Proprietà meccaniche dei fluidi

FLUIDO:

- sostanza liquida o gassosa che assume la forma del recipiente che la contiene.
- non sostiene gli sforzi di taglio (scorrimento)

a) <u>Liquidi</u>:

- hanno un volume definito e una superficie limite
- sono praticamente incomprimibili $\Rightarrow$ ρ(acqua distillata) = 10^3 kg/m^3

a) <u>Gas</u>:

- non presentano un volume proprio ma tendono ad occupare tutto il volume messo a disposizione
- sono facilmente comprimibili $\Rightarrow$ ρ(aria) = 1.3 kg/m^3

Le differenze di comportamento sono dovute alle diverse forze di legame tra le molecole nella fase liquida o nella fase gassosa.

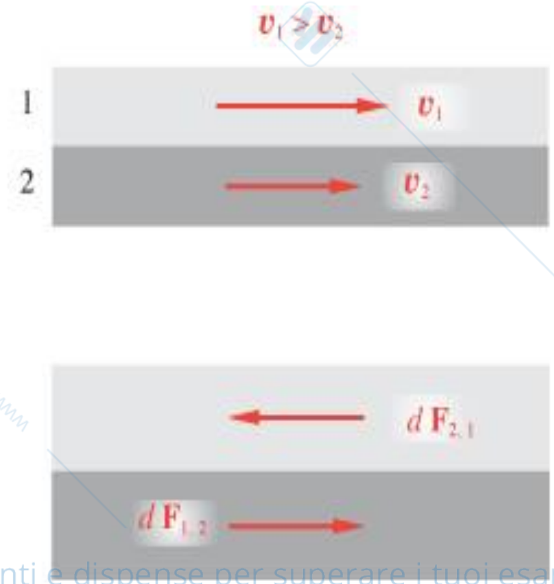
Macroscopicamente i fluidi sono sistemi continui, composti da un numero infinito di elementi di massa $dm = \rho dV$

E' possibile lo scorrimento di una qualsiasi parte di fluido rispetto ad un'altra adiacente o alla parete del contenitore. Allo scorrimento si oppone una forza di attrito interno

Tuttavia il fluido non può resistere allo scorrimento:

$\Rightarrow$ non esiste una forza di attrito statico che determini un equilibrio statico

$\Rightarrow$ se un fluido è in quiete, le forze tra gli elementi di fluido devono essere normali alle superfici di separazione, altrimenti i vari elementi scorrono l'uno rispetto l'altro, lasciando lo stato di quiete



NON si parla di forze applicate in un punto del fluido, ma per $\forall$ elemento di fluido di massa *dm* si considerano:

1) <u>Forze di volume</u> $\vec{F}_V$, proporzionali a dV
   esempio: forza peso $dm \cdot \vec{g} = \rho \cdot dV \cdot \vec{g}$
2) <u>Forze di superficie o di pressione</u> $\vec{F}_P$, proporzionali a dS

Pressione in un fluido, p

[pascal (Pa) (= 1 N/m^2 = 1 kg/(m·s^2), 1 bar=10^5 Pa] :

- NON ha caratteristiche direzionali: è una <u>grandezza scalare</u> e non dipende dall'orientazione della superficie su cui è misurata
- Rapporto tra il modulo della forza agente su una superficie infinitesima che circonda il punto del fluido e l'area della superficie stessa $\Rightarrow$ $p=dF/dS$
- Viene trasmessa alle superfici di separazione perpendicolarmente ad esse

Lavoro delle forze di pressioni

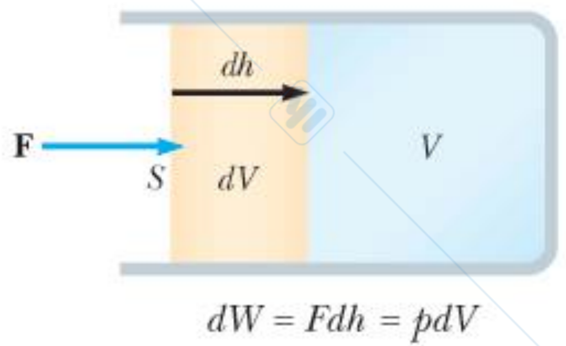


Figura 9.2
Lavoro della pressione in un fluido contenuto in un cilindro.

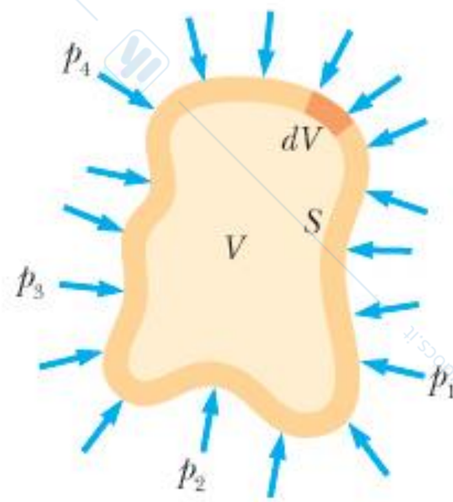
Mazzoldi, Nigro, Voci
Elementi di Fisica, Meccanica - Termodinamica
EdiSES, 2007

Una forza di pressione $\vec{F}$ agisce $\perp$ alla superficie infinitesima dS che si sposta di $d\vec{h}$
Volume spostato: $dV = dS \cdot dh$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{h} = F \cdot dh = p \cdot dS \cdot dh = p \cdot dV$$

