Meccanica

La Meccanica studia il moto dei corpi (puntiformi, sistemi di punti o corpi rigidi) attraverso leggi fisiche quantitative.

- **Cinematica**: descrizione del moto di un corpo indipendentemente dalle cause che lo determinano.

- **Dinamica**: descrizione del moto di un corpo a partire dalle cause che lo determinano.

CINEMATICA

1) EVENTO

fenomeno che accade in un punto dello spazio ed in un istante temporale; spazio e tempo caratterizzano un evento.

2) PUNTO MATERIALE

corpo privo di dimensioni o le cui dimensioni sono piccole o trascurabili rispetto alle altre in gioco

Moto di un punto materiale

Per la trattazione del moto cominciamo dal caso più semplice. Consideriamo un oggetto le cui dimensioni si possono trascurare e la cui posizione possa essere descritta localizzando un punto dello spazio: parleremo di <u>punto materiale o particella</u>

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari
www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

**La cinematica si occupa del moto dei sistemi descrivendone la posizione al variare del tempo.
Si deve definire operativamente il concetto di posizione di un punto materiale in un dato sistema di riferimento.**

SISTEMI DI RIFERIMENTO

La posizione di un punto materiale ha senso solo se definita rispetto alla posizione di un punto dello spazio preso come riferimento, normalmente indicato con O.

Per descrivere il moto occorre servirsi di un sistema di riferimento rispetto al quale si definisce la posizione del corpo studiato e il suo movimento.

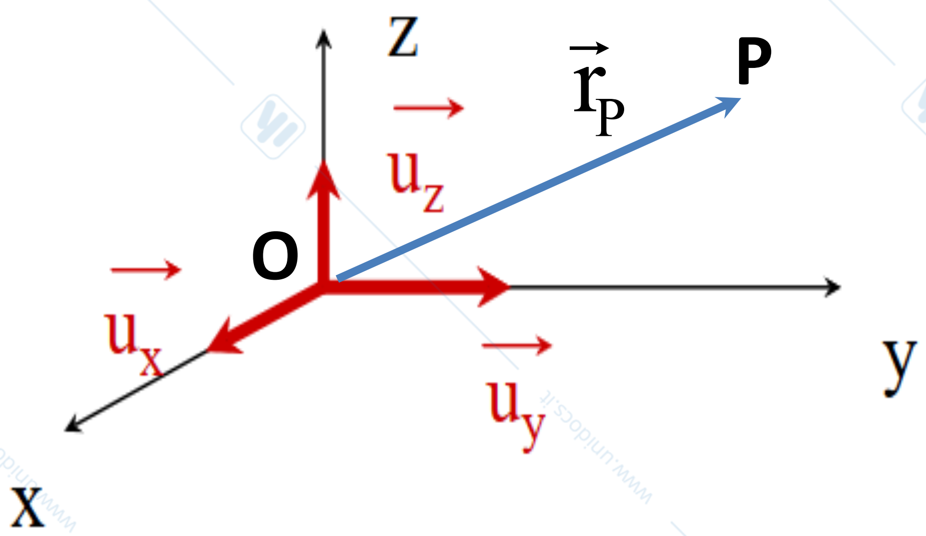
La scelta del sistema di riferimento è del tutto arbitraria e si fa in base al tipo di problema.

Il sistema di coordinate permette la descrizione matematica del movimento rispetto al sistema di riferimento. Il sistema di coordinate può essere pensato come *ancorato* al sistema di riferimento.

