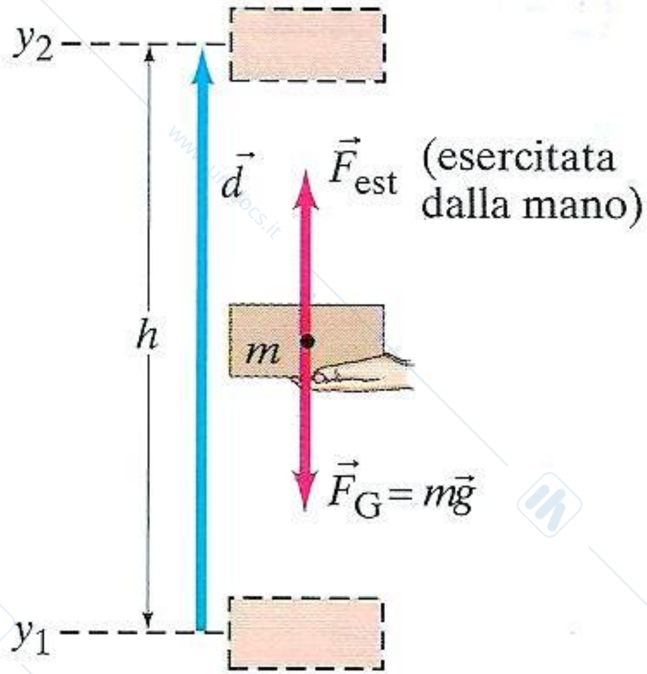
Forze conservative e forze non conservative

L'energia cinetica discussa in precedenza, ossia l'energia che un corpo possiede in virtù del suo moto, è solo una delle possibili forme di energia in meccanica.

Un corpo possiede energia anche in relazione alla sua posizione o alla sua configurazione. Si parla di **energia potenziale**.

Una molla compressa ad esempio, benché ferma possiede un'energia potenziale dovuta alla compressione.

Analogamente un corpo sollevato dal suolo può cadere! In questo caso si parla di energia potenziale *gravitazionale*.



Se si solleva un corpo di massa m di un tratto h, senza accelerazione, cioè vincendo solo la forza di Gravità, si compie il lavoro:

$$L_{est} = F\ y \cos\theta = mgh$$
$$= mg\left(y_2 - y_1\right)$$

La gravità compie sul corpo il lavoro (forza e spostamento hanno verso opposto)

$$L_G = F\, y \cos 180° = -mgh$$
$$= -mg\left(y_2 - y_1\right)$$

Se ora l'oggetto viene lasciato libero di cadere, si ha il moto di un corpo, inizialmente fermo, soggetto ad una accelerazione costante, per il quale vale quindi la:

$$\mathrm{v}_f^2 = \mathrm{v}_i^2 + 2as = 2gh$$

La sua energia cinetica quando arriva al suolo sarà pari a:

$$T = \frac{1}{2} m \mathrm{v}_f^2 = \frac{1}{2} m(2gh) = mgh$$

Quindi per sollevare l'oggetto ad altezza h si è compiuto il lavoro mgh ed una volta che l'oggetto si trova in h ha la capacità di compiere un lavoro pari a mgh!