$$\Downarrow$$

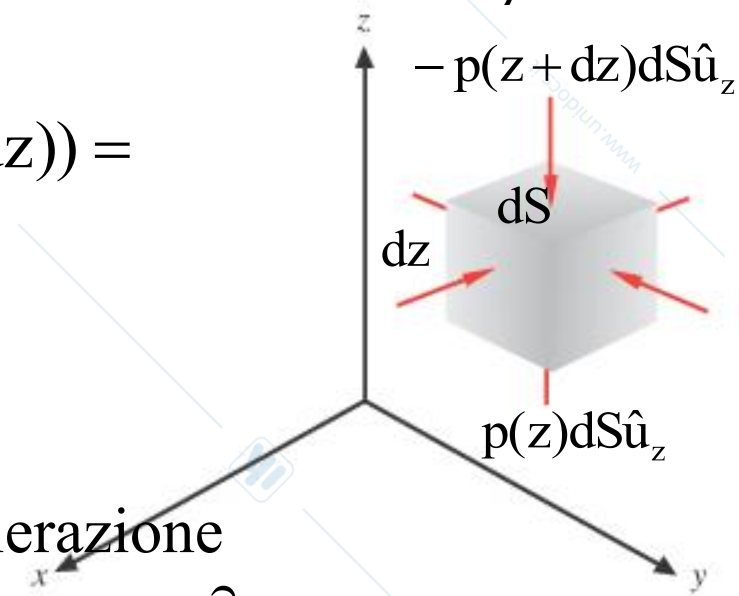
$$W = \int dW = \int p \cdot dV$$



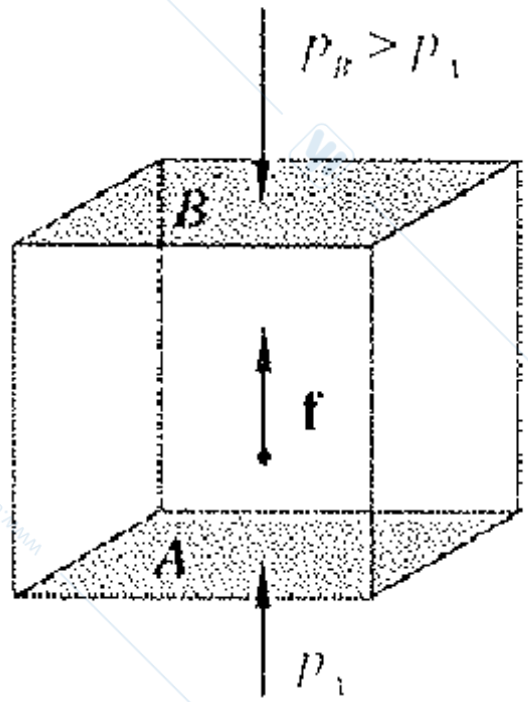
Lavoro delle forze di pressione su un elemento di fluido di volume V

Equilibrio statico di un fluido

- In un fluido in quiete tutti gli elementi *dm* del fluido presentano accelerazione e velocità nulla, in un sistema di riferimento inerziale
$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_V + \vec{F}_P = 0$$
- Consideriamo un elemento di forma cubica di massa *dm* e densità ρ
- Componenti scalari di $\vec{F}_P$ lungo l'asse z:
$$p(z)dS - p(z+dz)dS = dS\left(p(z) - \left(p(z) + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\right) =$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial z}dzdS = -\frac{\partial p}{\partial z}dV$$



- Componente scalare di $\vec{F}_V$ lungo l'asse z:
$$(F_V)_z = f_z dm = f_z \rho dV$$
con f_z componente lungo z di $\vec{F}_V / dm \Rightarrow$ accelerazione
- $\vec{F}_{tot} = \vec{F}_V + \vec{F}_P = 0$ lungo $z \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z}dV + f_z \rho dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \rho$
- Lungo l'asse x: $\frac{\partial p}{\partial x} = f_x \rho$ e l'asse y: $\frac{\partial p}{\partial y} = f_y \rho$
- $\cdot \rho f_x \hat{u}_x + \rho f_y \hat{u}_y + \rho f_z \hat{u}_z = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{u}_z \Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{grad}(p) = \rho \vec{f}}$
con $\vec{f} = f_x \hat{u}_x + f_y \hat{u}_y + f_z \hat{u}_z$



Se in un fluido in quiete agisce $\vec{F}_V$ la pressione nel fluido NON può essere costante

$$\Downarrow$$

$$\text{grad}(p) = \rho\vec{f}$$

$$\Downarrow$$

la pressione deve variare per consentire l'equilibrio statico.

$\vec{F}_V$ tende a spostare l'elemento di fluido provocando una reazione del fluido che si manifesta con una variazione di pressione

$$\Downarrow$$

la pressione aumenta lungo il verso positivo della direzione di $\vec{F}_V$

$$\Downarrow$$

la risultante delle $\vec{F}_P$ è opposta a $\vec{F}_V$

Equilibrio statico in presenza della forza peso: legge di Stevino

Consideriamo un elemento di fluido di massa *dm* e densità ρ in equilibrio.

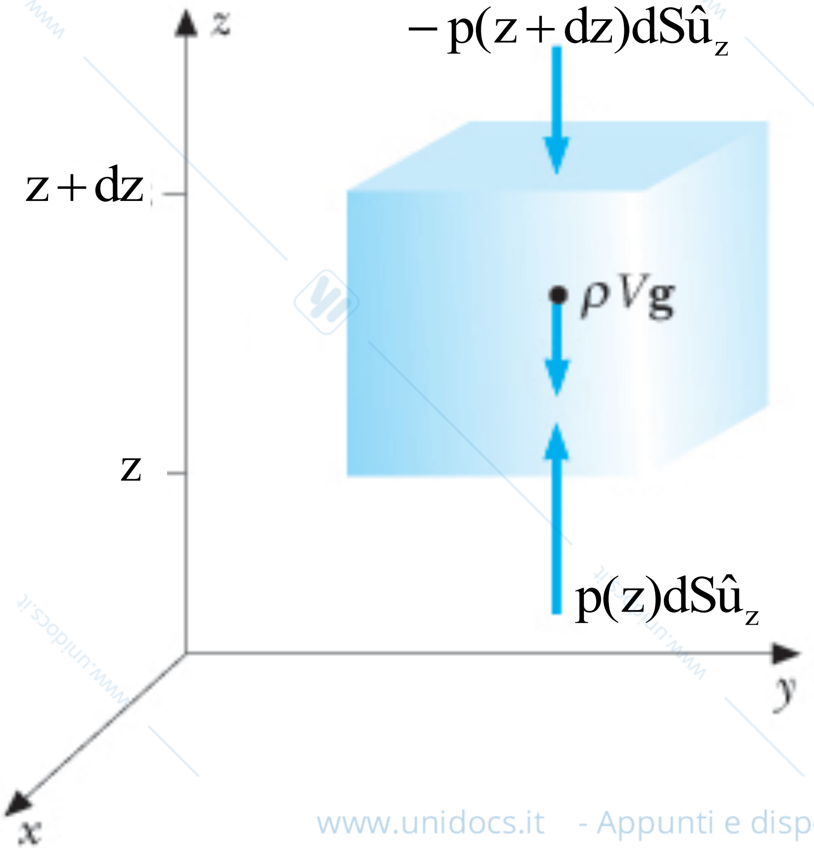
Forze agenti su tale elemento:

1) Forze di volume: forza peso $\vec{F}_V = dm \cdot \vec{g} = dm \cdot \vec{f}$

2) Forze di pressione dovute $\vec{F}_p$ al fluido circostante

Poiché il fluido è in equilibrio statico $\Rightarrow$ $\mathrm{grad}(p) = \rho\vec{f} = \rho\vec{g}$

$$\Rightarrow \mathrm{grad}(p) = \frac{dp}{dz}\hat{u}_z = -\rho g \hat{u}_z \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dz} = -\rho g}$$

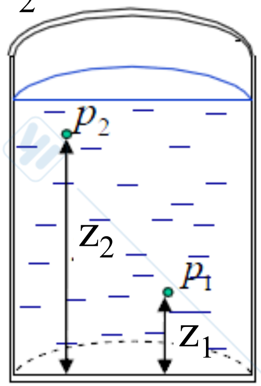


Se in un fluido agisce la forza peso, la pressione non può essere costante ma varia per avere l'equilibrio statico $\Rightarrow$ la pressione aumenta lungo il verso della forza peso

Tra due punti qualsiasi alle quote z_1 e z_2 in un fluido:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$\boxed{p_2 - p_1 = -\rho g\left(z_2 - z_1\right)}$$



Se z_2 è sulla superficie libera p_2 corrisponde a p_0:

