PROBLEMA 16.6

Durante una giornata nuvolosa un ammasso di nuvole cariche produce un campo elettrico nello spazio compreso tra esse e la superficie terrestre. A causa di tale campo, un granello di polvere, che si trova vicino alla superficie e possiede una carica negativa pari a -4.0 nC, *subisce una forza elettrostatica diretta verso il suolo pari a* $6.0 \cdot 10^{-6}$ N. *a) Determinare modulo, direzione e verso del campo elettrico nel punto in cui si trova il granello di polvere; b) sapendo che la massa del granello è di* 3 mg, *determinare quanto dovrebbe valere la sua carica affinché esso resti sospeso nello spazio per effetto della forza gravitazionale e della forza elettrostatica.*

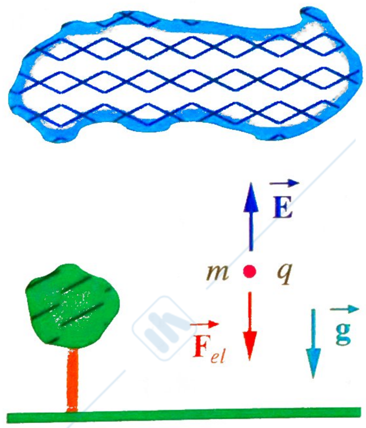


Figura 16.29

a) Il modulo del campo elettrico è pari a:

$$E = \frac{F_e}{|q|} = \frac{6.0 \cdot 10^{-6}}{4.0 \cdot 10^{-9}} = 1.5 \cdot 10^3 \text{ N/C};$$

la sua direzione è quella dell'asse verticale ed è diretto verso le nuvole come illustrato nella figura 16.29, dato che il granello di polvere ha carica negativa; ricordiamo infatti che se la carica è negativa il campo elettrico e la forza elettrostatica hanno sempre verso opposto.

b) Affinché il granello di polvere resti sospeso in aria per l'azione della forza gravitazionale e della forza elettrostatica, quest'ultima deve essere diretta verso l'alto; di conseguenza il granello deve avere carica positiva.

Il suo valore si trova uguagliando i moduli delle due forze:

$$qE = mg \Rightarrow q = \frac{mg}{E} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \times 9.8}{1.5 \cdot 10^3} = 19.6\ \text{nC} .$$

PROBLEMA 16.7

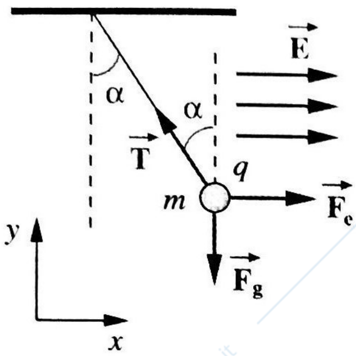


Figura 16.30

Una pallina di plastica di massa $m = 2$ g viene elettrizzata strofinandola con un panno; essa viene quindi sospesa ad un filo in una regione in cui agisce un campo elettrico orizzontale di modulo $E = 4.5 \cdot 10^3$ N/C, diretto come illustrato nella figura 16.30. Se la pallina si trova in equilibrio quando l'angolo α tra il filo e la verticale è di 15°, quanto vale la carica da essa posseduta?

Sulla pallina agiscono tre forze come illustrato in figura: la forza gravitazionale $\vec{\mathbf{F}}_g$ diretta verso il basso, la forza elettrostatica $\vec{\mathbf{F}}_e$ diretta orizzontalmente verso destra e la tensione del filo $\vec{\mathbf{T}}$ diretta lungo il filo.
Dalla figura si evince che la forza elettrostatica ed il campo elettrico $\vec{\mathbf{E}}$ hanno lo stesso verso, quindi la carica della pallina è positiva. Per trovare il suo modulo dobbiamo imporre che la somma vettoriale della tre forze sia nulla:

