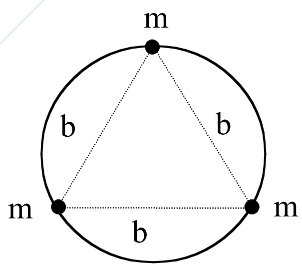
13/7/2009
ore 13:00

FISICA (appello 1)

Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Polli, Torricelli

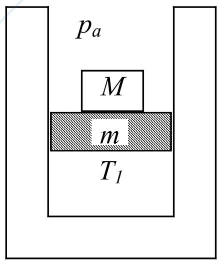
1) Una cassa è posta sul pianale di un autocarro che si muove con velocità V lungo un strada orizzontale. L'autocarro frena con accelerazione costante e si arresta in un tratto di lunghezza L. Si calcoli il minimo coefficiente di attrito tra cassa e pianale affinché la cassa non scivoli

2) Tre corpi di massa m si muovono per effetto dell'interazione gravitazionale lungo un'orbita circolare mantenendosi ai vertici di un triangolo equilatero di lato b. Si determini il periodo di rivoluzione in funzione di m, b e della costante di gravitazione universale G.



3) Si enunci la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi, definendo le grandezze che vi compaiono e spiegando chiaramente il significato dei simboli utilizzati. Si ricavi tale equazione dai principi di Newton.

4) Un cilindro chiuso da un pistone di massa m con sezione di area S e scorrevole senza attrito, contiene un gas ideale *monoatomico*. Il cilindro ed il pistone sono adiabatici. Con la pressione atmosferica p_a, il sistema è in equilibrio alla temperatura T_1. Sul pistone viene appoggiato un oggetto di massa M ed il gas raggiunge un nuovo stato di equilibrio. Trascurando la capacità termica di cilindro e pistone, si calcoli la temperatura finale.

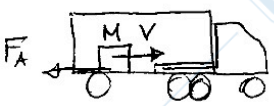


5) Una macchina termica che utilizza due sorgenti di calore con temperature $T_1 = 300$ K e $T_2 = 900$ K fornisce una potenza media di 1 kW con un rendimento pari al 50 % di quello di una macchina di Carnot funzionante con le stesse sorgenti. Si calcoli la quantità di calore scambiata con ciascuna delle sorgenti in *un minuto* di funzionamento e la corrispondente variazione di entropia dell'universo.

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Soluzione Quesiti N.1 e N.2

1) Sia M la massa della cassa. Poiché essa è solidale con l'autocarro, significa che verrà frenata anch'essa in un tratto L, a partire dalla velocità iniziale V.



Tale frenata è compiuta evidentemente dalla forza di attrito che si esercita sulla cassa stessa (unica forza agente sulla cassa stessa lungo la direzione orizzontale).

Avremo, per il teorema delle forze vive:

$$\Delta E_c = \mathcal{L}_{attrito}$$

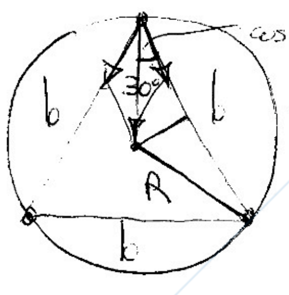
$$\Delta E_c = -\frac{1}{2} M V^2$$

$$\mathcal{L}_{attrito} = -\mu_s M g L$$

$$\mu_{s\,min} = V^2/2gL$$

2) Su ciascuno dei tre corpi, per la simmetria del problema, agisce la medesima forza (centripeta)

$$F = \cancel{2}\, G \frac{mm}{b^2} \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = m\, a_N = \cancel{m}\, \omega^2 \frac{b}{\sqrt{3}}$$



$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{b}{2} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$

$$\frac{3Gm}{b^3} = \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{3\frac{Gm}{b^3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{b^3}{3Gm}}$$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Soluzione Quesito N.3

Indichiamo con il simbolo $\vec{\tau}_i$ il momento risultante delle forze agenti sull'i-esimo punto del sistema rispetto ad un dato polo fisso O; tale momento può essere scomposto nel risultante dei momenti delle forze interne e di quelle esterne agenti sull'i-esimo punto: $\vec{\tau}_i = \vec{\tau}_i^{(I)} + \vec{\tau}_i^{(E)}$.

Sappiamo inoltre che, in base ai principi di Newton, per l'i-esimo punto vale la seconda equazione cardinale della dinamica per un punto materiale, cioè:

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_i^{(I)} + \vec{\tau}_i^{(E)}$$

ove $\vec{L}_i$ è il momento angolare dell'i-esimo punto rispetto al polo O.