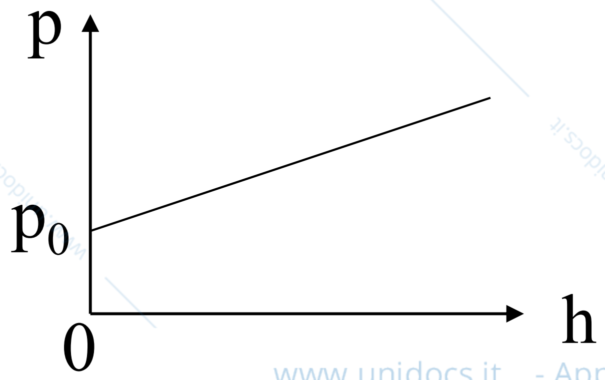
$$p_0 - p_1 = -\rho g h$$

Con h= profondità di p_1

$$\boxed{p_1 = p_0 + \rho g h}$$

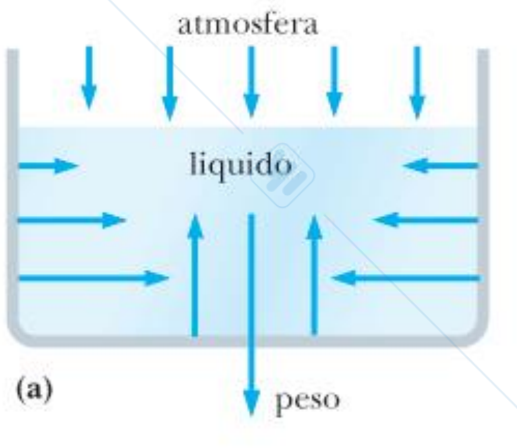
Legge di Stevino

La pressione *p* ad una profondità *h* sotto la superficie di un fluido di densità ρ costante aperto all'atmosfera è dato dalla somma della pressione esterna p_0 più una quantità $\rho g h$ che dipende linearmente con la profondità



$$p = p_0 + \rho g h$$

Legge di Stevino: $p = p_0 + \rho g h$ (se ρ costante)



Esempio bacino d'acqua sottoposto a pressione atmosferica: $\rho=10^3$ kg/m^3, $p_0= 1{,}013\cdot10^5$ Pa

$$\Downarrow$$

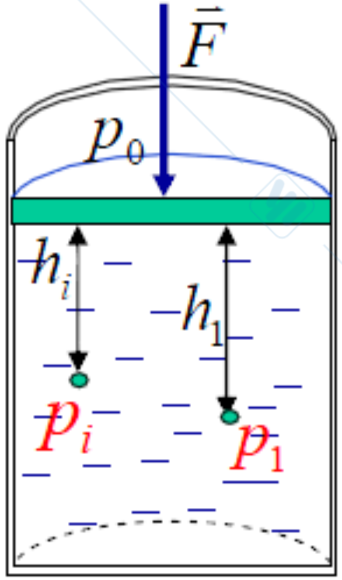
$$p(h)=(1{,}013\cdot10^5 + 9{,}8\cdot10^3\cdot h)\ \text{Pa}$$

ogni 10 m la pressione aumenta di circa 10^5 Pa

La legge di Stevino si può trovare calcolando il peso della colonna di liquido di altezza h:

$$mg = \rho V g = \rho S h g \Rightarrow p = \frac{F}{S} = \frac{\rho S h g}{S} = \rho g h$$

Conseguenze della legge di Stevino: la legge di Pascal



Dalla legge di Stevino: $p = p_0 + \rho g h$ (se ρ costante), con p_0 la pressione esterna

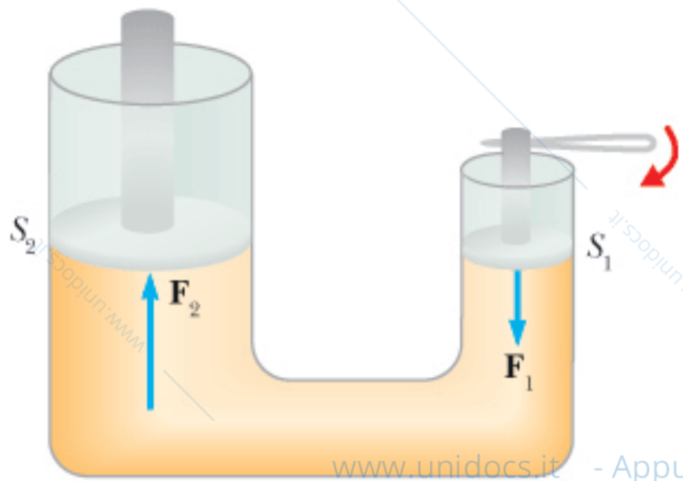
$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho g h_1 \\ p_i = p_0 + \rho g h_i \end{cases}$$

Se p_0 subisce una variazione Δp_0

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} p_1' = (p_0 + \Delta p_0) + \rho g h_1 = p_1 + \Delta p_0 \\ p_i' = (p_0 + \Delta p_0) + \rho g h_i = p_i + \Delta p_0 \end{cases}$$

Tutti i punti nel fluido subiscono la stessa variazione di pressione Δp_0

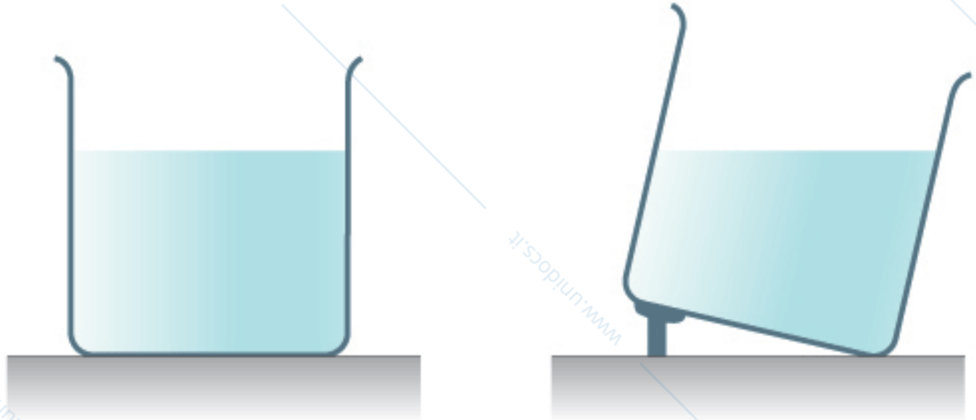


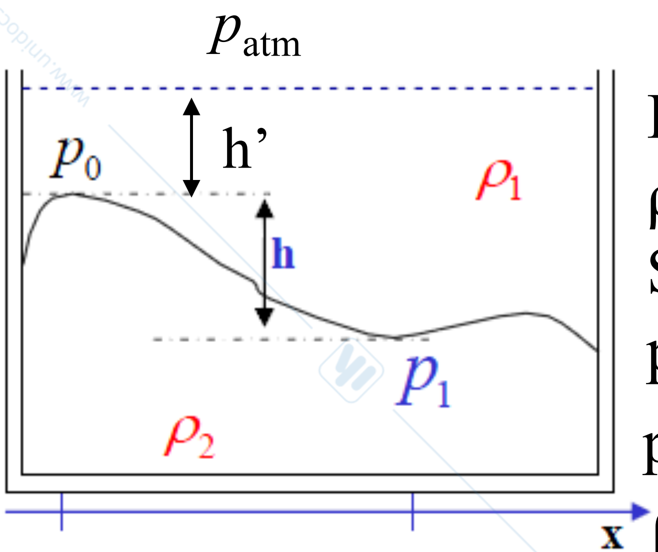
Esempio: la pressa idraulica

$$\Delta p_1 = \frac{F_1}{S_1} = \Delta p_2 = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}$$

