono quindi dirette nel verso opposto al moto.

Si ha che è

$$f_s \leq \mu_s N$$

$$f_d = \mu_d N$$

Le quantità μ_s e μ_d sono **adimensionali** e rappresentano rispettivamente i coefficienti di attrito statico e attrito dinamico

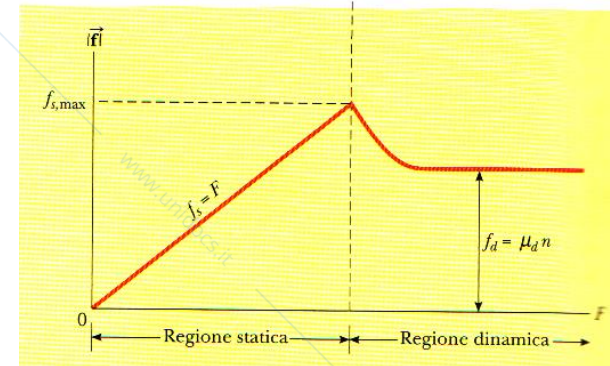
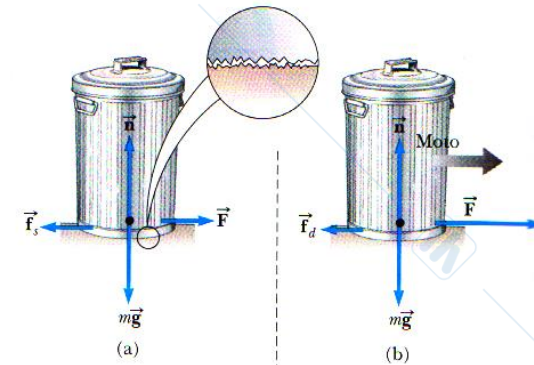


Tabella 5.1 Coefficienti di attrito

Materiali	μ_s	μ_d
Acciaio su acciaio	0,7	0,6
Ottone su acciaio	0,5	0,4
Rame su ghisa	1,1	0,3
Vetro su vetro	0,9	0,4
Teflon su teflon	0,04	0,04
Teflon su acciaio	0,04	0,04
Gomma su calcestruzzo (asciutto)	1,0	0,80
Gomma su calcestruzzo (bagnato)	0,30	0,25
Sci paraffinati su neve (0° C)	0,10	0,05

Alcuni coefficienti di attrito.

È opportuno notare che le forze di attrito sono sempre perpendicolari alle forze che le generano!

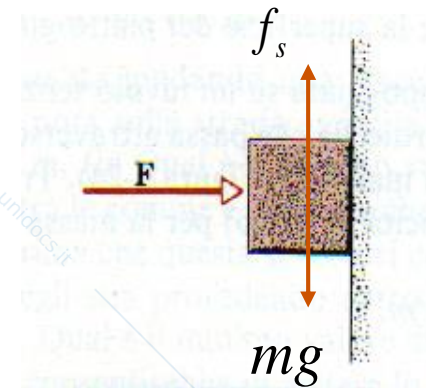
Ad esempio premendo con una forza \mathbf{F} un blocco di massa m contro un muro, si hanno le forze rappresentate.

La **forza di attrito** è dovuta alla forza \mathbf{F} applicata e non alla forza peso del corpo ed è perpendicolare ad essa

$$f_s \leq \mu_s F$$

Perché il corpo non scivoli, dovrà ovviamente essere

$$f_s > mg$$



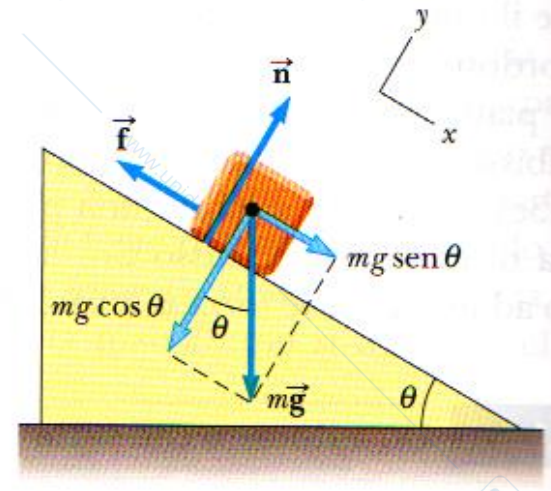
I coefficienti di attrito statico e dinamico possono essere misurati con il dispositivo della figura.

