3.4 Energia potenziale e campi di forze conservativi

Campi scalari e campi vettoriali

Def. Si dice *campo scalare* una qualunque funzione a valori scalari definita sul generico spazio vettoriale ad n-dimensioni $\mathbb{R}^n$ (ad esempio lo spazio euclideo 3D dei vettori posizione).

Def. Si dice *campo vettoriale* una qualunque funzione a valori vettoriali definita sul generico spazio vettoriale ad n-dimensioni $\mathbb{R}^n$ (ad esempio lo spazio euclideo 3D dei vettori posizione).

Oss. I concetti matematici di campo scalare e di campo vettoriale trovano in fisica ampia applicazione. Infatti in natura le forze elementari sono descritte, da un punto di vista formale, da campi vettoriali, detti appunto campi di forze.

Oss. Ad esempio, la forza peso agente su di un punto materiale è ben definita per ogni punto della superficie terrestre. Dunque la forza peso è più propriamente un campo di forze peso. L'energia potenziale della forza peso è invece un campo scalare, anch'esso definito in tutti i punti della superficie terrestre, ma con valori scalari, il quale gode di una interessante proprietà, e cioè permette di esprimere il lavoro fatto dalla forza peso nello spostare un punto materiale dal punto A al punto B come differenza tra i valori che tale campo scalare assume nei due punti estremi A e B considerati.

Campi di forze conservativi

Def. Un campo di forze che ammette energia potenziale si dice *campo conservativo*, e si dice che la forza corrispondente è una *forza conservativa*.

Oss.1 Condizione *necessaria ma non sufficiente* perché un campo di forze sia conservativo è che l'espressione della forza dipenda *solo dalla posizione* del punto materiale cui è applicata: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

Oss.2 Condizione *sufficiente ma non necessaria* perché un campo di forze sia non conservativo è che l'espressione della forza dipenda anche dalla *velocità* del punto materiale cui è applicata.
Ex. Le forze di attrito ad esempio sono certamente non conservative.

Oss.3: Per una *forza conservativa*, il lavoro corrispondente ad uno spostamento da A a B è sempre uguale alla variazione di energia potenziale, cambiata di segno, ed il lavoro elementare è il differenziale dell'energia potenziale, cambiato di segno (si dice anche, in questo caso, che il lavoro elementare è un *differenziale esatto*):

$$\mathcal{L}_{A\to B} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p \quad ; \qquad d\mathcal{L} = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$$

Infatti, essendo in tal modo il lavoro elementare un differenziale esatto, integrando fra A e B si ottiene:

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \int_A^B d\mathcal{L} = -\int_A^B dE_p = -E_p\Big|_A^B = -E_p(B) + E_p(A) = -\Delta E_p$$

Oss.4: In un campo di forze conservative, perciò, il lavoro *non dipende dalla traiettoria*, ma *solo dagli estremi*.

Oss.5: In un campo di forze conservative il lavoro compiuto su un cammino chiuso è nullo:

$$\mathcal{L}_{A\to A} = \oint d\mathcal{L} = 0$$

3.5 Esempi di calcolo dell'energia potenziale

Oss. L'espressione dell'energia potenziale, al contrario dell'energia cinetica, dipende dal tipo di forza considerata.

Vediamo di seguito alcuni importanti esempi di forze conservative e determiniamone l'espressione dell'energia potenziale.

Energia potenziale della forza peso
Abbiamo già visto l'energia potenziale della forza peso, che per un corpo di massa m a quota h al di sopra del punto di riferimento vale $E_p = m g h$.