$$\vec{\mathbf{F}}_g + \vec{\mathbf{F}}_e + \vec{\mathbf{T}} = 0 .$$

Scegliendo gli assi coordinati come in figura e proiettando le forze sugli assi si ottiene:

$$\begin{cases} F_x = qE - T \sin\alpha = 0 ; \\ F_y = T \cos\alpha - mg = 0 . \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ottiene $T = mg/\cos\alpha$ che sostituita nella prima dà:

$$qE - mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0 \Rightarrow q = \frac{mg}{E}\tan\alpha = \frac{2 \cdot 10^{-3} \times 9.8}{4.5 \cdot 10^3} \times \tan 15° = $$
$$= 1.17\ \mu\text{C} .$$

PROBLEMA 16.8

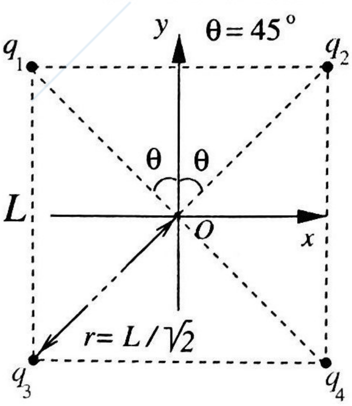


Figura 16.31
Quattro cariche disposte ai vertici di un quadrato di lato L.

Siano date quattro cariche puntiformi di carica $|q| = 2 \cdot 10^{-12}$ C, poste ai vertici di un quadrato di lato $L = 2.0$ cm, come mostrato in figura 16.31. Determinare il campo elettrostatico da esse generato nel centro del quadrato, quando: a) $q_1 = q_4 = -2 \cdot 10^{-12}$ C, $q_2 = q_3 = +2 \cdot 10^{-12}$ C; b) $q_1 = q_2 = -2 \cdot 10^{-12}$ C, $q_3 = q_4 = +2 \cdot 10^{-12}$ C.

Le cariche sono puntiformi e generano un campo elettrostatico radiale; dato che esse sono poste ai vertici del quadrato, nel punto O ciascuna genera un campo diretto lungo le diagonali e con verso che dipende dal segno della carica. Il centro del quadrato si trova a una distanza r da ciascuna carica,

$$r = L\sqrt{2}/2 = L/\sqrt{2} ,$$

pari a metà diagonale; pertanto per l'equazione (16.19) il modulo del campo generato dalla i-esima carica q_i è

$$E_i = k_0\frac{|q_i|}{r^2} = k_0\frac{|q_i|}{L^2/2} .$$

$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

Dato che tutte le cariche hanno, in modulo, lo stesso valore, anche i campi hanno modulo uguale e pari a

$$E_i \equiv E = 9 \cdot 10^9 \times \frac{2 \cdot 10^{-12}}{(0.02)^2/2} = 90 \text{ N/C} . \qquad (16.21)$$

Il campo totale è dato dalla somma vettoriale dei quattro campi (principio di sovrapposizione).

a) $q_1 = q_4 = -2 \cdot 10^{-12}$ C, $q_2 = q_3 = +2 \cdot 10^{-12}$ C;
Come mostrato in figura 16.32 i campi $\vec{\mathbf{E}}_1$ ed $\vec{\mathbf{E}}_4$ generati rispettivamente dalle cariche q_1 e q_4 hanno stessa direzione e verso opposto; poiché i moduli sono uguali e dati dalla (16.21), la loro somma vettoriale è nulla. Analoga considerazione si può fare per i campi generati da q_2 e q_3, $\vec{\mathbf{E}}_2$ ed $\vec{\mathbf{E}}_3$, che hanno somma vettoriale nulla. Pertanto, per motivi di simmetria il campo totale al centro del quadrato è nullo:

$$\vec{\mathbf{E}}_{ris} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \vec{\mathbf{E}}_4 + \vec{\mathbf{E}}_4 = 0 .$$