Sul blocco agiscono la *forza di gravità* mg , la *forza normale* n e la *forza di attrito statico* f .

Si può scrivere quindi:

$$\sum F_x = mg \sin\theta - f_s = 0$$

$$\sum F_y = n - mg \cos\theta = 0$$



Aumentando l'inclinazione del piano inclinato (aumentando l'angolo θ) si arriva all'angolo critico θ_c in cui il blocco inizia a scivolare, e la forza di attrito statico raggiunge il suo valore massimo $\mu_s n$ e le precedenti espressioni diventano:

$$mg \sin\theta = f_s = \mu_s n$$

$$mg \cos\theta = n$$



$$tg \theta = \mu_s$$

Cioè il valore di μ_s è pari alla tangente dell'angolo a cui il blocco inizia a scivolare. Ovviamente **dipende** dal materiale del blocco, da quello del piano inclinato e dalla lavorazione delle superfici!

Quando il blocco inizia a scivolare, il modulo della *forza di attrito dinamico* è pari a $\mu_d n$. Il corpo scivola accelerando. Se si **riduce** l'angolo θ , si trova per quale valore θ' il corpo scivola con *velocità costante*, per il quale vale quindi

$$tg \theta' = \mu_d$$

Le **forze di attrito** discusse fino ad ora sono di tipo **radente**, ma nei moti reali possono entrare in gioco **anche** forze di attrito **volvente** (o di **rotolamento**) che viene generalmente indicato con \mathbf{f}_r .

Quando un corpo si muove in un mezzo, oltre alle forze di attrito tra le superfici esistono anche forze di attrito \mathbf{R} tra il corpo ed il mezzo (*forze di resistenza*)

Queste forze dipendono dalla **velocità relativa** tra il **corpo** ed il **mezzo**.

In genere sono complicate e si studiano alcuni casi particolari: forze di attrito proporzionali alla velocità v e proporzionali a v^2 .

Per basse velocità si può dire che

$$\vec{R} \propto \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = b \vec{v}$$

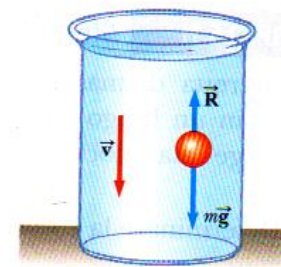
In cui b è una **costante** che dipende dal mezzo, dall'oggetto e dalla forma e dimensioni dell'oggetto.

Ad esempio, per una sfera di massa m che cade in un liquido (figura), si ha che:

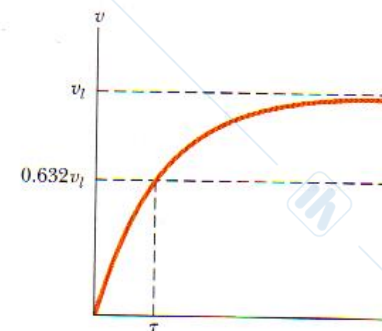
$$\sum F_y = m a_y \quad \Rightarrow \quad mg - b v = ma = m \frac{dv}{dt}$$



$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m} v$$



(a)



(b)

è una equazione differenziale in v , il cui andamento $v(t)$ è riportato in figura.