Energia potenziale delle forze elastiche
L'espressione della forza elastica, supponendo di prendere l'origine nell'estremo libero della molla, è nel caso tridimensionale generale:

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

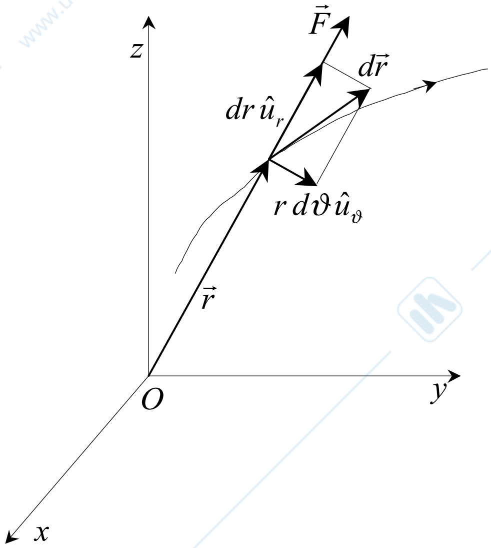
Il lavoro compiuto tra i punti P_1 ed P_2 vale:

$$\mathcal{L} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -k\int_{P_1}^{P_2} \vec{r}\cdot d\vec{r} = -\frac{1}{2}k|\vec{r}|^2\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{2}k\left(r_1^2 - r_2^2\right) \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k r^2 \quad \left(E_p(0) = 0\right)$$

Energia potenziale delle forze centrali

Def. Un *campo di forze centrali* è un campo di forze per il quale valgono le due seguenti condizioni:
1) la forza è sempre diretta centralmente rispetto ad un punto dello spazio detto *centro* del campo di forze;
2) la forza ha modulo che dipende solo dalla distanza da tale centro.

Oss. In base alle suddette condizioni definitorie, se assumiamo l'origine del sistema di riferimento nel centro del campo di forze, l'espressione di una generica forza centrale sarà: $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{u}_r$



Possiamo allora esprimerne il lavoro come segue:

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \int_A^B f(r)\hat{u}_r\cdot d\vec{r}$$

Lo spostamento infinitesimo $d\vec{r}$ può essere scomposto in una componente parallela al versore radiale $\hat{u}_r$ e quindi alla forza, ed una componente trasversale, ortogonale alla forza. Si ha:

$$d\vec{r} = dr\,\hat{u}_r + r\,d\vartheta\,\hat{u}_\vartheta \Rightarrow f(r)\hat{u}_r\cdot d\vec{r} = f(r)dr.$$

L'energia potenziale si calcola dunque come:

$$E_p(r) = \mathcal{L}_{r\to r_0} = \int_r^{r_0} f(r)dr,$$

avendo posto $E_p(r_0) = 0$ come riferimento.

Oss. L'espressione esplicita dell'energia potenziale dipende poi da quella della forza cioè dalla funzione $f(r)$.

Energia potenziale della forza gravitazionale

La forza gravitazionale è un caso particolare di forza centrale. Sia ora *M* la massa che genera il campo ed *m* una massa posta nel campo generato da *M*. Dall'espressione della forza di attrazione gravitazionale ricaviamo quella del lavoro corrispondente ad uno spostamento di *m* da *A* a *B*. Ricordiamo che $\vec{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}\hat{u}_r$, quindi:

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \int_A^B -\gamma \frac{Mm}{r^2} dr = -\gamma\, Mm \int_A^B \frac{dr}{r^2} = +\gamma\, Mm \frac{1}{r}\Bigg|_A^B = \frac{\gamma\, Mm}{r_B} - \frac{\gamma\, Mm}{r_A}$$

Prendendo allora come punto di riferimento (ad energia potenziale nulla) quello a distanza infinita da *M*, l'energia potenziale della massa *m* a distanza *r* da *M* vale $E_p(r) = -\frac{\gamma\, Mm}{r}$.

3.6 Teorema di conservazione dell'energia meccanica

Enunciato del Teorema

Def. Definiamo *energia meccanica E* di un sistema la somma dell'energia cinetica e di tutte le energie potenziali delle forze conservative in gioco, cioè $E = E_c + E_p$.

Si dimostra valere un risultato estremamente importante:

***Teorema di conservazione dell'Energia Meccanica*:**

In presenza di sole forze conservative l'energia meccanica (totale) del sistema si conserva.