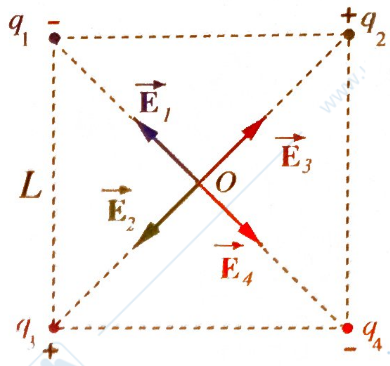


Figura 16.32

b) $q_1 = q_2 = -2 \cdot 10^{-12}$ C, $q_3 = q_4 = +2 \cdot 10^{-12}$ C.
Ricordiamo che i moduli dei quattro campi sono uguali ad E dato dalla (16.21). Consideriamo quelli generati in O dalle cariche q_1 e q_2: essendo le cariche entrambe negative, $\vec{\mathbf{E}}_1$ ed $\vec{\mathbf{E}}_2$ sono diretti verso le cariche, come indicato in figura 16.33. Scegliendo un sistema di riferimento $\{xy\}$ come indicato in figura, si vede che, per motivi di simmetria, le componenti dei campi lungo l'asse x sono uguali e opposte, per cui la loro somma è nulla:

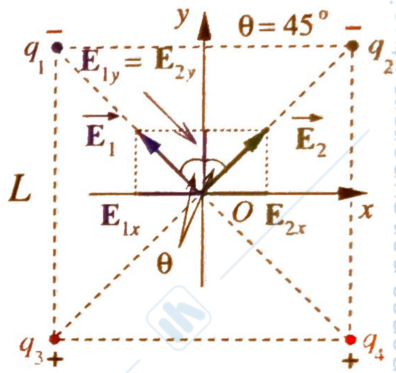


Figura 16.33

$$\begin{cases} E_{1,x} = -E \sin\theta \\ E_{2,x} = E \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \quad E_{1,x} + E_{2,x} = 0 ;$$

le componenti lungo y sono invece uguali e concordi:

$$E_{1,y} = E_{2,y} = E \cos 45° .$$

Analogo ragionamento si può fare per i campi generati dalle cariche q_3 e q_4, i cui campi in O sono mostrati in figura 16.34; in questo caso le due cariche sono positive ed i campi che esse generano sono diretti come quelli generati da q_1 e q_2. Pertanto si ha

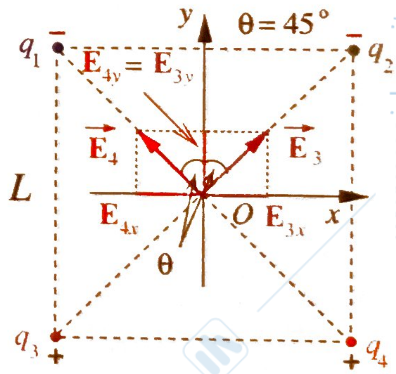


Figura 16.34

$$E_{3,x} = -E_{4,x} \quad \Rightarrow \quad E_{3,x} + E_{4,x} = 0 ;$$

e

$$E_{3,y} = E_{4,y} = E \cos 45° .$$

Il campo risultante delle quattro cariche pertanto è

$$E_{ris,x} = E_{1,x} + E_{2,x} + E_{3,x} + E_{4,x} = 0 ,$$

e

$$E_{ris,y} = 4 \times E_{i,y} = 4E \cos 45° = 4 \times 90 \times 1/\sqrt{2} = $$
$$= 254.6 \text{ N/C}.$$