Si definisce quindi **energia potenziale** ***gravitazionale***, la quantità

$$U_g = mgy$$

Si può poi anche scrivere che, per quanto visto prima, che è

$$L_{est} = m\,g\left(y_2 - y_1\right) =$$
$$= U_2 - U_1 = \Delta U$$

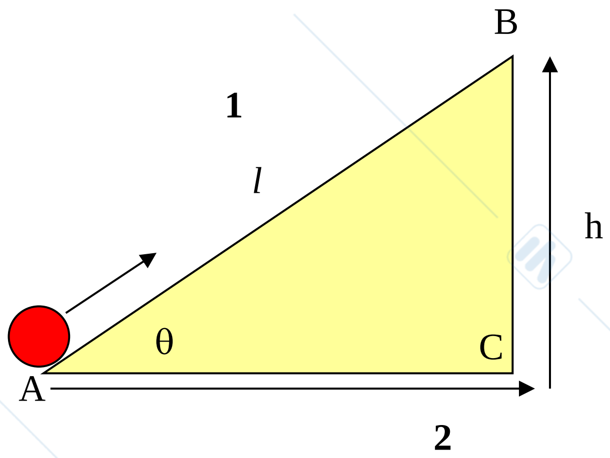
Il lavoro fatto dalle *forze esterne* per spostare (senza accelerazione) il corpo m dal punto 1 al punto 2 è pari alla variazione dell'energia potenziale tra il punto 2 ed il punto 1

Analogamente, il lavoro fatto dalla forza di gravità sarà dato da:

$$L_G = -mg\left(y_2 - y_1\right) =$$
$$= -\left(U_2 - U_1\right) = -\Delta U$$

È opportuno notare che l'energia potenziale gravitazionale è sempre definita a meno di una costante:

quello che conta è la sua variazione e non il suo valore assoluto



Se si immagina di spostare il corpo m anziché lungo la verticale, lungo un piano inclinato privo di attrito, ma sempre tra i livelli y_1 e y_2, si trova che il lavoro fatto nei due casi è uguale!

Infatti, lungo il percorso **1** si ha che il lavoro fatto è pari a

$$F_G = mg\sin\theta \qquad l = \frac{h}{\sin\theta}$$

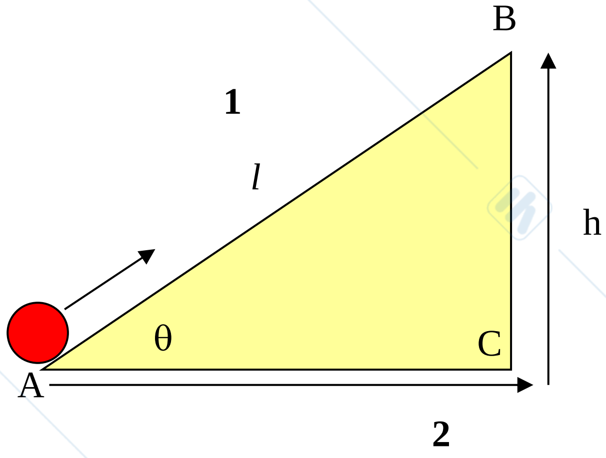
$$\Rightarrow \quad L_1 = F \cdot s = mg\sin\theta \frac{h}{\sin\theta} = mgh$$

Lungo il percorso **2** si ha che il lavoro fatto è pari a

$$L_2 = F \cdot s = L_{AC} + L_{CB} = 0 + mgh = mgh$$

Cioè il lavoro fatto nei due casi è uguale!
Si vede anche che se si parte da A poi si procede verso C poi B ed infine A, il lavoro totale L_{tot} è pari a

$$L_{tot} = 0 + mgh - mgh = 0$$



il segno meno per il lavoro tra B ed A è dovuto al fatto che questa volta forza e spostamento hanno versi opposti.

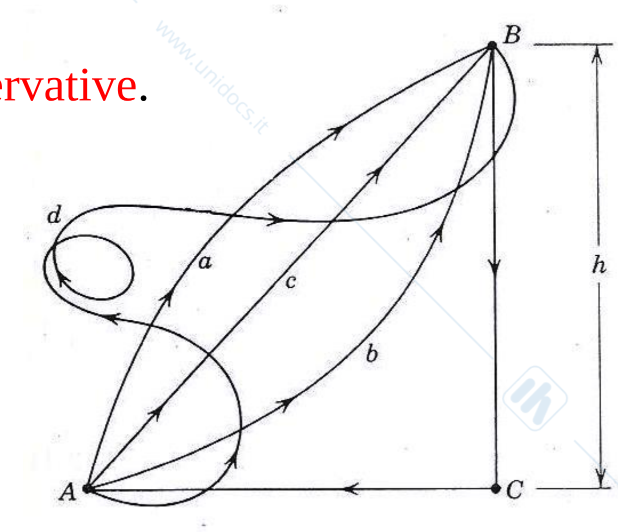
I punti A B e C sono del tutto arbitrari, e quindi si può concludere che il lavoro fatto lungo una linea chiusa è pari a zero.