Dimostrazione

Il lavoro di tutte le forze agenti su un punto materiale per uno spostamento da *A* a *B* è pari alla variazione dell'energia cinetica, per il teorema delle forze vive:

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \int_A^B \left(\sum_i \vec{F}_i\right)\cdot d\vec{r} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i \mathcal{L}_{i,A\to B} = E_c(B) - E_c(A) = \Delta E_c$$

Se *tutte le forze agenti* $\vec{F}_i$ *sono conservative* è possibile definire un'energia potenziale $E_{p,i}$ per ciascuna di esse, e dunque risulta:

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \sum_i \mathcal{L}_{i,A\to B} = \sum_i -\Delta E_{p,i} = -\Delta E_p$$

dove con E_p abbiamo indicato l'energia potenziale totale, somma di tutte le energie potenziali, e con ΔE_p la sua variazione nello spostamento da *A* a *B*.

Dunque, se tutte le forze agenti sono conservative, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale (totale) del punto materiale *P* si conserva:

$$\Delta E_c = \mathcal{L}_{A\to B} = -\Delta E_p \quad \Rightarrow \quad \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \qquad \text{ovvero}$$

$$\boxed{\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = 0}$$

Quindi $E(A) = E_c(A) + E_p(A) = E_c(B) + E_p(B) = E(B)$

Oss. In presenza di tutte e sole forze conservative, una variazione dell'energia cinetica può avvenire solo a scapito dell'energia potenziale, e viceversa:

$\Delta E_c > 0 \ (< 0) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E_p < 0 \ (> 0)$

Il Teorema di Conservazione dell'Energia

Oss. Il Teorema di conservazione dell'energia meccanica è parte del più generale *Teorema di conservazione dell'energia*, valido anche in presenza di forze *non conservative*. Questo teorema dice che:

L'energia non può mai essere creata né distrutta, ma solo trasformata da una forma ad un'altra.

Oss. In presenza di *forze non conservative* si hanno trasformazioni di energia meccanica in energia di tipo diverso, e/o viceversa, perciò *l'energia meccanica del sistema non si conserva*. Se indichiamo con $\vec{F}_{nc}$ la risultante delle forze non conservative applicate al nostro punto materiale P e con $\mathcal{L}_{nc}$ il lavoro compiuto da tali forze, in generale avremo:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_{nc} = -\Delta E_p + \mathcal{L}_{nc} = \Delta E_c \quad \Rightarrow \quad \Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = \mathcal{L}_{nc} = \int_A^B \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r}$$

Oss. Il lavoro delle forze non conservative è pari alla variazione dell'energia meccanica totale e dipende dal *percorso seguito*, oltre che dagli estremi A e B.
Generalmente le forze non conservative (come ad es. l'attrito) compiono un *lavoro negativo*:
$\mathcal{L}_{nc} < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E < 0$ *l'energia meccanica diminuisce.*

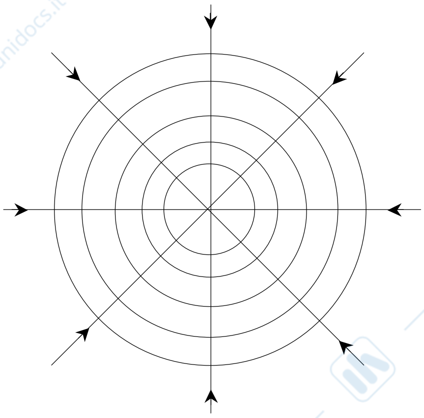
Oss. Ma se vale il Teorema di Conservazione dell'Energia, la diminuzione di energia meccanica deve corrispondere ad un'aumento di qualche altra forma di energia del sistema. Tipicamente il lavoro compiuto dalle forze non conservative va ad aumentare l'energia *termica* del sistema, cioè la temperatura dei corpi.

3.7 Linee di forza, superfici equipotenziali, gradiente

Linee di forza e superfici equipotenziali

Def. Le *linee di forza* di un campo vettoriale (ad es. di un campo di forze) sono linee tangenti ed equiverse al campo (alla forza) in ogni punto del suo dominio (dello spazio), con densità proporzionale al modulo del campo (della forza).

Def. In un campo di forze conservativo, si dicono *superfici equipotenziali* i luoghi geometrici dei punti nei quali l'energia potenziale assume valore costante.
Quindi $E_p(x,y,z) = \text{cost.}$ è l'*equazione di una superficie equipotenziale*.