Un elettrone si muove in una regione di spazio dove è presente un campo elettrico. Nel punto P_1 la sua velocità è $v_1 = 2.5 \cdot 10^6$ m/s, *mentre quando raggiunge il punto P_2 la sua velocità è* $v_2 = 6.8 \cdot 10^5$ m/s. *Trovare la differenza di potenziale $V(P_2) - V(P_1)$. Si ricorda che la carica elettrica dell'elettrone è* $q_e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C *e la sua massa è* $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Calcoliamo innanzitutto le energie cinetiche dell'elettrone nei due punti P_1 e P_2:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_e v_1^2 = \frac{1}{2} \times 9.1 \cdot 10^{-31} \times (2.5 \cdot 10^6)^2 = 28.4 \cdot 10^{-19}\ \text{J};$$
$$K_2 = \frac{1}{2}m_e v_2^2 = \frac{1}{2} \times 9.1 \cdot 10^{-31} \times (6.8 \cdot 10^5)^2 = 2.10 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Dalla legge di conservazione dell'energia meccanica, che possiamo applicare perché la forza elettrostatica è conservativa, ricaviamo la variazione di energia potenziale elettrostatica:

$$K_1 + U_1^e = K_2 + U_2^e \Rightarrow U_2^e - U_1^e = K_1 - K_2 =$$
$$= 28.4 \cdot 10^{-19} - 2.10 \cdot 10^{-19} = 26.3 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Dalla differenza di energia potenziale dell'elettrone si risale alla differenza di potenziale utilizzando l'equazione (18.15):

$$\Delta V = \frac{\Delta U^e}{q_e} = \frac{26.3 \cdot 10^{-19}}{-1.6 \cdot 10^{-19}} = -16.4\ \text{V}.$$

Si noti che la differenza di potenziale è negativa, quindi il punto P_2 ha un potenziale elettrico minore del punto P_1.

PROBLEMA 18.5

Si consideri l'atomo di idrogeno in cui un elettrone ruota attorno ad un protone su un'orbita circolare di raggio $r = 5.3 \cdot 10^{-11}$ m (modello di Rutherford). Assumendo che il protone sia fermo e che l'elettrone si muova di moto circolare unifome, si calcoli l'energia meccanica dell'atomo. Si riporti il risultato in joule ed in elettronvolt.

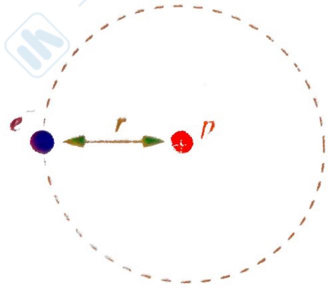


Figura 18.13 Nel modello semplificato dell'atomo di idrogeno, l'elettrone si muove su un'orbita circolare attorno al protone.

Ricordiamo che l'elettrone ed il protone hanno rispettivamente cariche $-e$ e $+e$, dove $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C. Dato che l'elettrone si muove di moto circolare uniforme, la sua accelerazione è centripeta e pari a

$$\vec{\mathbf{a}} = -a_c \hat{\mathbf{r}}\,, \qquad \text{dove} \qquad a_c = \frac{v^2}{r}\,.$$

La forza centripeta che produce questo moto è la forza di attrazione elettrostatica tra protone ed elettrone data dalla legge di Coulomb:

$$\vec{\mathbf{F}}_e = -k_0 \frac{e^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}\,. \qquad K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Utilizzando il secondo principio della dinamica $\vec{\mathbf{F}}_e = m_e \vec{\mathbf{a}}_c$ possiamo ricavare la velocità dell'elettrone:

$$k_0 \frac{e^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{k_0 e^2}{m_e r}\,,$$

dove m_e è la massa dell'elettrone. Quindi la sua energia cinetica è pari a

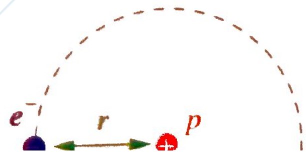
$$K = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{k_0 e^2}{2r}\,.$$

L'energia potenziale del sistema protone+elettrone è data dall'equazione (18.9), con $q = -e$ e $Q = +e$:

$$U^e = -\frac{k_0 e^2}{r}\,. \qquad (18.28)$$

L'energia meccanica dell'atomo quindi è (si ricordi che si assume che il protone sia fermo):

$$E = K + U^e = -\frac{k_0 e^2}{2r} = -\frac{9 \cdot 10^9 \times (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{2 \times 5.3 \cdot 10^{-11}} =$$
$$= -2.17 \cdot 10^{-18}\,\text{J} = -13.6\,\text{eV}\,.$$