Entrambe le conclusioni, il lavoro fatto dalla forza gravitazionale non dipende dal percorso ed il lavoro fatto lungo un *qualsiasi percorso chiuso* è pari a zero sono equivalenti e caratterizzano le **forze conservative**:

Il lavoro compiuto da una **forza conservativa** su un punto materiale è *indipendente* dalla *traiettoria* che il punto materiale percorre tra la posizione iniziale e quella finale

Non tutte le forze sono conservative.

Ad esempio le forze dissipative quali l'attrito non sono conservative.



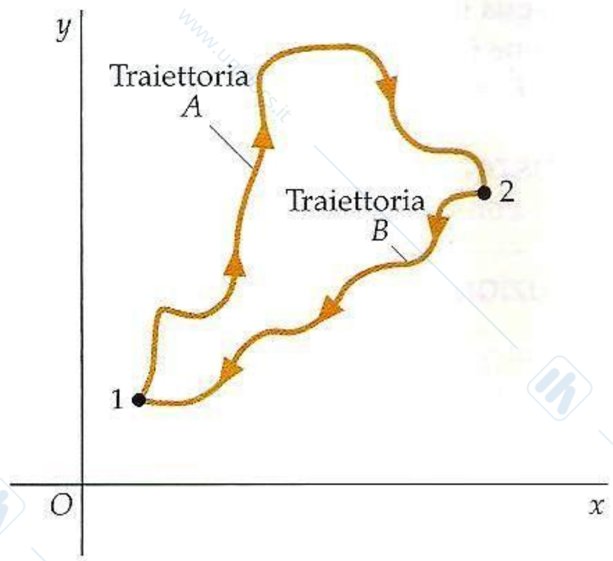
In tutti i percorsi rappresentati in figura, per le forza conservative il lavoro fatto per spostare il punto materiale di massa m da A a B è lo stesso.

In maniera più rigorosa, si può scrivere che, *lungo una linea chiusa*

$$L = \oint F \cdot ds = 0$$

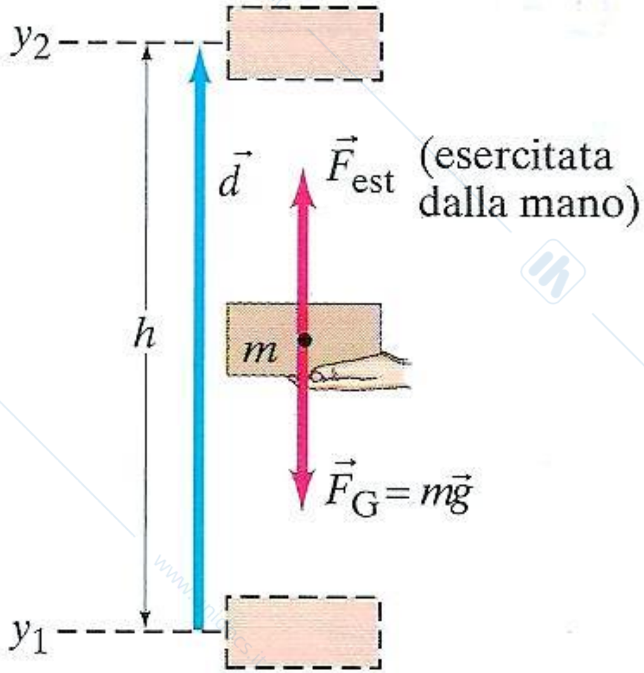
$$\Rightarrow \quad L = \int_{1,a}^{2} F \cdot ds + \int_{2,b}^{1} F \cdot ds = 0$$

$$\int_{1,a}^{2} F \cdot ds = -\int_{2,b}^{1} F \cdot ds = \int_{1,b}^{2} F \cdot ds$$



È opportuno notare che l'energia potenziale vista prima, può essere definita solo per le forze conservative.