Ex. Se, ad esempio, l'energia potenziale dipende solo dalla distanza da un "centro", come per le forze centrali, le linee di forza sono linee radiali uscenti dal centro di forza, e le superfici equipotenziali sono delle superfici sferiche concentriche (vedi figura).

Oss. Le linee di forza sono tanto più dense quanto più è intenso il campo di forze.
Ad esempio nel caso del campo di forze centrali, se il campo decresce al crescere della distanza, le linee di forza sono tanto più dense quanto più ci si avvicina al centro.

Oss. Se il punto materiale P, soggetto unicamente ad un campo di forze conservativo, compie uno spostamento infinitesimo $d\vec{r}$ lungo una superficie equipotenziale del campo, avremo che il lavoro fatto da tali forze è nullo: $0 = -dE_p = d\mathcal{L} = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \forall d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \perp d\vec{r}, \quad \forall d\vec{r}$.
Concludiamo che: *Le linee di forza sono sempre ortogonali alle superfici equipotenziali*.

Gradiente

Oss. Se il campo è conservativo, nota l'espressione della forza possiamo calcolare quella dell'energia potenziale eseguendo un'integrazione. Viceversa, nota l'energia potenziale $E_p(\vec{r})$ in ogni punto del campo, è possibile calcolare la forza attraverso un operatore differenziale.

Precisamente, se utilizziamo le coordinate cartesiane, il lavoro compiuto dalla forza per effettuare uno spostamento infinitesimo dx parallelo all'asse x vale:

$$d\mathcal{L} = F_x\,dx = -\left[E_p(x+dx,y,z) - E_p(x,y,z)\right]$$

$$\Rightarrow\quad F_x = \frac{E_p(x,y,z) - E_p(x+dx,y,z)}{dx} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$ (derivata parziale di E_p rispetto ad x)

Abbiamo cioè trovato che la componente della forza diretta lungo x è pari alla derivata parziale dell'energia potenziale rispetto ad x, cambiata di segno.
Lo stesso vale per le altre due componenti cartesiane:

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad ; \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Def. L'operatore gradiente è l'operatore differenziale che riassume le tre espressioni di derivazione parziale lungo tre coordinate indipendenti dello spazio. Esso viene indicato formalmente come $\overrightarrow{grad}$ oppure con il simbolo $\vec{\nabla}$ (*"nabla"*, una delta rovesciata) e può essere formalmente definito in coordinate cartesiane come $\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\hat{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\hat{u}_z$.

Oss. Avremo dunque che la forza si può scrivere come il gradiente dell'energia potenziale cambiato di segno: $\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p}$

Interpretazione geometrica del gradiente

Sia $E_p(x,y,z)$ l'espressione dell'energia potenziale di un campo conservativo; consideriamo le equazioni

$$E_p(x,y,z) = c_1 \qquad \text{ed} \qquad E_p(x,y,z) = c_2$$

di due differenti superfici equipotenziali infinitamente vicine, ed uno spostamento infinitesimo ds da una superficie all'altra diretto in una direzione arbitraria dello spazio. Ci chiediamo quanto valga la derivata dell'energia potenziale rispetto alla direzione dello spostamento ds. Avremo che:

$$\frac{dE_p}{ds} = \frac{c_2 - c_1}{ds} = \frac{dE_p}{dn}\frac{dn}{ds} = \frac{dE_p}{dn}\cos\vartheta,$$

dove dn è lo spostamento *ortogonale* alle due superfici e vale $dn = ds\cdot\cos\vartheta$, con ϑ angolo compreso fra ds e dn.

Oss.1 Abbiamo dunque ottenuto che la variazione di energia potenziale corrispondente ad un certo spostamento ds è massima se lo spostamento è compiuto in direzione *normale* alla superficie equipotenziale, in modo tale che risulti $|\cos\vartheta| = 1$, cioè lungo una linea di forza.

Oss.2 Ciò è in accordo con l'intuizione, dato che la direzione normale è quella più lontana dalla direzione tangente, per la quale la variazione di energia potenziale è nulla.