L'accelerazione della sfera m aumenta fino a quando la sua velocità è tale che la forza viscosa è pari alla forza di gravità e quindi $a = dv/dt = 0$ e poi il corpo si muove di moto rettilineo uniforme con una **velocità limite** v_l , data da:

$$\frac{dv}{dt} = 0 = g - \frac{b}{m} v_l \quad \Rightarrow \quad v_l = \frac{mg}{b}$$

Più in generale si trova che la **soluzione dell'equazione differenziale** precedente è data da

$$v = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m}) = v_l (1 - e^{-bt/m})$$

In cui b è una **costante** che dipende dal mezzo, dall'oggetto e dalla forma e dimensioni dell'oggetto.

In altri casi, ad esempio per oggetti grossi che si muovono in aria come un aereo un'automobile etc, la forza di attrito è proporzionale al quadrato di v :


$$R \propto v^2 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2} D \rho A v^2$$

in cui ρ è la **densità** dell'aria, A l'**area** della sezione dell'oggetto misurata in un piano perpendicolare al moto e D una **costante** che dipende dalla **forma** del mezzo, **adimensionale** e determinata *empiricamente*.

È chiamata **coefficiente di resistenza**.

Ad esempio per una **sfera che cade in aria**, si ha che:

$$\sum F_y = m a_y \quad \Rightarrow \quad mg - \frac{1}{2} D \rho A v^2 = ma$$


$$a = \frac{dv}{dt} = g - \left(\frac{D \rho A}{2m} \right) v^2$$

È ancora **un'equazione differenziale** e la **velocità limite**, che si ottiene quando $a = dv/dt = 0$, si ha per

$$v_l = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}}$$

TABELLA 5.2 Velocità limite per vari oggetti che cadono attraverso l'aria

Oggetto	Sezione trasversa		v_l (m/s) ^a
	Massa (kg)	(m ²)	
Paracadutista	75	0.70	60
Palla da baseball (raggio 3.7 cm)	0.145	4.2×10^{-3}	33
Palla da golf (raggio 2.1 cm)	0.046	1.4×10^{-3}	32
Chicco di grandine (raggio 0.50 cm)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Goccia di pioggia (raggio 0.20 cm)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9.0

^a Il coefficiente di resistenza, D , è posto uguale a 0.5.

Un giocatore di basket che pesa 110 kg rimane appeso al canestro in seguito a una schiacciata (fig. 4.12). Prima di lasciarsi cadere, rimane appeso immobile al bordo del canestro, che si è abbassato di 15 cm. Si assuma che il canestro possa essere assimilato a una molla e ne calcoli la costante elastica k .

IMPOSTAZIONE Visto che l'accelerazione del giocatore è nulla, la forza risultante che agisce su di lui deve essere nulla; quindi la forza verso l'alto esercitata dal canestro controbilancia esattamente il peso. Si scelga l'asse y in modo che $y = 0$ sia la posizione iniziale del canestro e la direzione positiva sia verso il basso. Lo spostamento del canestro y_c è pertanto positivo, il peso $F_{gy} = mg$ è positivo e la forza $F_y = -ky_c$ esercitata dal canestro è negativa.

SOLUZIONE

Applica la seconda legge di Newton al giocatore.
Essendo l'accelerazione nulla si ha:

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$F_{gy} + F_y = 0$$

Esprimi F_y tramite la legge di Hooke (eq. 4.7):