Conseguenze della legge di Stevino: superfici isobariche

⇒ La superficie di separazione di fluidi di diversa densità è sempre orizzontale





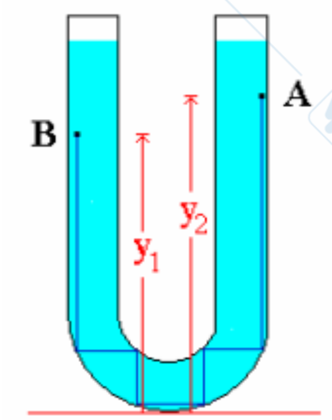
Ipotizziamo di avere due fluidi di densità diverse ρ_1 e ρ_2 separati da un una superficie non orizzontale: per Stevino alla stessa quota ci deve essere la stessa pressione, indipendentemente da x:

$$p_0 = p_{atm} + \rho_1 g h'$$

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho_1 g h \\ p_1 = p_0 + \rho_2 g h \end{cases} \Rightarrow p_0 + \rho_1 g h = p_0 + \rho_2 g h \Rightarrow \rho_1 g h = \rho_2 g h$$

Poiché $\rho_1 \neq \rho_2 \;\Rightarrow\; h = 0$

Conseguenze della legge di Stevino: vasi comunicanti



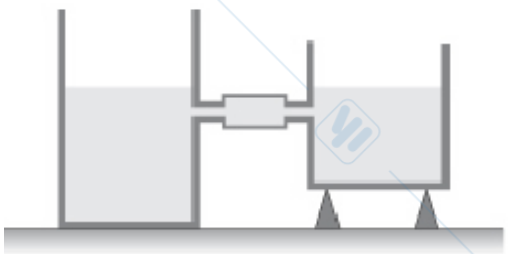
Conseguenza della legge di Stevino è che ***in un sistema di vasi comunicanti il fluido contenuto raggiunge la stessa quota indipendentemente dalla forma dei recipienti.***

Nel caso rappresentato in figura la differenza di pressione tra due punti qualsiasi si calcola attraverso la formula:

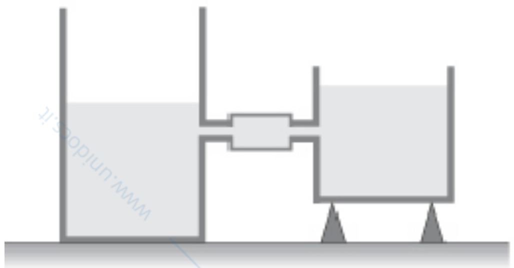
$$\boxed{p_2 - p_1 = -\rho g (y_2 - y_1)}$$

Poiché, per la legge di Stevino si ha differenza di pressione solo in corrispondenza di variazioni di quota, se le superfici A e B sono soggette alla stessa pressione, $\Delta p=0$,

$\Rightarrow$ allora saranno alla stessa quota $y_2=y_1$



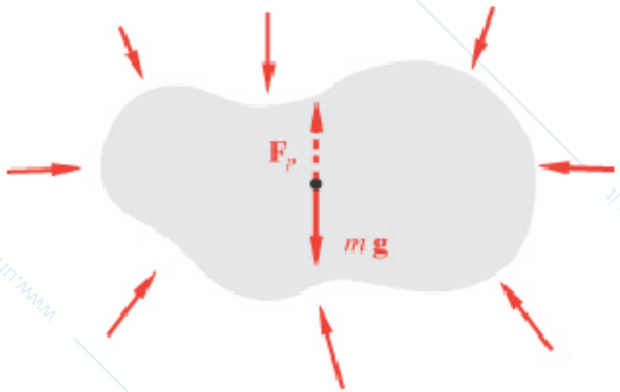
Condizione di equilibrio



Condizione di non equilibrio. Si osserva un flusso di liquido fino allo stabilirsi della stessa quota

Principio di Archimede

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato.



In un fluido in equilibrio sotto l'azione della gravità isoliamo idealmente un volume finito di fluido V di forma qualsiasi. La risultante delle forze di pressione, esercitate dal resto del fluido sulla parte isolata, è uguale ed opposta alla forza peso della stessa.

Infatti per la condizione di equilibrio del volume V, si ha:

$$\vec{F}_p + m\vec{g} = 0 \Rightarrow \vec{F}_p = -m\vec{g}$$

$m = \rho V$

Con ρ: densità del fluido

Forza di pressione esercitata sul fluido di volume V dal resto del fluido

Se ora sostituiamo allo stesso volume V di fluido un identico volume di qualsiasi altra sostanza di densità ρ' e massa: m'=ρ'V.

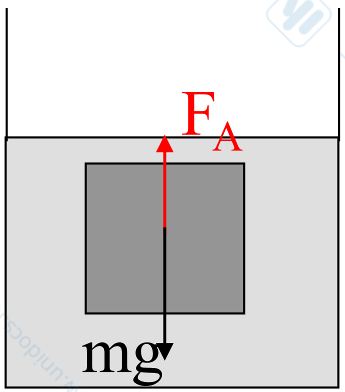
La risultante F_p delle forze di pressione esercitate dal fluido circostante non cambia, mentre varia la forza peso del volume preso in considerazione, dunque la forza risultante risulta:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_p + m'\vec{g} \Rightarrow \vec{F}_R = -m\vec{g} + m'\vec{g} = -\rho V\vec{g} + \rho' V\vec{g} = (\rho' - \rho)V\vec{g}$$

$$\vec{F}_R = (\rho' - \rho)V\vec{g}$$

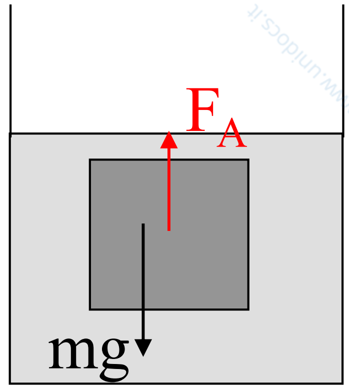
Se ρ'>ρ la forza risultante ha la stessa direzione e verso di g e quindi il corpo scende nel fluido, se invece ρ'<ρ il corpo sale