Torniamo al sistema blocco m sollevato da terra.



Quando si trova ad una altezza h, il blocco possiede energia potenziale pari al lavoro fatto dalla forza esterna per sollevarlo:

$$L = \Delta U_G$$

Quando il blocco cade da y_2 ad y_1, il lavoro svolto dalla forza di gravità sul blocco è pari a

$$L = m\,g\;y_2 - m\,g\;y_1 = U_{G,i} - U_{G,f} = -\Delta U_G$$

Questo lavoro è anche pari alla variazione dell'energia cinetica

$$L = \Delta T$$

$$L = \Delta T = -\Delta U_G$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta T + \Delta U_G = 0}$$

Ricordare che stiamo parlando di un *sistema isolato*.

Esplicitando le espressioni precedenti:

$$\left(T_f - T_i\right) + \left(U_{G,f} - U_{G,i}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_f + U_{G,f} = T_i + U_{G,i}}$$

Questa è l'espressione della conservazione *dell'energia meccanica* in un sistema isolato:

Se agiscono solo *forze conservative*, l'energia meccanica totale di un sistema isolato **si conserva**

Nel caso del blocco che cade visto prima, l’energia potenziale è quella gravitazionale e l’espressione della conservazione dell’energia diventa

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$

Poiché esistono altri tipi di energia potenziale, la formulazione più generale del *principio di conservazione* è

$$T_f + U_f = T_i + U_i$$

Può anche essere scritta come

$$T + U = cost$$

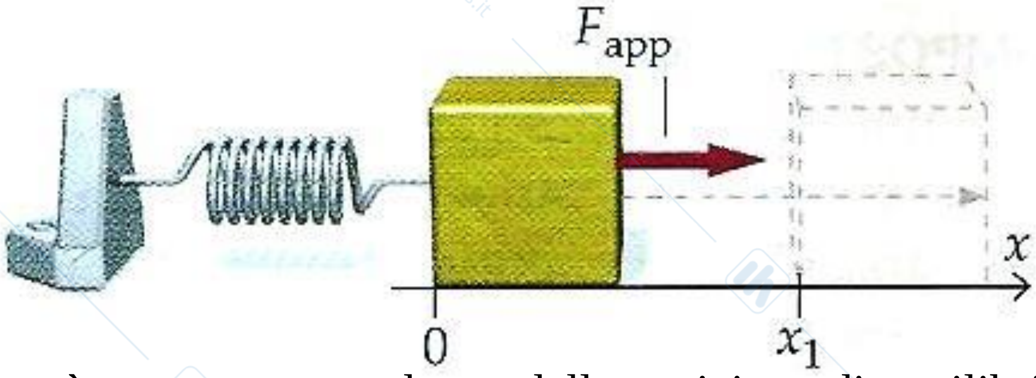
o anche

$$T + U = E$$

con E energia **totale** meccanica del sistema.

Anche la forza elastica discussa prima rappresenta una *forza conservativa*.

Si consideri un blocco di massa m attaccato ad una molla di massa trascurabile:



Il blocco in figura è spostato verso destra dalla posizione di equilibrio x = 0 alla posizione nuova $x = x_1$.

Il lavoro compiuto dalla molla sul blocco è negativo perché forza e spostamento hanno versi opposti. Se si lascia il blocco libero, torna verso la posizione di equilibrio ed il lavoro compiuto dalla molla quando il blocco torna in x = 0 dopo essere passato da $x = x_1$ è zero: la forza elastica è conservativa.