Possiamo scegliere fra sistemi di coordinate quello che meglio si presta alla descrizione del problema. I più usati anche per la loro semplicità matematica sono:

- **Sistemi di coordinate cartesiane, polari o cilindriche**

SISTEMA DI COORDINATE CARTESIANE (x,y,z)



La posizione di un punto P si può descrivere attraverso le sue coordinate cartesiane x_P, y_P, z_P

Origine: O

Versori degli assi: $\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$

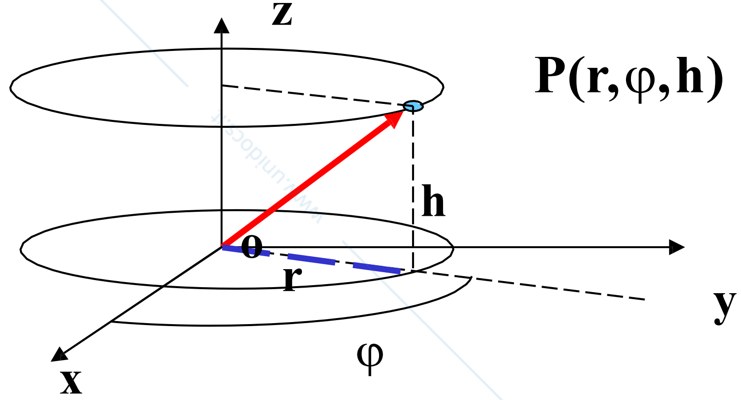
$$\vec{r}_P = x_P\hat{u}_x + y_P\hat{u}_y + z_P\hat{u}_z$$

ALTRI SISTEMI DI RIFERIMENTO

1. Cilindriche

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = h$$

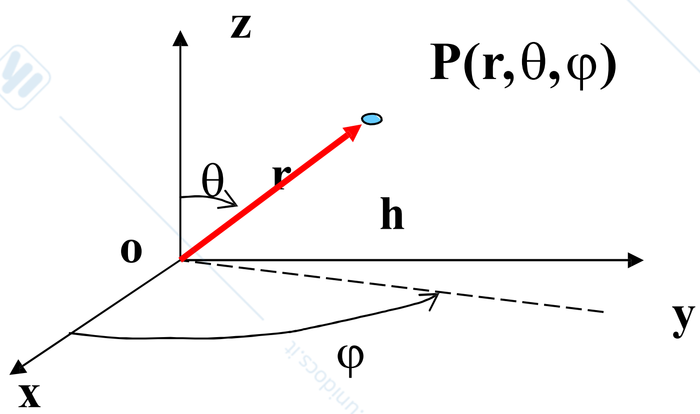
$$0 \le r \le \infty$$
$$-\infty \le h \le \infty$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$



2. Polari sferiche

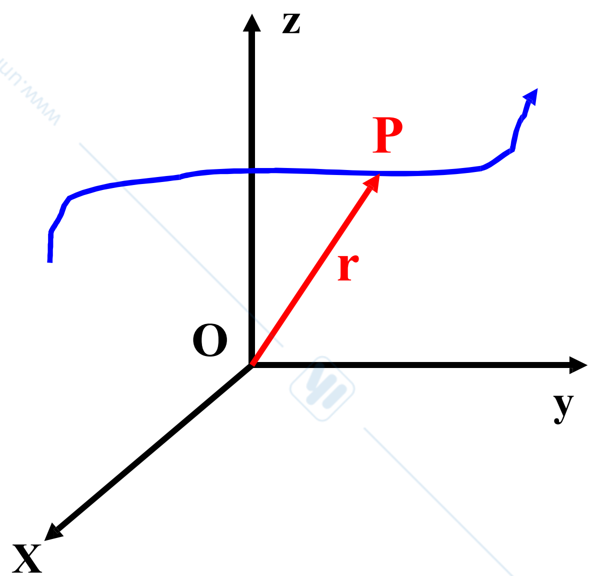
$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$$

$$0 \le |r| \le \infty$$
$$0 \le \vartheta \le \pi$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$



CONCETTI FONDAMENTALI in CINEMATICA

***Traiettoria*: è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto P in movimento. In genere è una linea curva continua. Se la linea è chiusa il moto è limitato e il punto percorre continuamente la stessa traiettoria, come nel caso delle orbite planetarie.**



Le grandezze fondamentali in cinematica sono:
il vettore posizione $\vec{r}_P$, il vettore velocità $\vec{v}_P$, il vettore accelerazione $\vec{a}_P$ (grandezze vettoriali) ed il tempo t (grandezza scalare);

Il tempo viene sovente utilizzato come variabile indipendente, in funzione del quale si esprimono le altre grandezze. Il tempo non è mai negativo. Il tempo è relativo → diventa assoluto quando definiamo un'origine temporale.

