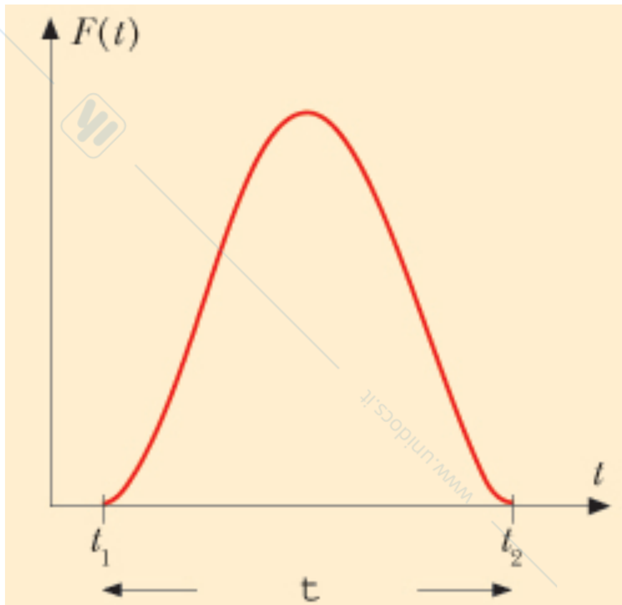
URTI TRA PUNTI MATERIALI

Urto tra due punti materiali: i due punti materiali vengono a contatto e interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile

⇩

si ipotizzi che durante l'urto i due punti materiali non si muovano in modo apprezzabile

Forze impulsive: durante l'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto materiale. Tali forze agiscono per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione



Le forze che agiscono durante l'urto sono *forze interne* al sistema dei due punti materiali

$\Downarrow$

In assenza di forze esterne o con risultante nulla delle forze esterne si ha la *conservazione della quantità di moto totale del sistema*

Le forze che agiscono durante l'urto sono *forze interne* al sistema dei due punti materiali

$$\Downarrow$$

In assenza di forze esterne o con risultante nulla delle forze esterne si ha la *conservazione della quantità di moto totale del sistema*

Se indichiamo con $\vec{v}_{1,in}$ e $\vec{v}_{2,in}$ le velocità nell'istante precedente l'urto tra i due punti materiali, di massa m_1 e m_2, e con $\vec{v}_{1,fin}$ e $\vec{v}_{2,fin}$ le corrispondenti velocità nell'istante successivo l'urto, si ha:

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \Rightarrow m_1\vec{v}_{1,in} + m_2\vec{v}_{2,in} = m_1\vec{v}_{1,fin} + m_2\vec{v}_{2,fin} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} = \text{costante}$$

$$\Downarrow$$

La quantità di moto del centro di massa rimane costante durante l'urto

$\Rightarrow$ il moto del centro di massa del sistema non viene alterato dall'urto

$\Rightarrow$ la velocità del centro di massa resta invariata durante l'urto

Durante l'urto variano invece le quantità di moto di ciascun punto materiale:

$$m_1\vec{v}_{1,in} - m_1\vec{v}_{1,fin} = \Delta\vec{p}_1 = \vec{J}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1}dt$$

$$m_2\vec{v}_{2,in} - m_1\vec{v}_{2,fin} = \Delta\vec{p}_2 = \vec{J}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2}dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1}dt = -\vec{J}_1 = -\Delta\vec{p}_1$$

$$\Downarrow$$

Le variazioni di quantità di moto subite dai due punti materiali sono uguali ed opposte

In presenza di forze esterne durante l'urto, si conserva lo stesso la quantità di moto totale del sistema ?

Secondo il Teorema del moto del centro di massa (o Prima equazione cardinale della dinamica) no : $\vec{R}^{(E)} = \dfrac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{tot} = m_{tot}\vec{v}_{CM} = \text{costante}$

Ma se la durata dell'urto è sufficientemente piccola e le forze esterne <u>NON</u> sono impulsive $\Rightarrow$ si può parlare di conservazione della quantità di moto totale

$\Downarrow$

$$\Delta\vec{P}^{(E)} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(E)} dt \approx \left(\vec{F}^{(E)}\right)_{medio} \cdot (t_2 - t_1) \quad \text{e} \quad \text{se} \quad (t_2 - t_1) \approx 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{P}^{(E)} \approx 0$$