Oss.3 Ricordando che la direzione delle linee di forza coincide con quella della forza del campo e quindi con quella del gradiente, concludiamo che l'operatore gradiente effettua una operazione di derivazione dell'energia potenziale lungo una direzione dello spazio che è sempre ortogonale alle superfici equipotenziali del campo di forza, e che fornisce il massimo valore di tale derivata.

3.8 Altri concetti accessori: condizioni di conservatività, equilibrio in un campo conservativo

Condizione affinché un campo sia conservativo

Abbiamo già osservato che un campo è conservativo, cioè ammette energia potenziale, se e solo se il lavoro elementare può essere scritto come il differenziale di una funzione scalare, che è poi proprio l'energia potenziale cambiata di segno, cioè:

$$d\mathcal{L} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -dE_p$$

CNS. Si può dimostrare che *condizione necessaria e sufficiente affinché tale funzione scalare esista* è che tra le componenti della forza del campo valgano identicamente le seguenti relazioni (in coordinate cartesiane): $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$; $\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$; $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$.

Queste tre identità scalari possono essere sintetizzate in un'unica identità vettoriale per mezzo dell'operatore vettoriale "rotore" [$\mathrm{rot}(...) = \vec{\nabla}\times ..$] applicato ad $\vec{F}$, e cioè dall'equazione:

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 .$$

Tale identità stabilisce che il rotore del campo $\vec{F}$ è identicamente nullo, o, equivalentemente, che il campo $\vec{F}$ è irrotazionale.

Infatti, per definizione, l'operatore rotore applicato ad un campo vettoriale $\vec{F}$ genera un nuovo campo vettoriale derivato, definito formalmente come segue:

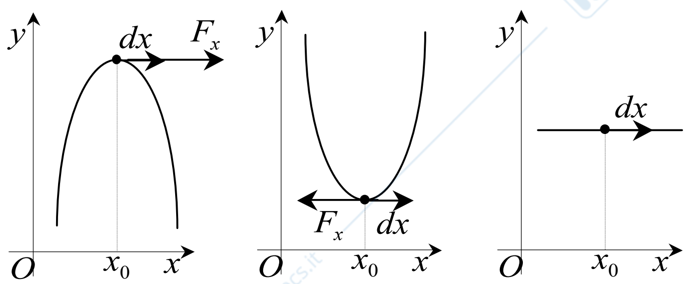
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{u}_x\left[\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right] + \hat{u}_y\left[\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right] + \hat{u}_z\left[\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right].$$

E' chiaro quindi che avere $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ e $\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$ e $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$ equivale ad avere $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$. Quindi un campo vettoriale è conservativo se e solo se è irrotazionale.

Equilibrio di un corpo in un campo conservativo

Sappiamo già che la condizione necessaria e sufficiente perché un punto materiale stia in equilibrio in una certa posizione è, in generale, che [1)]*la sua velocità sia nulla ad un certo istante* e che [2)]*la risultante delle forze ad esso applicate sia nulla*.

Consideriamo un punto materiale in un campo di forze conservative, limitandoci per



Equilibrio instabile — Equilibrio stabile — Equilibrio indifferente semplicità ad un ***caso monodimensionale***: sia $E_p(x)$ l'andamento dell'energia potenziale lungo l'asse *x*. Poiché in questo caso la forza è pari alla derivata dell'energia potenziale rispetto ad *x*, cambiata di segno, essa sarà nulla in un punto di ascissa x_0 se e solo se $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$, cioè se il punto considerato è un *punto stazionario* per la funzione $E_p(x)$. Precisamente, se si tratta di un punto di *massimo*, l'equilibrio si dice *instabile*; se è un punto di *minimo*, l'equilibrio si dice *stabile*, e se la derivata è nulla per tutti i punti di un intorno di x_0 l'equilibrio si dice *indifferente*.

In statica, infatti, un punto di equilibrio si dice stabile, instabile o indifferente a seconda che, a seguito di uno spostamento infinitesimo del punto dalla posizione di equilibrio, la risultante tenda a riportare il punto nella posizione di equilibrio, oppure ad allontanarlo, oppure resti ancora nulla (nuova posizione ancora di equilibrio).