Politecnico di Milano – Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

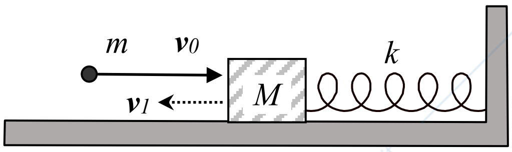
11/01/2019
ore 11:30

FISICA (terzo appello)

Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti

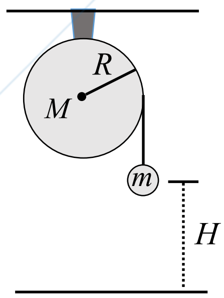
1.
Un blocco di massa $M = 2$ kg, appoggiato su un piano orizzontale liscio, è collegato a una parete tramite una molla ideale di costante elastica $k = 5000$ N/m ed è inizialmente in quiete. Una palla di massa $m = 40$ g urta il blocco con una velocità $\boldsymbol{v}_0$ orizzontale. Dopo l'urto la palla rimbalza con velocità $\boldsymbol{v}_1$ orizzontale e modulo $|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_0|/4$, mentre la molla subisce una compressione $\Delta x = 1$ cm.

a) Si calcoli la velocità iniziale della palla.
b) Si determini se l'urto è elastico oppure anelastico.



2.
a) Dai principi di Newton si ricavi la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi di particelle.
b) Si definisca il centro di massa.
c) Si ricavi l'equazione del moto del centro di massa.

3.
Una pallina di massa m è sospesa ad un'altezza H dal suolo tramite una fune ideale (inestensibile e priva di massa). La fune è avvolta su di una carrucola omogenea di massa M e raggio R (v. figura). Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete per mezzo di un freno che all'istante $t = 0$ viene rimosso. Si calcoli:
a) il tempo di caduta della pallina,
b) la velocità con cui la pallina impatta al suolo.



4.
Una macchina termica che lavora tra due sorgenti di calore con temperature $T_1 = 300$ K e $T_2 = 600$ K fornisce una potenza media $P = 10$ W con un rendimento pari al 50% di quello di una macchina di Carnot che utilizza le stesse sorgenti. Si calcoli il calore scambiato con ciascuna delle sorgenti in un minuto di funzionamento e la corrispondente variazione di entropia dell'universo.

Si ricorda di:
- *Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA*
- *FIRMARE l'elaborato;*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Fisica - Appello dell'11/01/19 - Traccia di soluzione

Quesito 1

a)

- Durante l'urto non agiscono forze esterne impulsive; applichiamo la conservazione della quantità di moto. L'equazione può essere scritta scalarmente, proiettata su un asse orizzontale (dove giacciono infatti i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$).

$$mv_0 = mv_1 + MV$$

- Imponiamo la conservazione dell'energia meccanica per il sistema massa - molla, dall'istante appena successivo all'urto all'istante di massima compressione della molla.

$$E_M^i = E_K^i + U_{el}^i = E_K^f + U_{el}^f = E_M^f$$

$$\frac{1}{2}MV^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}k\,\Delta x^2$$

da cui:

$$V = \Delta x\sqrt{\frac{k}{M}}$$

- Possiamo sostituire questa espressione di V nell'equazione di conservazione della quantità di moto, assieme alla relazione $v_1 = -v_0/4$.

$$mv_0 = -m\frac{v_0}{4} + M\,\Delta x\sqrt{\frac{k}{M}}$$

da cui si ricava

$$\boxed{v_0 = \frac{4}{5}\frac{\Delta x}{m}\sqrt{kM}}$$

- Numericamente:

$$v_0 = \frac{4}{5}\frac{0.01\text{ m}}{0.04\text{ kg}}\sqrt{5000\text{ N/m}\ \cdot\ 2\text{ kg}} = \frac{4}{5}\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10000}\ \text{ m/s} = \frac{1}{5}\cdot 100\text{ m/s}$$

$$\boxed{v_0 = 20\text{ m/s}}$$

b)

- Valutiamo l'energia meccanica (cinetica) prima e dopo l'urto:

$$E^i = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad\qquad E^f = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

- Consideriamo $\Delta E = E^f - E^i$. Se l'urto è elastico $\Delta E = 0$, altrimenti $\Delta E < 0$ e l'urto è anelastico.