Poiché si è ipotizzato che durante l'urto i due punti materiali non si muovano in modo apprezzabile

$$\Downarrow$$

Le eventuali energie potenziali non variano nell'urto

$$\Downarrow$$

$$\Delta E_m = \Delta E_k$$

Urto tra due punti materiali

Urto anelastico: dopo l'urto i punti ritornano separati, si conserva la quantità di moto ma NON l'energia cinetica

Urto completamente anelastico: dopo l'urto i punti rimangono attaccati formando un unico corpo puntiforme, si conserva la quantità di moto ma NON l'energia cinetica

Urto elastico: dopo l'urto i punti ritornano separati, si conserva la quantità di moto e l'energia cinetica

Urto completamente anelastico: dopo l'urto i punti rimangono attaccati formando un unico corpo puntiforme, si conserva la quantità di moto ma NON l'energia cinetica

Se indichiamo con $\vec{v}_{1,in}$ e $\vec{v}_{2,in}$ le velocità nell'istante precedente l'urto tra i due punti materiali, di massa m_1 e m_2, e con $\vec{v}'$ la velocità comune ai due punti nell'istante successivo l'urto, si ha:

$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \Rightarrow m_1\vec{v}_{1,in} + m_2\vec{v}_{2,in} = (m_1 + m_2)\vec{v}' = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} = \text{costante}$$

$$\Downarrow$$

Subito dopo l'urto i due punti materiali si muovono con la velocità che il centro di massa aveva un'istante prima dell'urto

Se applichiamo il secondo teorema di Konig si ha:

$$E_{k,in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E_{k,in}(CM) + E_k' = \frac{1}{2}(m_1 + m_1) v_{CM}^2 + E_k'$$

$$E_{k,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_1) v_{CM}^2 < E_{k,in} \quad \text{poiché } E_k' > 0$$

$$\Downarrow$$

Durante l'urto completamente anelastico si perde energia cinetica:

$$\Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 - (\frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2) = -E_k'$$

Durante l'urto completamente anelastico i due corpi si deformano in modo permanente e restano compenetrati.

Il lavoro compiuto per far avvenire la deformazione non viene più recuperato

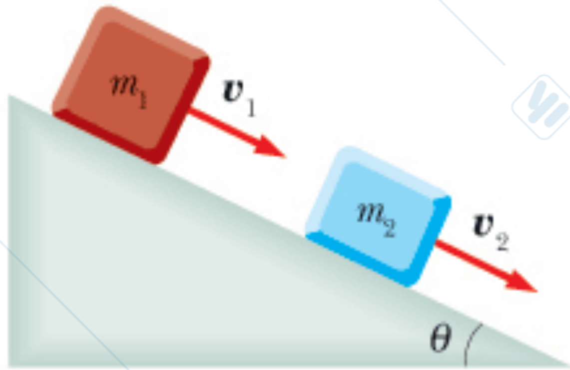
$\Rightarrow$ le forze interne che si sviluppano nell'urto non sono conservative

Esempio – Urto completamente anelastico tra due corpi che scendono lungo un piano inclinato

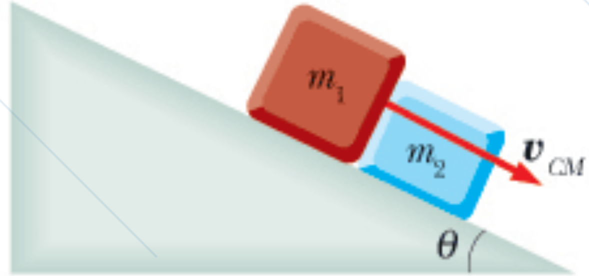
Si considerino due corpi puntiformi di massa m_1 e m_2 che scendono lungo un piano inclinato liscio. All'istante t = 0 la distanza tra i due corpi è d e le loro velocità sono $\vec{v}_{0,1}$ e $\vec{v}_{0,2}$ con $v_{0,1} > v_{0,2}$, in modulo.

Calcolare:

1) dopo quanto tempo, t_{urto}, i due corpi si urtano;
2) il modulo della velocità dopo l'urto v_d dei due corpi, ipotizzando l'urto come completamente anelastico.