Quindi

$$dL = dU = -F \cdot dl = -F_x dx =$$
$$= -(-kx)dx = kxdx$$

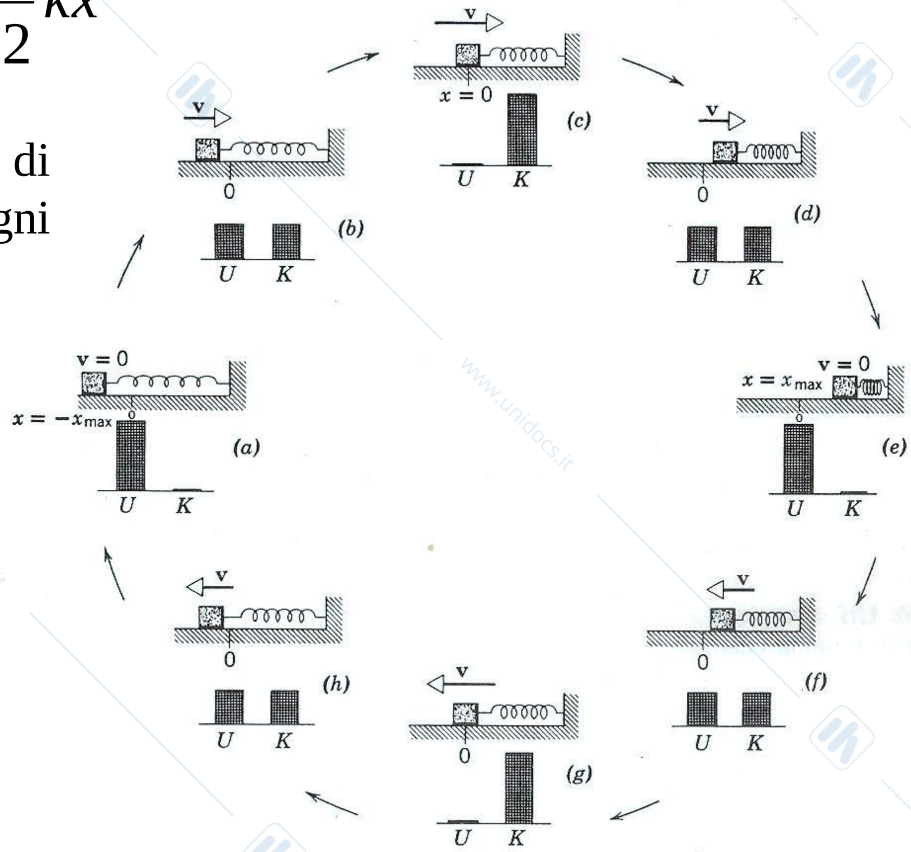
$$\Longrightarrow \quad U = \int kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2 + U_0$$

Se si assume $U_0=0$ energia potenziale nel punto di riposo (x = 0), si trova semplicemente

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Se si lascia oscillare la molla tra le posizioni di equilibrio x_1 ed x_2, si può scrivere che in ogni istante vale la

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$



Gli esempi fatti sono validi per le forze conservative.

Dal teorema energia – lavoro:

$$L = \Delta T$$

Per le forze conservative (per le quali si può definire cioè un'energia potenziale) è anche (segno meno perché ora è il lavoro fatto **dal** sistema)

$$L = -\Delta U$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \Delta T + \Delta U = 0$$

$$\Delta(T + U) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T + U = cost}$$

Questa è l'energia meccanica totale E del sistema

Se ora sul sistema agiscono **anche** forze non conservative, allora il lavoro totale fatto dalla risultante delle forze è pari alla somma delle forze conservative e non conservative:

$$L_T = L_c + L_{nc} = \Delta T$$

Il lavoro delle *forze conservative* può comunque essere espresso come variazione dell'energia potenziale:

$$L_c = -\Delta U$$

$$\Rightarrow \quad L_{nc} = \Delta T + \Delta U$$

$$L_{nc} = \Delta(T + U) = \Delta E$$

L'energia meccanica totale del sistema quindi **non** è costante! La variazione dipende dal lavoro fatto dalle forze non conservative.