$$F_y = -ky_c$$

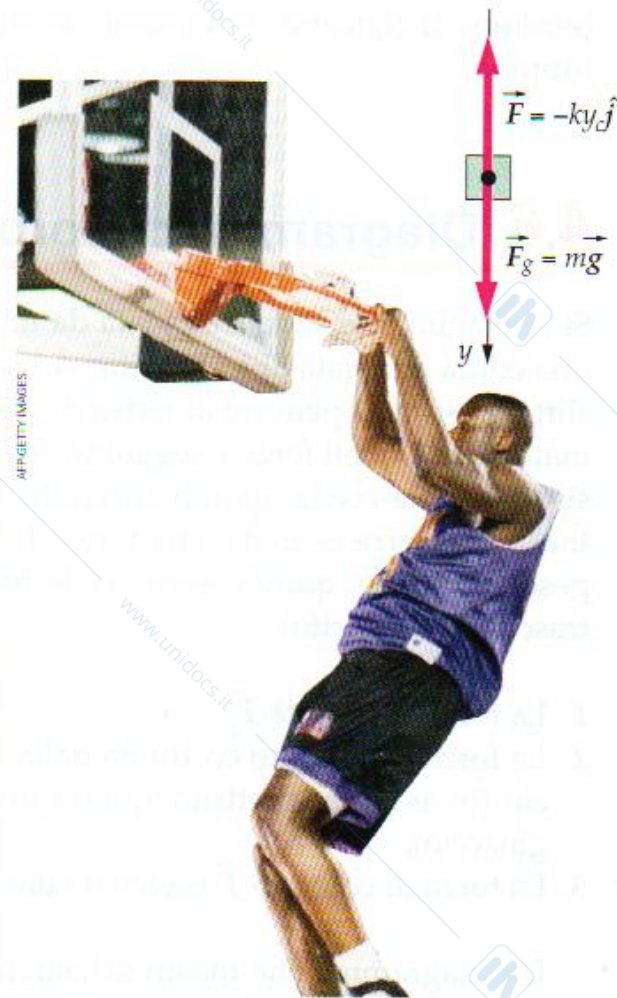
Sostituisci le espressioni e i valori corrispondenti nell'equazione scritta al punto 1 e ricava la costante k :

$$F_{gy} + F_y = 0$$

$$mg + (-ky_c) = 0$$

$$k = \frac{mg}{y_c} = \frac{(110 \text{ kg})(9,8 \text{ N/kg})}{0,15 \text{ m}}$$

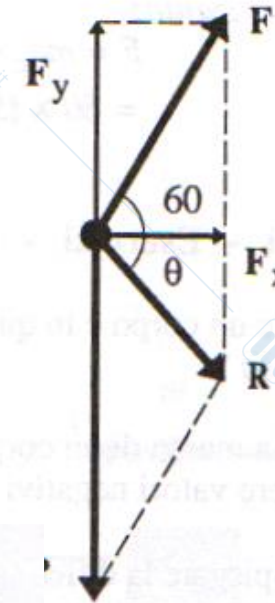
$$= \boxed{7,2 \times 10^3 \text{ N/m}}$$



4.22. Un corpo di massa 10 kg posto su di un piano orizzontale liscio e privo di attrito, è soggetto ad una forza esterna $F = 50 \text{ N}$ la cui direzione forma un angolo di 60° con l'asse delle x (Fig. 4.6).

Calcolare:

- il modulo della forza totale agente sul corpo;
- direzione e verso della risultante.



4.22. a) Scomponendo la F_e , vedi Fig. 4.6,

$$F_x = F \cos 60^\circ = 50 \times \cos 60^\circ = 25 \text{ N},$$

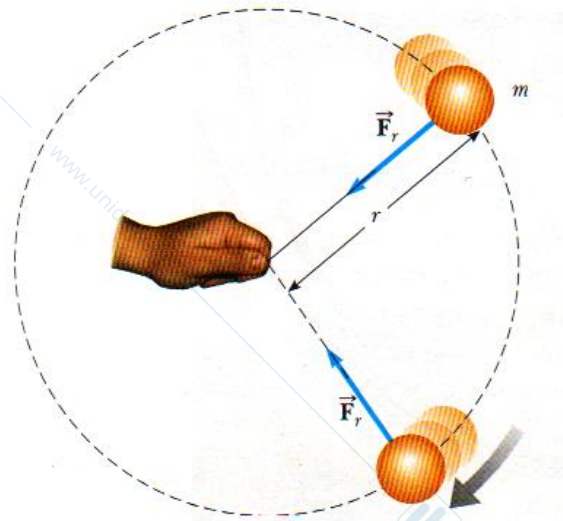
$$F_y = F \sin 60^\circ = 50 \times \sin 60^\circ = 43.3 \text{ N};$$

la risultante lungo l'asse y vale:

$$F_y = P - F_y = -10 \times 9.8 + 43.3 = -54.7 \text{ N} \Rightarrow$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{25^2 + (-54.7)^2} = 60.1 \text{ N};$$

$$b) \theta = \arctg F_y / F_x = -65.44^\circ.$$



ESEMPIO 5.5 A quale velocità può ruotare?