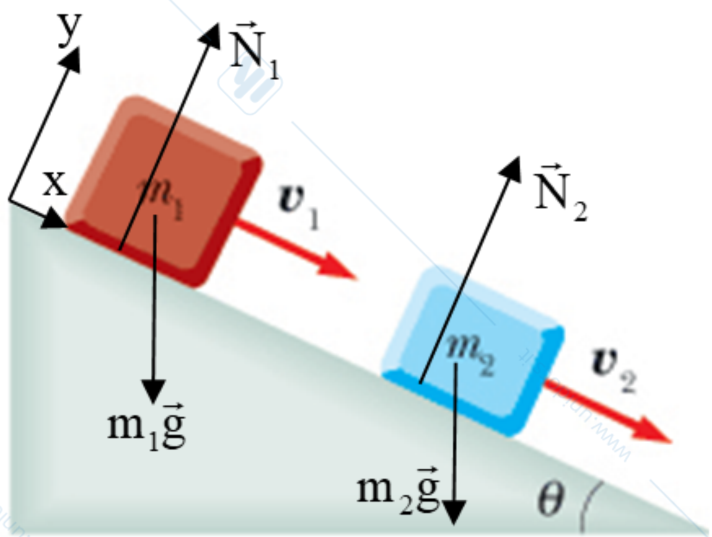


prima dell'urto



dopo l'urto

1)



prima dell'urto

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{N}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases}$$

Proiettando tali relazioni vettoriali sul sistema di riferimento inerziale (O, x, y) otteniamo:

$$\begin{cases} m_1 g \sin\theta = m_1 a_1 \\ -m_1 g \cos\theta + |N_1| = 0 \\ m_2 g \sin\theta = m_2 a_2 \\ -m_2 g \cos\theta + |N_2| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = g\sin\theta \\ a_2 = g\sin\theta \end{cases}$$

I due corpi scendono lungo il piano inclinato di moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$\begin{cases} a_1 = g\sin\theta \Rightarrow v_1(t) = v_{0,1} + g\sin\theta\cdot t \Rightarrow x_1(t) = x_{0,1} + v_{0,1}t + \frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t^2 \\ a_2 = g\sin\theta \Rightarrow v_2(t) = v_{0,2} + g\sin\theta\cdot t \Rightarrow x_2(t) = x_{0,2} + v_{0,2}t + \frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t^2 \end{cases}$$

essendo $x_{0,1}$ e $x_{0,2}$ le coordinate x dei due corpi per $t = 0$, con $x_{0,2} - x_{0,1} = d$

All'istante dell'urto $t = t_{urto} \Rightarrow x_1(t = t_{urto}) = x_2(t = t_{urto})$

$$x_1(t_{urto}) = x_1(t_{urto}) \Rightarrow x_{0,1} + v_{0,1}t_{urto} + \frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t_{urto}^2 = x_{0,2} + v_{0,2}t_{urto} + \frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t_{urto}^2$$

$$\Rightarrow x_{0,1} + v_{0,1}t_{urto} = x_{0,2} + v_{0,2}t_{urto} \Rightarrow t_{urto} = \frac{x_{0,2} - x_{0,1}}{v_{0,1} - v_{0,2}} = \frac{d}{v_{0,1} - v_{0,2}}$$

2) Durante l'urto agisce la forza peso, ma essendo non impulsiva $\Rightarrow$ possiamo lo stesso applicare la conservazione della quantità di moto:

$$\vec{P}_{1,iniz} = \vec{P}_{1,fin} \Rightarrow m_1 v_1(t = t_{urto})\hat{u}_x + m_2 v_2(t = t_{urto})\hat{u}_x = (m_1 + m_2) v_d(t = t_{urto})\hat{u}_x$$

$$\Rightarrow m_1 v_1(t = t_{urto}) + m_2 v_2(t = t_{urto}) = (m_1 + m_2) v_d \Rightarrow m_1\left(v_{0,1} + g\sin\theta \cdot t_{urto}\right) + m_2\left(v_{0,2} + g\sin\theta \cdot t_{urto}\right) = (m_1 + m_2) v_d$$

$$\Rightarrow v_d(t = t_{urto}) = \frac{m_1 v_{0,1} + m_2 v_{0,2}}{m_1 + m_2} + g\sin\theta \cdot t_{urto} = \frac{m_1 v_{0,1} + m_2 v_{0,2}}{m_1 + m_2} + g\sin\theta \frac{d}{v_{0,1} - v_{0,2}} = v_{CM}(t = t_{urto})$$