Ad esempio se si tiene conto dell'attrito, che è una forza dissipativa, l'energia meccanica del sistema diminuisce.

Si ha che il lavoro delle forze di attrito è dato da:

$$L_{nc} = L_f = \mathit{\Delta}(T + U) = \mathit{\Delta}E$$

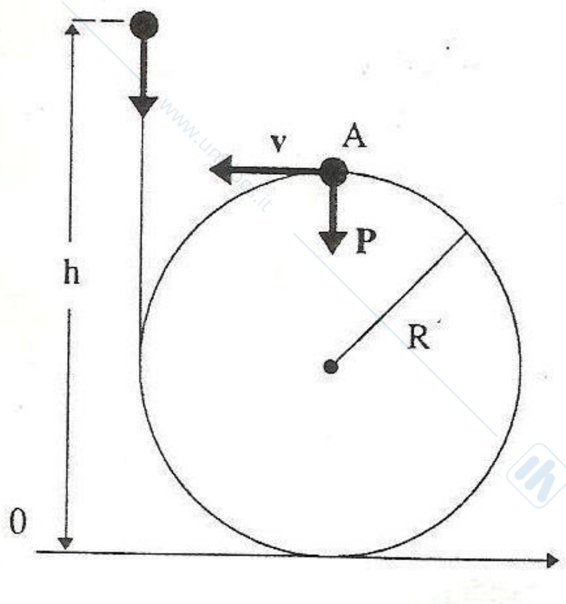
$$\Longrightarrow \qquad L_f = (T + U) - (T_0 + U_0)$$

Ed essendo il lavoro delle forze di attrito negativo, l’energia totale meccanica finale è ***minore*** di quella iniziale.

L’energia meccanica *persa*, nel caso delle forze di attrito viene dissipata sotto forma di calore.

Alla perdita di energia meccanica corrisponde un aumento di energia termica.

Da quale altezza deve scendere un ciclista per effettuare un *giro della morte* lungo una circonferenza di raggio R = 10 m, supposti nulli gli attriti?



Soluzione

Nel punto A deve essere soddisfatta la relazione

$$F_c = ma_c \geq mg$$

Essendo $a_c = v^2/R$, si può scrivere che

$$m\frac{v^2}{R} \geq mg \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v^2}{R} \geq g$$

Per determinare v si usa il teorema della conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg(y-2R)$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 2g(y-2R)$$

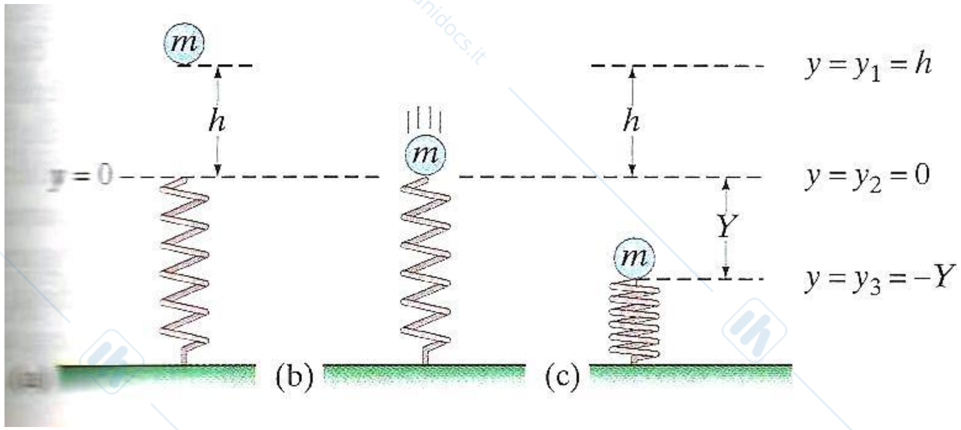
Sostituendo nell'espressione per la velocità precedentemente trovata:

$$\frac{v^2}{R} \geq g \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2g(y-2R)}{R} \geq g$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h \geq \frac{5}{2}R = 25m}$$