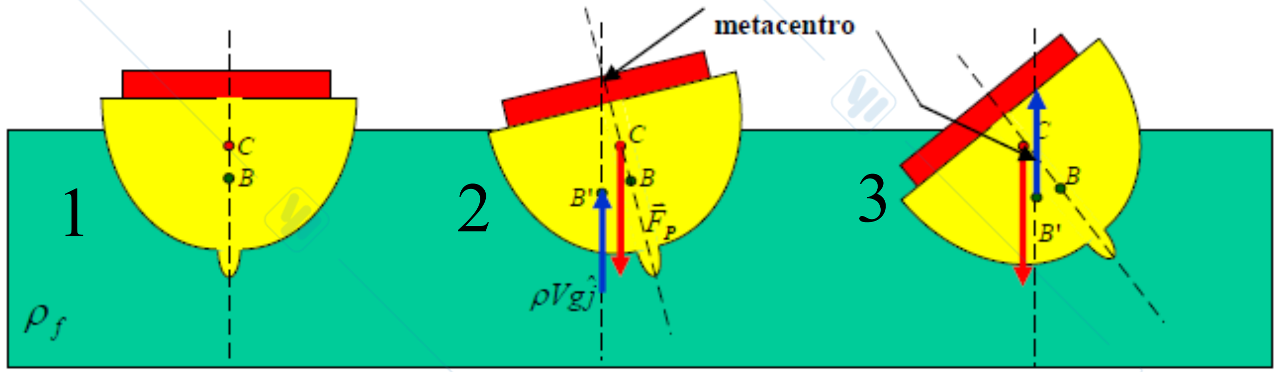
La spinta verso l'alto ricevuta dal corpo è detta spinta di Archimede: $\vec{F}_A = \vec{F}_p = -\rho V\vec{g}$



N.B. La forza di Archimede viene applicata al CM del fluido spostato, mentre la forza peso viene applicata al CM dell'oggetto

Nel caso in cui in due CM non coincidano o non si trovino sulla stessa verticale, nasce un momento



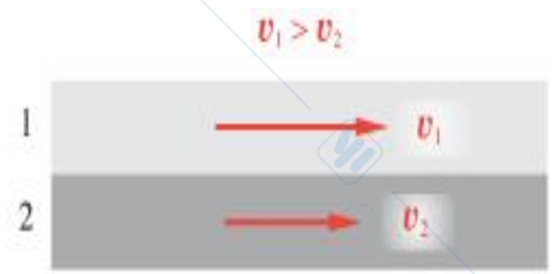


C = CM della barca
B = CM del liquido spostato

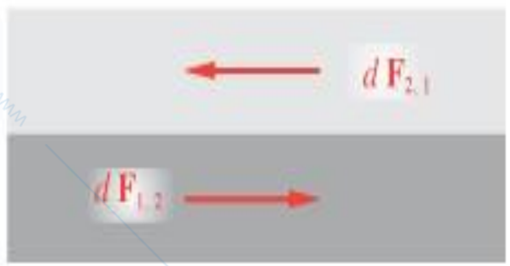
Se C e B sono sulla stessa verticale, $m\vec{g}$ e $\vec{F}_A$ hanno la stessa retta d'azione
$\Rightarrow$ la barca è in equilibrio (caso 1)

Se C e B <u>NON</u> sono sulla stessa verticale si genera un momento che agisce in modo da *riportare* (caso 2) o *allontanare* (caso 3) dall'equilibrio la barca (B'= nuovo CM del liquido spostato)

Forza di attrito interno



Quando si verifica uno scorrimento relativo tra due elementi di fluido compare lungo l'area di contatto una forza tangenziale di attrito interno con verso contrario a quello della velocità relativa.



L'elemento 1 del fluido esercita una forza sull'elemento 2 e viceversa: le due forze sono uguali e contrarie. Se v1>v2 la forza di attrito interno è ritardante per 1 e accelerante per 2

$$dF=\eta dS(dv/dn)$$

η=viscosità del fluido, dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura

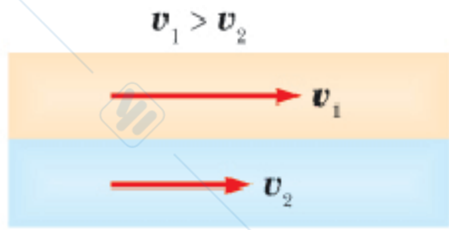
dS=area di contatto

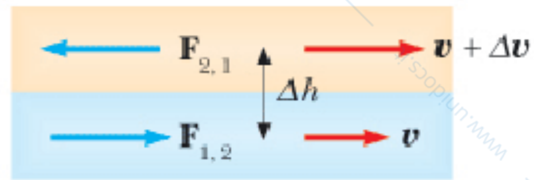
dv/dn=variazione del modulo della velocità ortogonale a dS

Viscosità

$$\boxed{dF = \eta dS \frac{dv}{dn}}$$

η: viscosità del fluido





Unità di misura SI $[\eta] = \left[\frac{N}{m^2} m \frac{s}{m}\right] = \left[\frac{Kg \cdot m \cdot s^{-2}}{m^2} m \frac{s}{m}\right] = \left[kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}\right]$

Dimensioni di η: $[\eta] = \left[ML^{-1}T^{-1}\right]$

Anche se nel S.I l'unità di misura è il kg/ms, nella pratica si usa l'unità di misura: poise e il sottomultiplo centipoise

$$1 poise = 10^{-1} kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$$

Alcun valori:

- olio ricino: 1 (20 °C)
- Glicerina: 1.5 (20°C)
- Acqua: 1.8 10^{-3} (0°C);
  1.0 10^{-3} (20°C);
  2.8 10^{-4} (100°C)
- sangue: 4 10-3
- olio lubrificante SAE 20: 0.3 (40°C)

Fluidi ideali

Si definisce fluido ideale, un fluido la cui viscosità η è nulla (η=0) e la cui densità è costante (ρ=cost)

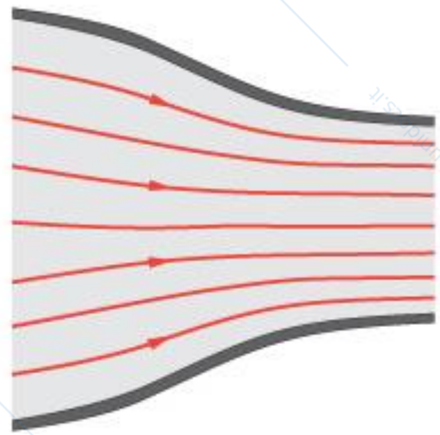
Un fluido ideale è un fluido non viscoso e incomprimibile

Moto di un fluido

Quando un fluido è in moto, il suo flusso può essere:

stazionario: tutti gli elementi di fluido che passano in istanti diversi nello stesso punto P(x,y,z) hanno in quella posizione SEMPRE la stessa velocità (in direzione, verso e modulo)