2) Durante l'urto agisce la forza peso, ma essendo non impulsiva $\Rightarrow$ possiamo lo stesso applicare la conservazione della quantità di moto:

$$\vec{P}_{1,iniz} = \vec{P}_{1,fin} \Rightarrow m_1 v_1(t = t_{urto})\hat{u}_x + m_2 v_2(t = t_{urto})\hat{u}_x = (m_1 + m_2)v_d(t = t_{urto})\hat{u}_x$$

$$\Rightarrow m_1 v_1(t = t_{urto}) + m_2 v_2(t = t_{urto}) = (m_1 + m_2)v_d \Rightarrow m_1\left(v_{0,1} + g\sin\theta \cdot t_{urto}\right) + m_2\left(v_{0,2} + g\sin\theta \cdot t_{urto}\right) = (m_1 + m_2)v_d$$

$$\Rightarrow v_d(t = t_{urto}) = \frac{m_1 v_{0,1} + m_2 v_{0,2}}{m_1 + m_2} + g\sin\theta \cdot t_{urto} = \frac{m_1 v_{0,1} + m_2 v_{0,2}}{m_1 + m_2} + g\sin\theta \frac{d}{v_{0,1} - v_{0,2}} = v_{CM}(t = t_{urto})$$

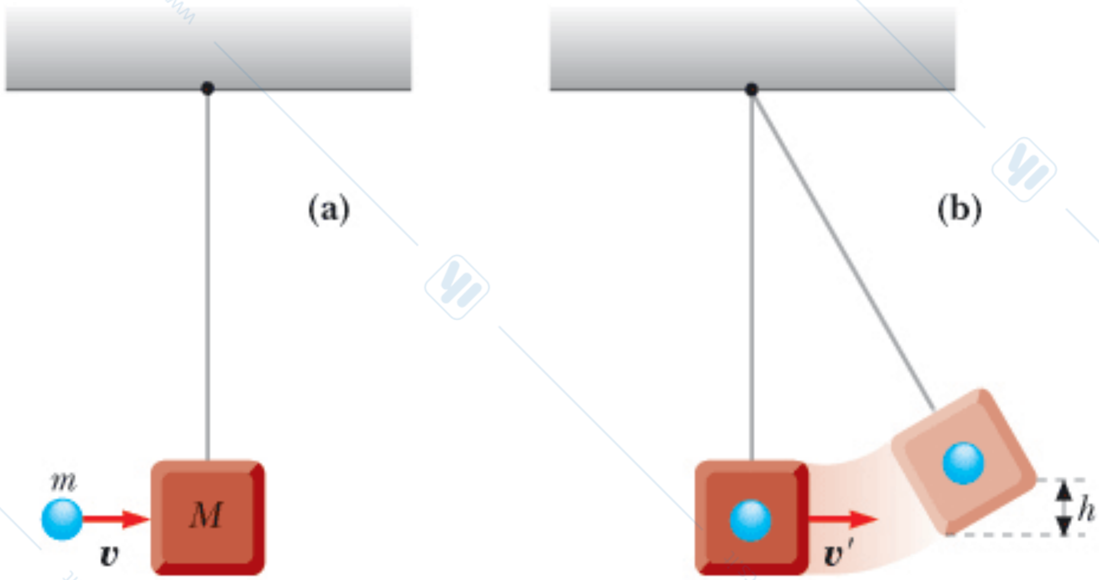
Dopo l'urto il sistema costituito dai due corpi attaccati scenderà lungo il piano inclinato soggetto all'accelerazione costante $g\sin\theta \Rightarrow$ moto rettilineo uniformemente accelerato

$$\Rightarrow v_d(t) = v_d(t = t_{urto}) + g\sin\theta \cdot (t - t_{urto}) = v_{CM}(t = t_{urto}) + g\sin\theta \cdot (t - t_{urto})$$

Esempio – Pendolo balistico

Determinare il valore del modulo della velocità v di un proiettile sparato contro il pendolo balistico, sapendo che questo, partendo da fermo, inizia a oscillare raggiungendo un'altezza massima h , misurata rispetto alla posizione iniziale.

Il pendolo balistico, utilizzato per misurare la velocità di un proiettile, consiste in un blocco di legno di massa M appeso verticalmente tramite un filo. Una pallottola di massa m che viaggia orizzontalmente con velocità (incognita) $\mathbf{v}$ urta il pendolo balistico rimanendovi conficcata. Se il tempo di collisione è piccolo rispetto al periodo di oscillazione del pendolo, il filo rimane praticamente verticale durante l'urto che possiamo considerare completamente anelastico.