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

- Sostituiamo $v_1 = -v_0/4$:

$$\Delta E = \frac{1}{32}mv_0^2 + \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}MV^2 - \frac{15}{32}mv_0^2$$

- Sostituiamo quindi le espressioni di V e v_0 ricavate al punto precedente:

$$\Delta E = \frac{1}{2}M\Delta x^2\frac{k}{M} - \frac{15}{32}m\cdot\frac{16}{25}\frac{\Delta x^2}{m^2}kM = \frac{1}{2}k\Delta x^2\left(1 - \frac{3}{5}\frac{M}{m}\right)$$

- Per valutare se ΔE sia nullo o negativo, calcoliamo il valore di $\left(1 - \frac{3}{5}\frac{M}{m}\right)$, in quanto $\frac{1}{2}k\Delta x^2$ è certamente positivo.

$$1 - \frac{3}{5}\frac{M}{m} = 1 - \frac{3}{5}\frac{2000\text{ g}}{40\text{ g}} = 1 - 30 = -29 < 0$$

dunque $\Delta E < 0$ e **l'urto è anelastico**.

Quesito 3

a)
- Consideriamo anzitutto la dinamica della pallina, che può muoversi lungo la direzione verticale. Le forze applicate sono:
  - la forza peso $\vec{P}_m = m\vec{g}$ diretta verso il basso;
  - la tensione della fune $\vec{T}$ diretta verso l'alto.
- Possiamo scrivere l'equazione del moto scalare, proiettata lungo l'asse verticale, assegnando il verso positivo verso il basso:

$$F_{ris} = ma = mg - T$$

- Consideriamo ora la dinamica della carrucola. Scrivendo per essa la seconda equazione cardinale, tenendo presente che essa può compiere un moto di rotazione pura attorno all'asse fisso a cui è vincolata.

$$\tau_{z,ris} = I_z\alpha$$

  dove I_z è il momento di inerzia assiale e α è l'accelerazione angolare. Consideriamo positivo il verso di rotazione orario (ovvero, consideriamo un asse z entrante nel piano della figura).
- L'unica forza applicata alla carrucola che dà momento meccanico è la tensione della fune:

$$\tau_{z,ris} = \tau_T = RT$$

  Il momento di inerzia assiale della carrucola, assunta come un cilindro omogeneo, è $I_z = \frac{1}{2}MR^2$. Risulta quindi:

$$\tau_{z,ris} = RT = \frac{1}{2}MR^2\alpha \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{1}{2}MR\alpha$$

- La carrucola e la pallina sono collegate dalla fune inestensibile; le loro accelerazioni (rispettivamente, lineare ed angolare) sono legate dalla relazione $a = R\alpha$. Perciò:

$$T = \frac{1}{2}Ma$$

- Sostituiamo questa espressione nell'equazione del moto della pallina:

$$ma = mg - \frac{1}{2}Ma$$

  e otteniamo l'accelerazione della pallina:

$$a = \frac{2m}{2m+M}g$$

  che è dunque costante nel tempo.
- Il moto della pallina è uniformemente accelerato. Quando giunge al suolo ha percorso uno spazio H; si può quindi scrivere:

$$H = \frac{1}{2}at^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2H}{a}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{\frac{2m}{2m+M}g}}$$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{H}{g}\frac{2m+M}{m}}}$$

b) La velocità finale della pallina è:

$$v = a \cdot t \qquad \rightarrow \qquad v = a\sqrt{\frac{2H}{a}} = \sqrt{2aH}$$

$$\boxed{v = \sqrt{4gH\frac{m}{2m+M}}}$$

Quesito 3 - (SOLUZIONE ALTERNATIVA)

a)-b)