In particolare:

1) Lo studio della variazione del vettore posizione in funzione del tempo porta a definire il concetto di vettore *velocità*, Il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria percorsa dal punto e il verso del vettore velocità indica il verso di percorrenza lungo la traiettoria (per esempio da sx a dx, in senso orario, ecc…).
2) Lo studio della variazione del vettore velocità in funzione del tempo introduce il concetto di vettore *accelerazione*

Caso generale : $\mathbf{R}^3$

vettore posizione: $\vec{r}$

velocità: $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

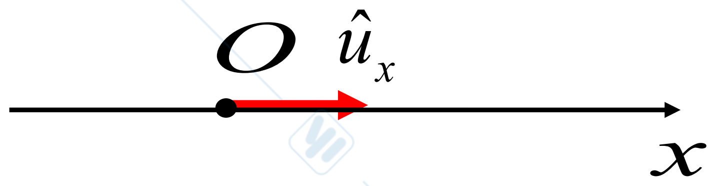
accelerazione : $\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\Downarrow$$

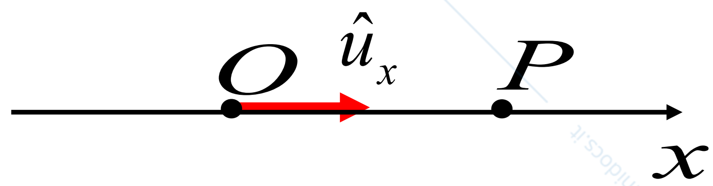
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v}dt = d\vec{r} \Rightarrow \int_0^t \vec{v}dt = \int_{\vec{r}(t=0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t=0)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a}dt = d\vec{v} \Rightarrow \int_0^t \vec{a}dt = \int_{\vec{v}(t=0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t=0)$$

MOTO UNIDIMENSIONALE: R^1



Il moto più semplice da studiare è il moto rettilineo. Esso si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati arbitrariamente un'origine O e un verso dato dal versore $\hat{u}_x$



Un punto P si muove lungo l'asse x. Il suo moto è descrivibile utilizzando la sola coordinata x(t).

L'insieme dei punti occupati successivamente viene indicato con x(t).

La funzione del tempo x(t) definisce la legge oraria del moto.

$$\vec{r}(t) = x_P(t)\hat{u}_x$$

$$\vec{v}(t) = v_P(t)\hat{u}_x$$

$$\vec{a}(t) = a_P(t)\hat{u}_x$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x_P(t)\hat{u}_x)}{dt} = \frac{dx_P(t)}{dt}\hat{u}_x + x_P(t)\frac{d\hat{u}_x}{dt} = \frac{dx_P(t)}{dt}\hat{u}_x$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v_P(t)\hat{u}_x)}{dt} = \frac{dv_P(t)}{dt}\hat{u}_x + v_P(t)\frac{d\hat{u}_x}{dt} = \frac{dv_P(t)}{dt}\hat{u}_x$$

$$\vec{r}(t) = x_P(t)\hat{u}_x, \qquad \vec{v}(t) = v_P(t)\hat{u}_x, \qquad \vec{a}(t) = a_P(t)\hat{u}_x$$

$$\vec{v} = \frac{dx_P(t)}{dt}\hat{u}_x = v_P(t)\hat{u}_x \rightarrow v_P(t) = \frac{dx_P(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \int_0^t v_P(t)dt = \int_{x(t=0)}^{x(t)} dx_P(t) = x(t) - x(t=0)$$

$$\vec{a} = \frac{dv_P(t)}{dt}\hat{u}_x = a_P(t)\hat{u}_x \rightarrow a_P(t) = \frac{dv_P(t)}{dt}$$

$$\rightarrow \int_0^t a_P(t)dt = \int_{v(t=0)}^{v(t)} dv_P(t) = v(t) - v(t=0)$$

Velocità e accelerazione in funzione della posizione

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v[x(t)] = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow a = v\frac{dv}{dx} \qquad \Rightarrow adx = vdv$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} adx = \int_{v_0}^{v} vdv \Rightarrow \int_{x_0}^{x} adx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