Durante l'urto agiscono solo forze esterne verticali (tensione della fune e forza peso), ma nessuna forza esterna orizzontale ⇒ nell'urto si conserva la componente orizzontale della quantità di moto:

$$\vec{P}_{x,iniz} = \vec{P}_{x,fin} \Rightarrow mv\hat{u}_x = (m+M)v'\hat{u}_x \Rightarrow mv = (m+M)v' \Rightarrow v = \frac{m+M}{m}v'$$

Durante l'urto agiscono solo forze esterne verticali (tensione della fune e forza peso), ma nessuna forza esterna orizzontale $\Rightarrow$ nell'urto si conserva la componente orizzontale della quantità di moto:

$$\vec{P}_{x,iniz} = \vec{P}_{x,fin} \Rightarrow mv\hat{u}_x = (m+M)v'\hat{u}_x \Rightarrow mv = (m+M)v' \Rightarrow v = \frac{m+M}{m}v'$$

Dopo l'urto il pendolo con il proiettile inizia ad oscillare raggiungendo un'altezza massima h, misurata rispetto alla posizione iniziale, soggetto alla tensione del filo e alla forza di gravità. Poiché la tensione del filo non lavora essendo sempre perpendicolare alla traiettoria (essendo una forza centripeta) $\Rightarrow$ si conserva l'energia meccanica:

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow \Delta E_k + \Delta E_p = 0 \Rightarrow \left(0 - \frac{1}{2}(m+M)\left(v'\right)^2\right) + ((m+M)gh - 0) = 0$$

da cui:

$$v' = \sqrt{2gh} \Rightarrow v = \frac{m+M}{m}v' = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

Urto elastico: dopo l'urto i punti ritornano separati, si conserva la quantità di moto e l'energia cinetica

$$\begin{cases} \vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \\ E_{k,in} = E_{k,fin} \end{cases}$$

Le forze interne che si sviluppano nell'urto sono conservative:

$\Rightarrow$ i due corpi che si urtano subiscono delle deformazioni elastiche riprendendo subito dopo l'urto la configurazione iniziale

$$\begin{cases} \vec{P}_{in} = \vec{P}_{fin} \\ E_{k,in} = E_{k,fin} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \vec{v}_{1,in} + m_2 \vec{v}_{2,in} = m_1 \vec{v}_{1,fin} + m_2 \vec{v}_{2,fin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \mathrm{v}_{1,\mathrm{in}} + m_2 \mathrm{v}_{2,\mathrm{in}} = m_1 \mathrm{v}_{1,\mathrm{fin}} + m_2 \mathrm{v}_{2,\mathrm{fin}} \\ \dfrac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_{1,\mathrm{in}}^2 + \dfrac{1}{2} m_2 \mathrm{v}_{2,\mathrm{in}}^2 = \dfrac{1}{2} m_1 \mathrm{v}_{1,\mathrm{fin}}^2 + \dfrac{1}{2} m_2 \mathrm{v}_{2,\mathrm{fin}}^2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

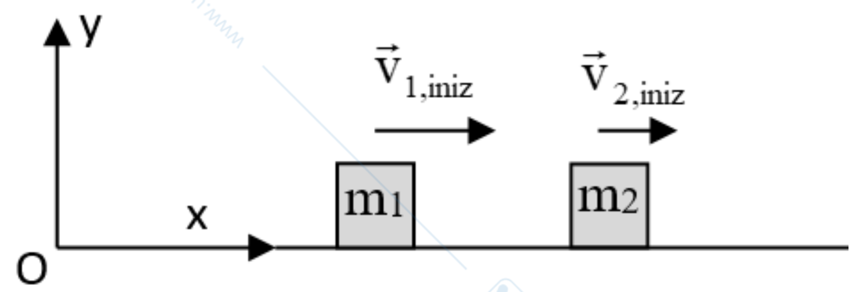
$$\begin{cases} \mathrm{v}_{1,\mathrm{fin}} = \dfrac{(m_1 - m_2)\mathrm{v}_{1,\mathrm{in}} + 2 m_2 \mathrm{v}_{2,\mathrm{in}}}{m_1 + m_2} \\ \mathrm{v}_{2,\mathrm{fin}} = \dfrac{2 m_1 \mathrm{v}_{1,\mathrm{in}} + (m_2 - m_1)\mathrm{v}_{2,\mathrm{in}}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