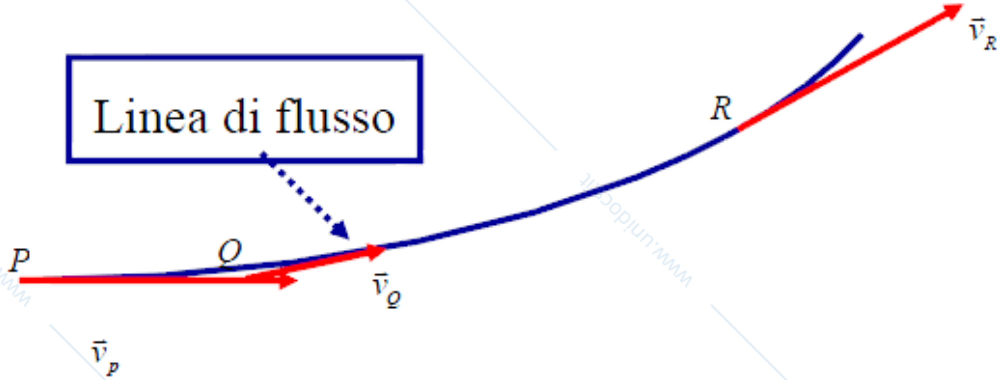
- ⟹ la velocità del fluido in ∀ punto P(x,y,z) rimane costante nel tempo
- ⟹ il cammino seguito da un elemento di fluido in condizione stazionarie si chiama linea di corrente
- ⟹ la velocità dell'elemento di fluido è sempre tangente alla linea di corrente in quel punto.
- ⟹ Un insieme di linee di corrente passanti per una linea chiusa forma un tubo di flusso.
- ⟹ Un tubo di flusso è immerso nel fluido o può coincidere con il condotto

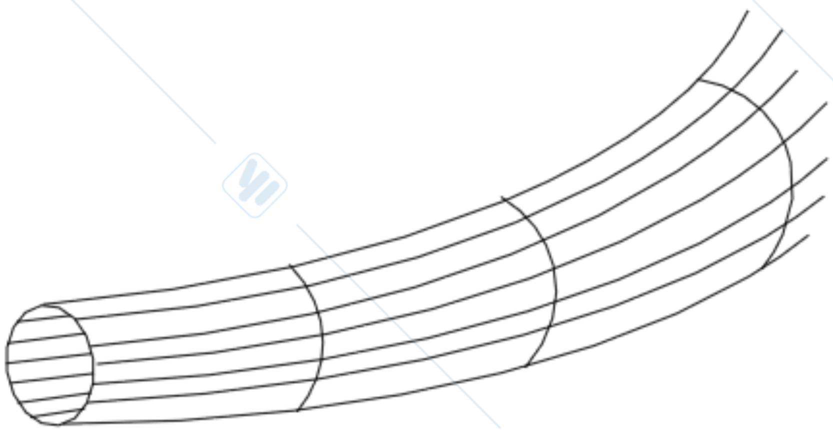


Tubi di flusso

In un fluido stazionario la velocita in ogni punto è costante

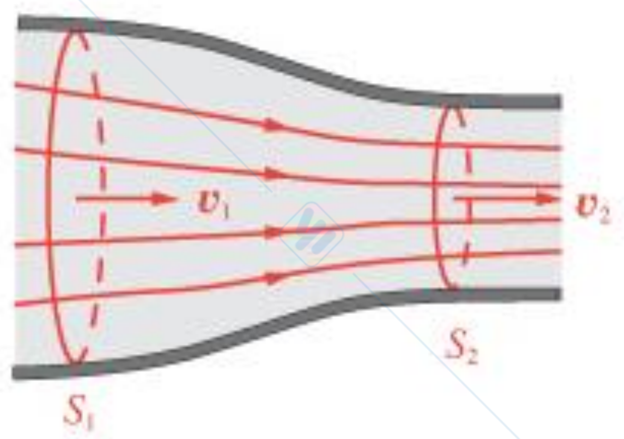
→ogni particella che arriva nei diversi punti in P, Q, R ha velocità V_P, V_Q, V_R)





1. Due linee di flusso non possono **mai incrociarsi**
2. L' insieme delle linee di flusso non cambia nel tempo
3. L' insieme delle linee di flusso passanti per una linea chiusa immersa nel fluido definisce un: **tubo di flusso**

In un tubo di flusso:
le velocità delle particelle di fluido che si muovono sulla superficie è parallela alla superficie stessa
Durante il moto nessuna particella può entrare o uscire dal T.d.F.



Portata di un tubo di flusso:

Si consideri un tubo di flusso di sezione infinitesima dS, ortogonale alle linee di corrente.

$$dq = v dS$$

⟹ portata del tubo di flusso, rappresenta tutto il volume di fluido che è passato attraverso dS in un secondo, $[q]=m^3/s$

Un tubo di flusso può cambiare di sezione, ma se:

- il fluido è ideale e quindi incomprimibile ⇒ ρ=costante
- si è in condizioni di regime stazionario

⟹ la portata q del tubo di flusso è la stessa in qualsiasi sezione

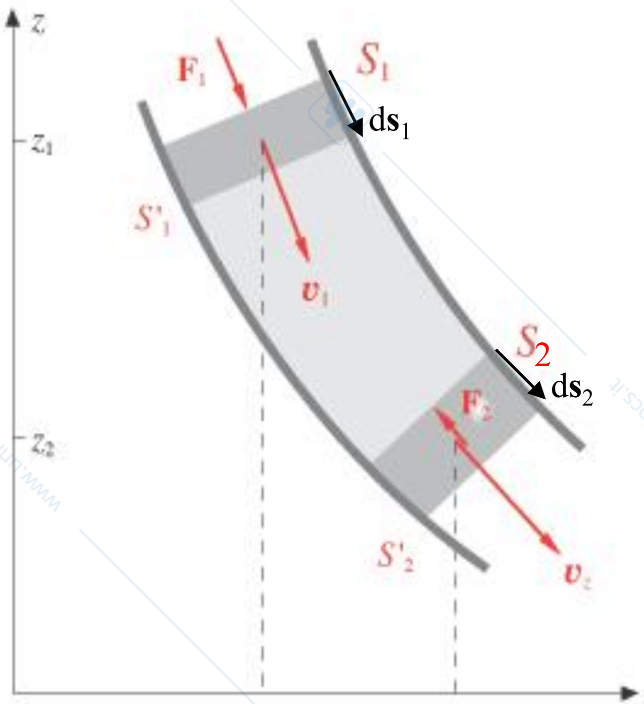
⇒ dove la sezione aumenta la velocità diminuisce, se diminuisce la sezione aumenta la velocità

Fluido ideale

Fluido in cui $\eta=0$ *e* ρ=costante

- ➡ *fluido non viscoso ($\eta=0$) e incomprimibile* (ρ=costante)
- ➡ *una massa di fluido occupa sempre lo stesso volume anche se è in movimento*
- ➡ *poiché $\eta=0$ le forze tra gli elementi, anche in moto relativo, sono sempre ortogonali alla superficie di contatto*

Teorema di Bernoulli



Fluido ideale ($\eta=0$ *e* ρ=costante) che scorre in condizioni di regime stazionario dentro un condotto a sezione variabile. Un volume di fluido, tra S_1 e S_2 si sposta tra S'_1 e S'_2.