Moto periodico

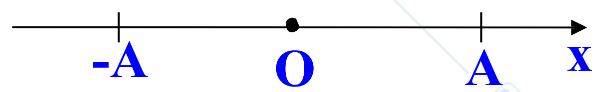
Il moto di una particella si dice periodico quando ad intervalli di tempo uguali la particella torna a passare nella stessa posizione con la stessa velocità.

Moto armonico semplice

***Moto armonico semplice*: particolare tipo di moto periodico lungo un asse rettilineo, che ha notevole importanza anche perché alla sua descrizione si rifanno numerosi altri fenomeni fisici, non limitati al solo campo della meccanica.**
Si ha un moto armonico semplice lungo un asse quando la sua legge oraria è del tipo:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Dove A e ϕ sono dei parametri che dipendono dalle condizioni iniziali e ω dalla fisica



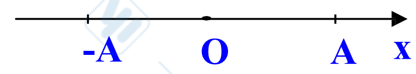
A - è chiamata *ampiezza*.

ω - si chiama *pulsazione*, ed ha dimensione dell'inverso di un tempo.

ϕ - è l'argomento del seno al tempo *t=0 (fase iniziale)*, quindi cambiare la fase è equivalente a ridefinire l'origine dei tempi.

Moto armonico semplice

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi)$$



Il valore di sen $(\omega t + \phi)$ varia tra -1 e 1, quindi l'intervallo in cui si muove l'oggetto è 2A con centro nell'origine.

Al tempo t=0, il punto occupa la posizione x(0)=A sen(ϕ). Le costanti A e ϕ definiscono la posizione iniziale del punto.

La funzione seno è una funzione periodica, quindi anche la funzione x(t) che definisce il moto armonico è periodica. Se si fa trascorrere un tempo $t=2\pi/\omega$, l'argomento del seno cambia di 2π e dunque x(t) riassume gli stessi valori,

Ad esempio: se per $t=t_0$ $\quad x(t_0) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t_0 + \phi)$

per $t=t_0+2\pi/\omega \rightarrow x(t_0+2\pi/\omega) = A\mathrm{sen}(\omega(t_0+2\pi/\omega)+\phi) = A\mathrm{sen}\left(\omega t_0 + \cancel{\omega}\times\frac{2\pi}{\cancel{\omega}}+\phi\right) = A\mathrm{sen}\,(\omega t_0 + \phi)$

÷

Dunque $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ esprime la durata di un'oscillazione completa.

T è il periodo del moto.

Moto armonico semplice

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Longrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

•La relazione sopra fa capire il ***significato della pulsazione*** **ω: il moto si ripete velocemente (T piccolo) se la pulsazione è grande, mentre la ripetizione è più lenta (T grande) per bassi valori della pulsazione.**

•La quantità che viene indicata generalmente con f o con ν è uguale all'inverso di T. Essa si chiama frequenza e descrive il numero di oscillazioni al secondo,

$$f = \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

•Il periodo (e quindi la frequenza) di un moto armonico semplice sono indipendenti dall'ampiezza del moto. Fissato il valore della pulsazione (legato alla fisica) si ha una *classe di moti armonici*, caratterizzati dallo stesso periodo, che differiscono per i diversi valori dell'ampiezza e della fase iniziale.