ESEMPIO 6-12 **Due tipi di energia potenziale.** Una palla di massa $m = 2.60$ kg, partendo da ferma, cade per una distanza verticale $h = 55.0$ cm prima di colpire una molla a spirale disposta con l'asse verticale, comprimendola di una lunghezza $Y = 15.0$ cm (fig. 6-24). Determinate la costante elastica della molla, assumendo che la sua massa sia trascurabile e ignorando la resistenza dell'aria. Misurate tutte le distanze a partire dal punto in cui la palla tocca la molla a riposo ($y = 0$ in quel punto).

APPROCCIO Le forze che agiscono sulla palla sono l'attrazione gravitazionale della Terra e la forza elastica esercitata dalla molla. Entrambe le forze sono conservative e quindi usiamo la conservazione dell'energia meccanica, includendo entrambi i tipi di energia potenziale. Tuttavia dobbiamo fare attenzione: la gravità agisce durante tutto il tempo della caduta (fig. 6-24), mentre la forza elastica non agisce prima che la palla tocchi la molla (fig. 6-24b). Scegliamo y verso l'alto e $y = 0$ alla fine della molla nel suo stato di riposo (non compressa).



SOLUZIONE Dividiamo questa soluzione in due parti (vedremo anche una soluzione alternativa più avanti).

Parte 1: Consideriamo inizialmente la variazione di energia della palla che cade da un'altezza $y_1 = h = 0.55$ m (fig. 6-24a) sino a $y_2 = 0$, nell'istante in cui tocca la molla (fig. 6-24b). Il nostro sistema è la palla su cui agisce la gravità più la molla che sino a questo istante non agisce. Quindi

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$
$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + 0.$$

Risolviamo per $v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(0.550\ \text{m})} = 3.283\ \text{m/s} \approx 3.28\ \text{m/s}$. Questa è la velocità della palla nel momento in cui tocca la sommità della molla (fig. 6-24b).

Parte 2: Vediamo che cosa accade quando la palla comprime la molla (fig. 6-24b-c). Ora due forze conservative agiscono sulla palla: la gravità e la forza della molla. Quindi la nostra equazione della conservazione dell'energia diventa

$$E(\text{palla che tocca la molla}) = E(\text{molla compressa})$$
$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + \tfrac{1}{2}ky_2^2 = \tfrac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 + \tfrac{1}{2}ky_3^2.$$

Prendiamo il punto 2 come l'istante in cui la palla inizia a comprimere la molla, quindi $y_2 = 0$ e $v_2 = 3.283$ m/s (tenendo una cifra in più, per ora). Il punto 3 è quello in cui la palla si ferma (per un istante) e la molla è compressa al massimo, cosicché $v_3 = 0$ e $y_3 = -Y = -0.150$ m (dato). Sostituendo nella precedente equazione dell'energia, otteniamo

$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 + 0 + 0 = 0 - mgY + \tfrac{1}{2}kY^2.$$

Conosciamo m, v_2 e Y, quindi possiamo risolvere rispetto a k:

$$k = \frac{2}{Y^2}\left[\tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgY\right] = \frac{m}{Y^2}\left[v_2^2 + 2gY\right]$$
$$= \frac{(2.60\ \text{kg})}{(0.150\ \text{m})^2}\left[(3.283\ \text{m/s})^2 + 2(9.80\ \text{m/s}^2)(0.150\ \text{m})\right] = 1590\ \text{N/m}$$

che è il risultato desiderato.