$\mathbf{ds}_1=\mathbf{v}_1 dt$= spostamento da S_1 a S'_1;
$\mathbf{ds}_2=\mathbf{v}_2 dt$=spostamento da S_2 a S'_2

$dV_1=S_1 ds_1$, $dV_2=S_2 ds_2$ (nel tempo *dt*)

Fluido incomprimibile: $dV_1=dV_2$

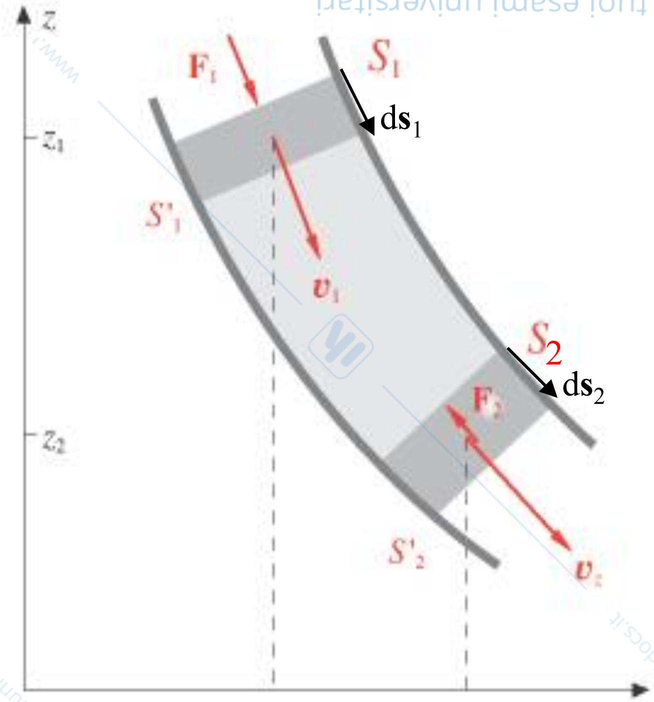
Portata del fluido che attraversa S_1 = portata del fluido che attraversa S_2.

Forze agenti sul fluido:

1) Forza peso (forza di volume)

2) Forze di pressione (forze di superficie)

3) Non ci sono forze di attrito interno poiche' $\eta=0$



Poiché il fluido è incomprimibile la massa dm_1 del volume dV_1 = massa dm_2 del volume dV_2

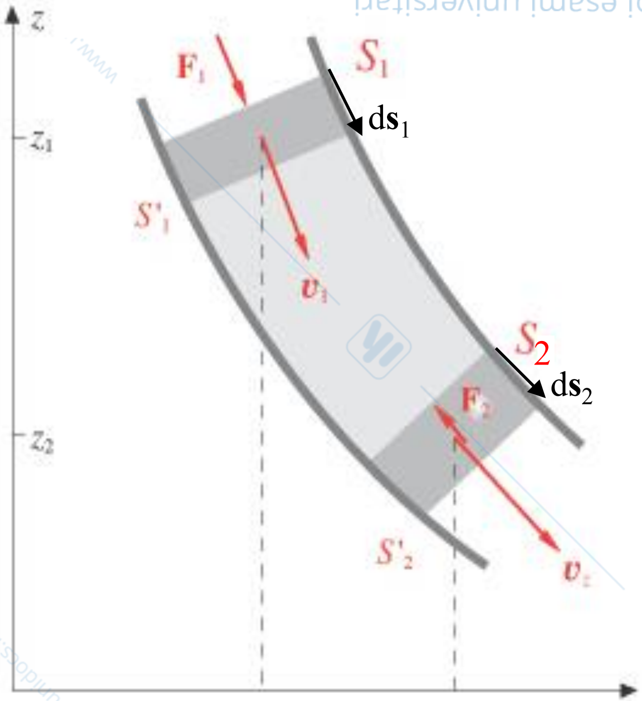
Movimento del fluido nel tempo dt equivale a:
i) dm si sposta dal volume dV_1 al volume dV_2
ii) la massa tra S'_1 e S_2 rimane invariata

Utilizziamo il teorema dell'energia cinetica:

$$W_{\text{forza peso}} + W_{\text{forze pressione}} = \Delta E_{cin}$$

$W_{\text{forza peso}}$ relativo allo spostamento di una massa dm dalla quota z_1 alla quota z_2 poiche' la massa tra S'_1 e S_2 non cambia quota

$$W_{\text{forza peso}} = -\Delta E_{pot} = -dmg(z_2-z_1) = -\rho dVg(z_2-z_1)$$



$W_{\text{forze pressione}}$ ⇒

Le forze di pressione dovute alle pareti del condotto danno lavoro nullo in quanto ortogonali allo spostamento mentre il lavoro di quelle dovute agli elementi a monte di S_1 e a valle di S_2 è dato da:

$$W_{\text{forze pressione}} = \mathbf{F}_1 d\mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 d\mathbf{s}_2 = p_1 S_1 ds_1 - p_2 S_2 ds_2 = (p_1 - p_2) dV$$

ΔE_{cin} ⇒

$$\Delta E_{cin} = (1/2) dm v^2_2 - (1/2) dm v^2_1 = (1/2) \rho dV (v^2_2 - v^2_1)$$

$$W_{\text{forza peso}} + W_{\text{forze pressione}} = \Delta E_{cin}$$

$$-\rho dV g (z_2 - z_1) + (p_1 - p_2) dV = (1/2) \rho dV (v^2_2 - v^2_1)$$

⇒

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

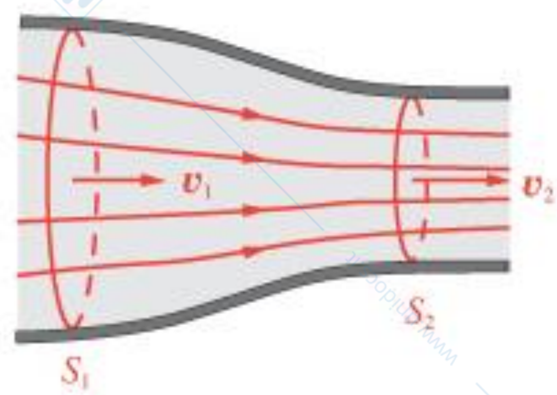
$$\Rightarrow \boxed{p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{invariante}}$$

Teorema di Bernoulli:

In un fluido ideale in moto con regime stazionario la somma della pressione, della densità di energia potenziale (energia potenziale per unità di volume) e della densità di energia cinetica (energia cinetica per unità di volume) è costante lungo il condotto o lungo un qualsiasi tubo di flusso.