Un oggetto di massa 0.500 kg è attaccato all'estremità di una fune di lunghezza 1.50 m. L'oggetto ruota su una circonferenza orizzontale come in Figura 5.8. Se la fune può sopportare una tensione massima di 50.0 N, qual è la massima velocità dell'oggetto prima che la fune si spezzi?

Soluzione Poiché il modulo della forza che fornisce l'accelerazione centripeta dell'oggetto in questo caso è la tensione T esercitata dalla fune sull'oggetto, la seconda legge di Newton ci dà per la direzione radiale verso l'interno

$$\sum F_r = ma_c \rightarrow T = m \frac{v^2}{r}$$

Ricavando la velocità v , abbiamo

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

La massima velocità che l'oggetto può avere corrisponde al valore massimo della tensione. Quindi, troviamo

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max} r}{m}} = \sqrt{\frac{(50.0 \text{ N})(1.50 \text{ m})}{0.500 \text{ kg}}} = 12.2 \text{ m/s}$$

ESEMPIO 5.11**Sfera che cade nell'olio**

Una sferetta di massa 2.00 g è lasciata cadere, dalla quiete, in un lungo cilindro riempito di olio. La sfera raggiunge una velocità limite di 5.00 cm/s.

A Determinare la costante di tempo τ .

Soluzione Poiché la velocità limite è data da $v_l = mg/b$, il coefficiente b è dato da

$$b = \frac{mg}{v_l} = \frac{(2.00 \times 10^{-3} \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{5.00 \times 10^{-2} \text{ m/s}} = 0.392 \text{ N}\cdot\text{s/m}$$

Quindi, la costante di tempo τ è

$$\tau = \frac{m}{b} = \frac{2.00 \times 10^{-3} \text{ kg}}{0.392 \text{ N}\cdot\text{s/m}} = 5.1 \times 10^{-3} \text{ s}$$

B Determinare il tempo impiegato dalla sfera per raggiungere il 90.0% della sua velocità limite.

Soluzione La velocità della sfera in funzione del tempo può essere determinata usando l'Equazione 5.6. Per determinare il tempo t impiegato dalla sfera per raggiungere la velocità di $0.900v_l$, poniamo $v = 0.900v_l$ nell'Equazione 5.6, e risolviamo per t :

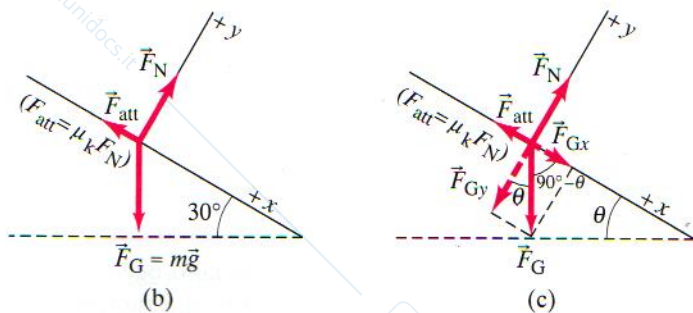
$$\begin{aligned} 0.900v_l &= v_l(1 - e^{-t/\tau}) \\ 1 - e^{-t/\tau} &= 0.900 \\ e^{-t/\tau} &= 0.100 \\ -\frac{t}{\tau} &= \ln 0.100 = -2.30 \\ t &= 2.30\tau = 2.30(5.10 \times 10^{-3} \text{ s}) \\ &= 11.7 \times 10^{-3} \text{ s} = 11.7 \text{ ms} \end{aligned}$$



ESEMPIO 4-19 La sciatrice. La sciatrice di figura 4-32 ha appena iniziato una discesa con una pendenza di 30° . Supponendo che il coefficiente di attrito dinamico sia 0.10, calcolate (a) la sua accelerazione e (b) la velocità che avrà raggiunto dopo 4.0 s.