Moto armonico semplice: velocità e accelerazione

Funzione **velocità.** Se si deriva rispetto al tempo la legge oraria si ottiene:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

Controllo delle dimensioni: $[v]=[A][\omega]= [LT^{-1}]$

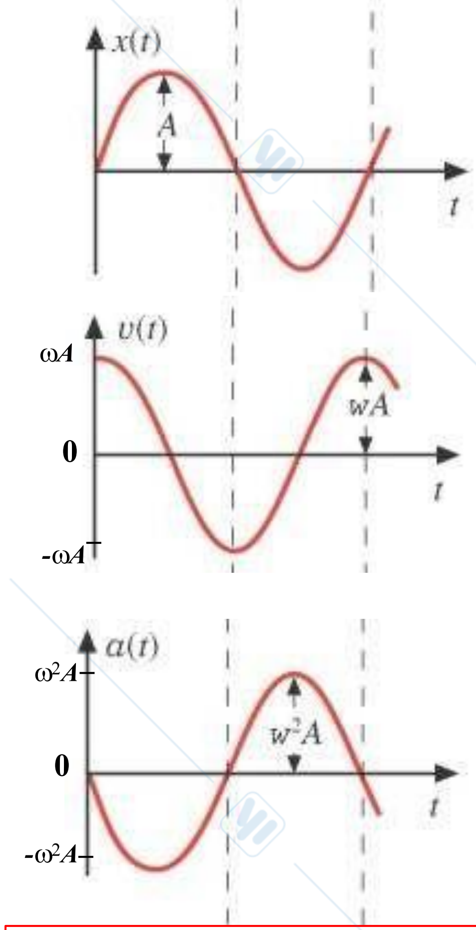
Derivando ancora si ottiene la funzione **accelerazione:** $a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$

Da cui risulta: $$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Questa particolarità, in base alla quale **l'accelerazione è proporzionale ed opposta allo spostamento** dalla posizione di equilibrio, **contraddistingue e caratterizza i moti armonici semplici**.

Quando troveremo dei sistemi nei quali si può affermare che accelerazione e spostamento sono legati in questo modo, potremo dire che tali sistemi si muovono di moto armonico. E anzi, dalla costante di proporzionalità sarà possibile dedurre T (ovvero f, ovvero ω)

Moto armonico semplice: spazio, velocità e accelerazione



$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

con $\phi=0$: $x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t)$$

La velocità ha il *valore massimo nel centro* di oscillazione (x=0) dove vale ωA e *si annulla agli estremi* (x=A, x=-A) dove si inverte il senso del moto

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

L'accelerazione *si annulla nel centro* di oscillazione e assume il *valore massimo* ($\omega^2 A$ in modulo) *agli estremi*, dove si inverte la velocità

NOTA: A parte il valore dell'ampiezza, le tre funzioni x(t), v(t), a(t) mostrano lo stesso andamento temporale: la forma ed il periodo sono uguali, c'è solo uno spostamento di una rispetto all'altra lungo l'asse del tempo, ovvero sono sfasate.

La velocità è sfasata di π/2 rispetto allo spostamento. $[\operatorname{sen}(\theta+\pi/2)=\cos(\theta)]$

L'accelerazione è sfasata di π rispetto allo spostamento $[\operatorname{sen}(\theta+\pi)=-\operatorname{sen}(\theta)]$

Moto armonico semplice: l'equazione differenziale del moto armonico

si è ricavato che

$$a(t) = -\omega^2 x(t)$$

Essendo **l'accelerazione** definita come

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Si ricava dunque:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Equazione differenziale del moto armonico

La condizione necessaria e sufficiente affinché un moto sia armonico è che valga questa equazione differenziale

Velocità e accelerazione in funzione della posizione x nel moto armonico

$$a = a(x) = -\omega^2 x$$

$$\int_{x_0}^{x} a(x)dx = -\omega^2 \int_{x_0}^{x} x dx \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}\omega^2 (x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2}\omega^2 (x_0^2 - x^2)$$

Dalla relazione tra accelerazione e velocità in funzione della posizione

$$a = \frac{dv(x(t))}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \Rightarrow a \cdot dx = v \cdot dv$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} a \cdot dx = \int_{v_0}^{v} v \cdot dv = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

Eguagliano le due espressioni per l'integrale di a(x) otteniamo

$$\frac{1}{2}\omega^2 (x_0^2 - x^2) = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) \qquad v^2 = v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 - x^2)$$