Applicazioni del Teorema di Bernoulli

1) Condotto orizzontale



la coordinata z non varia $\Rightarrow p+(1/2)\rho v^2=$costante

In regime stazionario la portata q(=vS) rimane costante

$\Rightarrow$ se aumenta la sezione, diminuisce la velocità, aumenta la pressione

$\Rightarrow$ se diminuisce la sezione, aumenta la velocità, diminuisce la pressione

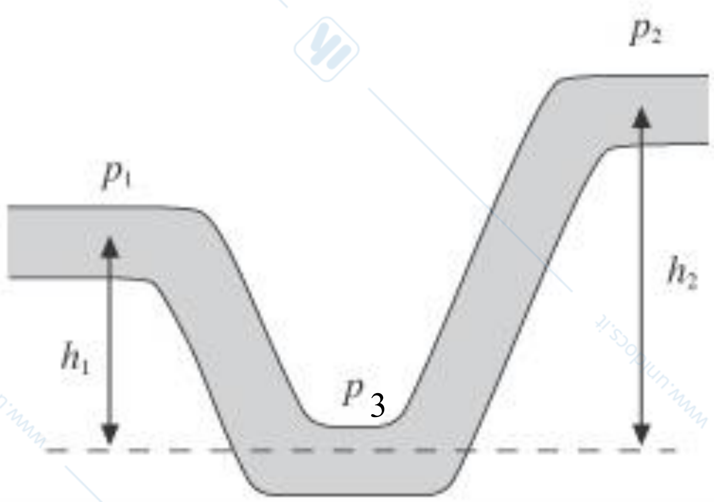
2) Fluido in equilibrio statico (Legge di Stevino)

$$\Rightarrow v = 0 \quad \Rightarrow \; p_1+\rho g z_1 = p_2+\rho g z_2$$

$$\text{se } p_2 = p_{atm} \Rightarrow p_1+\rho g z_1 = p_{atm} +\rho g z_2 \Rightarrow p_1 = p_{atm} + \rho g(z_2-z_1)$$

$$\Rightarrow p_1 = p_{atm} + \rho g h \quad (h = \text{profondità liquido})$$

3) Condotto a sezione costante



In regime stazionario (q = costante)

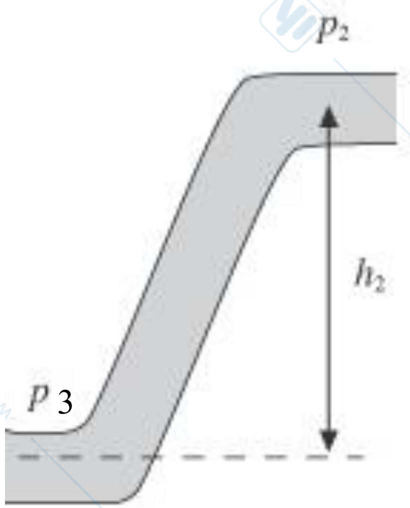
→ se non varia la sezione, la velocità rimane costante.

$$(p_1+(1/2)\,\rho v^2+\rho g h_1) = (p_2+(1/2)\rho v^2+\rho g h_2) = p_3+(1/2)\rho v^2$$

$$(p_1+\rho g h_1) = (p_2+\rho g h_2) = p_3$$

→ In un condotto a sezione costante in regime stazionario la pressione è massima nel punto più basso, e descresce con l'altezza

Esempio applicativo: tramite una pompa, si vuole far salire un fluido di una quota h_2 con una data portata q (= Sv)



$$p_3 = p_2 + \rho g h_2 \Rightarrow p_3 > p_2$$
$$\Downarrow$$

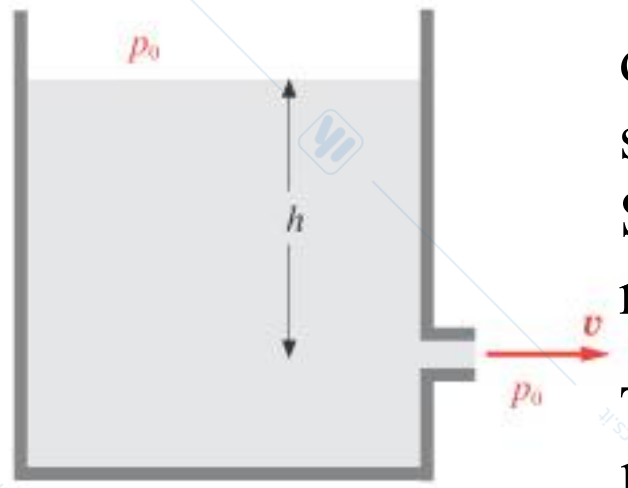
La pompa deve assicurare la differenza di pressione $\Delta p = \rho g h_2$

$\Delta p = \rho g h_2$ corrisponde ad una forza (in modulo) $F = \Delta p \cdot S = \rho g h_2 S$

e a una potenza $$P = \frac{dW}{dt} = F\frac{ds}{dt} = Fv = \rho g h_2 S v = \rho g h_2 q$$

Dati: acqua, h=1 m, q=1 $m^3/s \Rightarrow P = 10^3 \cdot 9.81 \cdot 1 \cdot 1$ W $= 9.81 \cdot 10^3$ W$= 9.81$ kW

Teorema di Torricelli



Un recipiente contenente un fluido incomprimibile di densità ρ presenta un piccolo foro (a distanza h dalla superficie libera) sulla parete di sezione trascurabile S_2 rispetto alla sezione S_1 del recipiente. p_0=pressione nell'ambiente in cui si trova il recipiente.

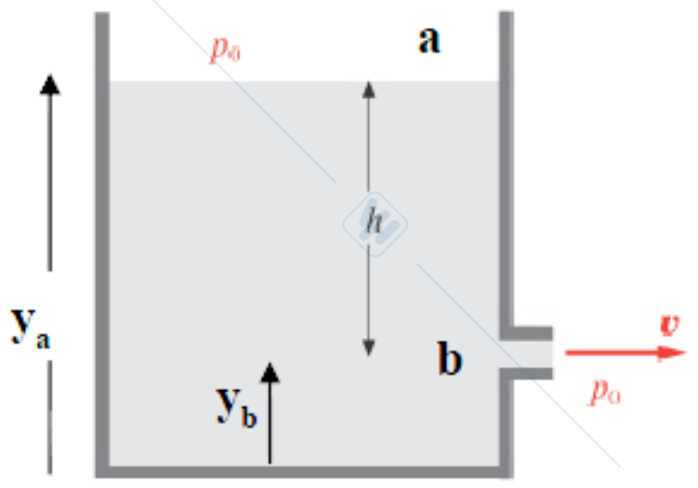
Trovare la velocità v_2 (velocità di deflusso) con cui il liquido esce dal foro.

Poiche' la portata deve essere costante (fluido incomprimibile) $v_1S_1=v_2S_2$ (v_1=velocità di spostamento di S_1):

$S_2 << S_1 \Rightarrow v_2 >> v_1$

$\Rightarrow$ il fluido può essere considerato in quiete sulla superficie libera

$\Rightarrow$ $(1/2)\, \rho v^2_1 \approx 0$



Dal Teorema di Bernoulli:

$(p_a+(1/2)\,\rho v^2_a+\rho g y_a)_{superf.} = (p_b+(1/2)\rho v^2_b+\rho g y_b)_{foro}$

Sulla superficie libera $p_a=p_0$, $v_a \approx 0$, $y=y_a$

All'uscita del foro $p_b=p_0$ e $y=y_b$

$$\cancel{p_a} + g\rho y_a = \cancel{p_b} + g\rho y_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2$$

$$v_b^2 = 2g(y_a - y_b) = 2gh \Rightarrow v_b = \sqrt{2gh}$$

La velocità di deflusso non dipende da ρ o da p_0 ed è pari a quella che avrebbe il fluido se scendesse in caduta libera da un'altezza h.