APPROCCIO Scegliamo l'asse x parallelo alla superficie nevosa, con direzione positiva verso il basso nella direzione del moto della sciatrice, e l'asse y perpendicolare a questa superficie. Le forze che agiscono sulla sciatrice sono la gravità, $\vec{F}_G = m\vec{g}$, che punta verticalmente verso il basso (*non* perpendicolare alla pendenza) e le due forze esercitate sui suoi sci dalla neve – la forza normale perpendicolare al pendio nevoso (*non* verticale) e la forza di attrito parallela alla superficie. Queste tre forze sono mostrate in figura 4-32b per comodità come applicate a un punto e rappresentano il nostro diagramma delle forze relativo alla sciatrice.

SOLUZIONE Con tale scelta, il peso \vec{F}_G è il solo vettore che dobbiamo scomporre. Le componenti del peso sono mostrate come linee tratteggiate in figura 4-32c. Per risolvere il problema più in generale usiamo per adesso θ al posto di 30° . Usiamo le relazioni trigonome-



meccanica 5 DP

triche applicate al triangolo rettangolo per ottenere le componenti:

$$F_{Gx} = mg \sin \theta,$$

$$F_{Gy} = -mg \cos \theta.$$

dove F_{Gy} va nella direzione negativa.

(a) Per calcolare l'accelerazione a_x con cui la sciatrice scende dalla collina, applichiamo la seconda legge di Newton in direzione x :

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$mg \sin \theta - \mu_k F_N = ma_x$$

dove le due forze sono la componente della forza di gravità (direzione $+x$) e la forza di attrito (direzione $-x$). Vogliamo ora trovare il valore di a_x , ma nell'ultima equazione non conosciamo F_N . Vediamo se possiamo ottenere F_N dalla seconda legge di Newton, applicata alla componente y :

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$F_N - mg \cos \theta = ma_y = 0$$

dove poniamo $a_y = 0$, in quanto non abbiamo alcun moto nella direzione y (perpendicolare alla pendenza). Quindi possiamo risolvere rispetto a F_N :

$$F_N = mg \cos \theta$$

e possiamo sostituire nella precedente equazione al posto di ma_x :

$$mg \sin \theta - \mu_k (mg \cos \theta) = ma_x.$$

Possiamo dividere entrambi i membri per m . Perciò (ponendo $\theta = 30^\circ$ e $\mu_k = 0.10$):

$$\begin{aligned} a_x &= g \sin 30^\circ - \mu_k g \cos 30^\circ \\ &= 0.50g - (0.10)(0.866)g = 0.41g. \end{aligned}$$

L'accelerazione della sciatrice è 0.41 volte l'accelerazione di gravità, cioè $a = (0.41)(9.8 \text{ m/s}^2) = 4.0 \text{ m/s}^2$. È interessante il fatto che le masse si elidano perché ciò porta all'utile conclusione che *l'accelerazione non dipende dalla massa*. Il fatto che talvolta sia possibile eliminare qualche termine e che questo fatto porti a utili conclusioni evitando calcoli superflui è il grande vantaggio che si ottiene lavorando con equazioni algebriche e inserendo i numeri solo alla fine.

(b) Poiché l'accelerazione è costante, la velocità dopo 4.0 s, utilizzando l'equazione 2-11a, è:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 0 + (4.0 \text{ m/s}^2)(4.0 \text{ s}) = 16 \text{ m/s}, \end{aligned}$$

dove abbiamo supposto che la sciatrice sia partita da ferma.