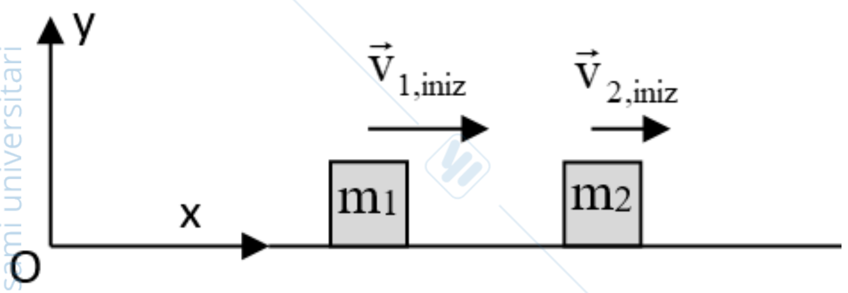
N.B. le velocità iniziali e finali presenti nelle formule sono da considerarsi algebriche, non in modulo, il cui segno dipende dal sistema di riferimento utilizzato.

Esempio

Due masse puntiformi si muovono lungo un piano orizzontale liscio con velocità tra loro parallele e concordi, di modulo $v_1 = 10$ m/s e $v_2 = 5$ m/s; le due masse sono uguali tra loro e di valore $m = 0.5$ kg. Ad un certo istante le due masse si urtano elasticamente.

Determinare le velocità delle due masse dopo l'urto (in direzione, verso e modulo).

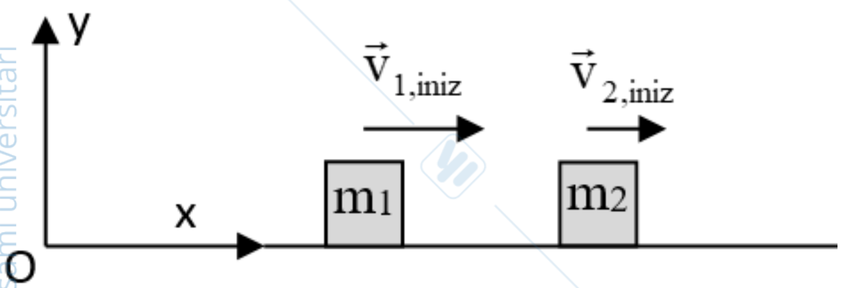




Durante l'urto elastico si conservano sia la quantità di moto lungo la direzione dell'urto (asse x), sia l'energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1 v_{1,iniz} + m_2 v_{2,iniz} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1,iniz}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,iniz}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2 \\ m_1 = m_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} v_{1,iniz} + v_{2,iniz} = v_{1,fin} + v_{2,fin} \\ v_{1,iniz}^2 + v_{2,iniz}^2 = v_{1,fin}^2 + v_{2,fin}^2 \end{cases}$$

da notare che le velocità iniziali sono entrambe dirette verso destra $\Rightarrow$ componenti positive



$$\begin{cases} v_{1,iniz} + v_{2,iniz} = v_{1,fin} + v_{2,fin} \\ v_{1,iniz}^2 + v_{2,iniz}^2 = v_{1,fin}^2 + v_{2,fin}^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{1,iniz} - v_{1,fin} = v_{2,fin} - v_{2,iniz} \\ v_{1,iniz}^2 - v_{1,fin}^2 = v_{2,fin}^2 - v_{2,iniz}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1,iniz} - v_{1,fin} = v_{2,fin} - v_{2,iniz} \\ (v_{1,iniz} + v_{1,fin})(v_{1,iniz} - v_{1,fin}) = (v_{2,fin} + v_{2,iniz})(v_{2,fin} - v_{2,iniz}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{1,iniz} - v_{1,fin} = v_{2,fin} - v_{2,iniz} \\ v_{1,iniz} + v_{1,fin} = v_{2,fin} + v_{2,iniz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1,iniz} + v_{2,iniz} = v_{2,fin} + v_{1,fin} \\ v_{1,iniz} - v_{2,iniz} = v_{2,fin} - v_{1,fin} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 = v_{2,fin} + v_{1,fin} \\ 5 = v_{2,fin} - v_{1,fin} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{1,fin} = 15 - v_{2,fin} \\ 5 = v_{2,fin} - 15 + v_{2,fin} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1,fin} = 15 - v_{2,fin} \\ v_{2,fin} = 10 m/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1,fin} = 5 m/s \\ v_{2,fin} = 10 m/s \end{cases}$$

$\Rightarrow$ dopo l'urto le due velocità finali sono dirette verso destra e, in particolare, nell'urto le due masse si sono scambiate le velocità (in direzione, verso e modulo): $\vec{v}_{1,fin} = \vec{v}_{2,iniz}$ e $\vec{v}_{2,fin} = \vec{v}_{1,iniz}$