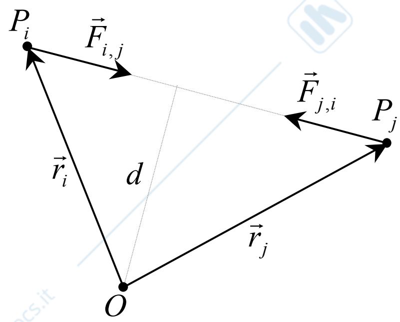
Sommiamo ora sull'indice i da 1 ad n ambo i membri dell'equazione precedente.

A sinistra troviamo $\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \frac{d}{dt}\vec{L}$, essendo $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i$ il momento angolare (totale) del sistema di punti materiali.

A destra abbiamo invece $\sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i^{(I)} + \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i^{(E)} = \vec{\tau}$.

Osserviamo però che deve essere $\vec{\tau}^{(I)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(I)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} = 0$.

Le forze interne, infatti, in base al terzo principio di Newton, sono a due a due uguali in modulo e direzione e contrarie in verso, ed hanno anche la stessa retta d'azione, perciò i rispettivi momenti si annullano a due a due:



$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,j} = -\vec{r}_j \times \vec{F}_{j,i} \quad \forall i \neq j$$

Di conseguenza, il momento risultante delle forze agenti su un sistema di punti materiali è pari al momento risultante delle sole *forze esterne* rispetto allo stesso polo:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}^{(E)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i^{(E)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)}$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(E)}}$$

Tale equazione prende il nome di *II Equazione cardinale* della dinamica dei sistemi di punti materiali:

La derivata temporale del momento della quantità di moto di un sistema di punti rispetto a un dato polo fisso è uguale al momento risultante, rispetto allo stesso polo, delle forze esterne applicate al sistema.

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Soluzione Quesito N.4

4) $c_V = \frac{3}{2}R$

$Q = 0$ (trasformazione adiabatica).
In base al I principio della termodinamica avremo che $0 = \mathcal{L} + \Delta U \Rightarrow \Delta U = -\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ext}$
Essendo poi il gas ideale: $\Delta U = n c_V (T_2 - T_1)$
Inizialmente, dall'equazione di stato, è $p_1 V_1 = nRT_1$ con $p_1 = p_0 + mg/S$, quindi $V_1 = \frac{nRT_1}{p_0 + mg/S}$.
A compressione avvenuta, il nuovo equilibrio raggiunto è tale che $p_2 V_2 = nRT_2$ con la pressione finale $p_2 = p_1 + Mg/S = p_0 + (M+m)g/S$.
Il lavoro fatto sul sistema da parte dello ambiente esterno è dunque $p_e(V_1 - V_2)$ con p_e pari alla pressione esterna con cui avviene la compressione, cioè $p_e = p_2$.
Riunendo tutte le equazioni, abbiamo così:

$$p_2 \cancel{nR} \left(\frac{T_1}{p_1} - \frac{T_2}{p_2} \right) = \frac{3}{2} \cancel{nR} (T_2 - T_1)$$

$$\left(\frac{3}{2} + 1\right) T_2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{p_2}{p_1}\right) T_1 . \text{ Sostituendo...}$$

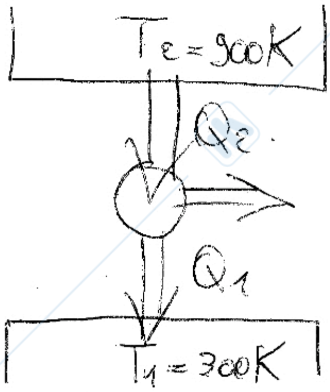
$$T_2 = \frac{2}{5} \left(\frac{3}{2} + \frac{p_0 + mg/S + Mg/S}{p_0 + mg/S} \right) T_1$$

$$T_2 = \left(1 + \frac{2}{5} \frac{Mg}{p_0 S + mg} \right) T_1$$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Soluzione Quesito N.5

5)



$$\eta = 50\% \; \eta_c = \frac{1}{3} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} \quad (I)$$

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}$$

$$L = P \cdot \Delta t = Q_2 - Q_1 \quad (II)$$

Risolvo il sistema di 2 eq. in 2 incognite (I)-(II)

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow Q_1 = \dfrac{2}{3} Q_2 \\ Q_2 - Q_1 = P \cdot \Delta t \Rightarrow \quad Q_2 = 3 P \cdot \Delta t = 180 KJ \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad Q_1 = 2 P \cdot \Delta t = 120 KJ \end{cases}$$

$\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2$ somma delle variazioni di entropia delle sorgenti.

$$\Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = -\frac{Q_2}{T_2} = -\frac{\cancel{3}}{2}\frac{Q_1}{\cancel{3} T_1} = -\frac{1}{2}\frac{Q_1}{T_1}$$

$$\Delta S = \frac{1}{2}\frac{Q_1}{T_1} = 200 \, J/K > 0$$