- L'energia meccanica iniziale del sistema coincide con l'energia potenziale della pallina di massa m, che si trova a una quota H:

$$E^i = mgH$$

Quando la pallina arriva al suolo, l'energia meccanica del sistema è invece puramente cinetica. Essa include un termine per la traslazione della pallina e un termine per la pura rotazione della carrucola, avente momento di inerzia assiale I_z.

$$E^f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

- Nella espressione di E^f occorre considerare che la velocità di traslazione della pallina e la velocità angolare di rotazione della carrucola non sono indipendenti. Essendo collegate dalla fune inestensibile vale:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

- Descrivendo la carrucola come un cilindro omogeneo si ha inoltre:

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

- Non essendo presenti forze dissipative, imponiamo la conservazione dell'energia meccanica:

$$E^i = E^f$$

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\cdot\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)v^2$$

$$v^2 = 4gH\,\frac{m}{2m+M}$$

$$\boxed{v = \sqrt{4gH\,\frac{m}{2m+M}}}$$

- Nella descrizione dinamica del sistema, le forze in gioco sono:
  - *sulla carrucola*: la forza di tensione della fune, la forza peso della carrucola, la reazione del vincolo che la tiene fissata.
  - *sulla pallina*: la tensione della fune, la forza peso della pallina.

Pur senza calcolarle possiamo considerare che sono tutte costanti nel tempo. La risultante delle forze agenti sulla pallina sarà dunque essa stessa costante nel tempo. Il moto di caduta della pallina non può che essere **uniformemente accelerato**.

- Scriviamo le espressioni dello spazio percorso e della velocità, per il moto uniformemente accelerato della pallina, all'istante t in cui arriva al suolo:

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{cases}$$

Dividendo membro a membro (la seconda per la prima):

$$\frac{v}{H} = \frac{at}{\frac{1}{2}at^2} = \frac{2}{t}$$

da cui:

$$t = \frac{2H}{v} = \frac{2H}{\sqrt{4gH\,\frac{m}{2m+M}}}$$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{H}{g}\frac{2m+M}{m}}}$$

Quesito 4

- Se fosse una macchina di Carnot reversibile, il suo rendimento sarebbe:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

- Sappiamo però che per la macchina in esame $\eta = \frac{1}{2}\eta_C$ perciò:

$$\eta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

- Ora, dalla definizione di rendimento:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{ass}} = \frac{P \cdot \tau}{Q_2}$$

essendo P la potenza media sviluppata dalla macchina e $\tau = 60$ s il tempo di funzionamento da considerare.

- Risulta:

$$Q_2 = \frac{P\tau}{\eta} = \frac{P\tau}{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)}$$

$$\boxed{Q_2 = \frac{2T_2}{T_2 - T_1}P\tau}$$

- Per ricavare Q_1 applichiamo il Primo Principio della Termodinamica, che per una macchina ciclica impone:

$$Q_{tot} = \mathcal{L}$$

$$Q_1 + Q_2 = \mathcal{L}$$

$$Q_1 = \mathcal{L} - Q_2 = P\tau - \frac{2T_2}{T_2 - T_1}P\tau$$

$$\boxed{Q_1 = -\frac{T_1 + T_2}{T_2 - T_1}P\tau}$$

- La variazione di entropia dell'universo coincide con la variazione di entropia dei termostati:

$$\Delta S_U = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$$

sostituendo le espressioni ricavate per Q_1 e Q_2 abbiamo:

$$\Delta S_U = \frac{T_1 + T_2}{T_1(T_2 - T_1)} P\tau - \frac{2}{T_2 - T_1} P\tau$$

da cui:

$$\boxed{\Delta S_U = \frac{P\tau}{T_1}}$$

- Numericamente si può valutare:

$$Q_1 = -\frac{900}{300} \cdot 10 \cdot 60 \text{ J} = -1800 \text{ J}$$

$$Q_2 = \frac{2 \cdot 600}{300} \cdot 10 \cdot 60 \text{ J} = 2400 \text{ J}$$

$$\Delta S_U = \frac{60 \cdot 10 \text{ J}}{300 \text{ K}} = 2 \text{ J/K}$$