PROBLEMA 18.6

Si considerino due cariche $Q_1 = 2 \cdot 10^{-9}$ C e $Q_2 = -4 \cdot 10^{-9}$ C poste nei punti $P_1 = (2, 0)$ mm e $P_2 = (-2, 0)$ mm. Si calcoli: a) il potenziale nei punti $A = (4, 0)$ mm e $B = (0, 4)$ mm; b) in quale punto dell'asse x tra le due cariche il potenziale è nullo.

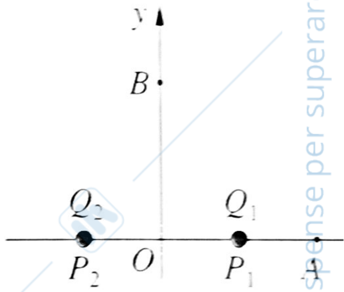


Figura 18.

a) Nel punto A il potenziale vale (si veda la figura 18.18)

$$V_A = k_0 \frac{Q_1}{|AP_1|} + k_0 \frac{Q_2}{|AP_2|} \qquad k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$= \frac{9 \cdot 10^9 \times 2 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-3}} + \frac{9 \cdot 10^9 \times (-4 \cdot 10^{-9})}{6 \cdot 10^{-3}} = 3000 \text{ V} .$$

Per calcolare V_B dobbiamo calcolare le distanze $|BP_1|$ e $|BP_2|$. Abbiamo

$$|BP_1| = \sqrt{|OP_1|^2 + |OB|^2} = \sqrt{(2 \cdot 10^{-3})^2 + (4 \cdot 10^{-3})^2} =$$
$$= 4.47 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4.47 \text{ mm} .$$

Dato che $|OP_1| = |OP_2|$, si ha $|BP_2| = |BP_1| = 4.47$ mm. Quindi, se $d = 4.47$ mm, abbiamo

$$V_B = \frac{k_0 Q_1}{|BP_1|} + \frac{k_0 Q_2}{|BP_2|} = \frac{k_0(Q_1 + Q_2)}{d} =$$
$$= \frac{9 \cdot 10^9 \times (2 \cdot 10^{-9} - 4 \cdot 10^{-9})}{4.47 \cdot 10^{-3}} = -4027\ \text{V}\ .$$

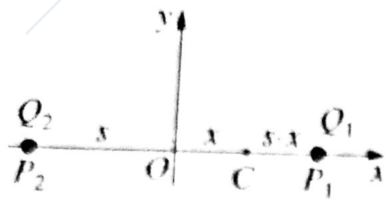


Figura 18.19

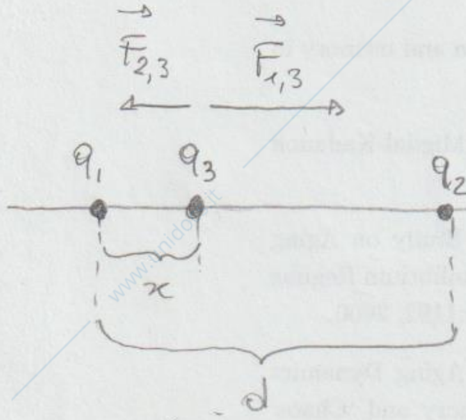
b) Sia $s = 2$ mm la distanza di P_1 e P_2 dall'origine e sia x la coordinata del punto C dove il potenziale si annulla. Dato che per ipotesi C si trova tra le due cariche abbiamo (si veda la figura 18.19)

$$|CP_1| = s - x \qquad\qquad |CP_2| = x + s\ .$$

Ne segue

$$V_C = \frac{k_0 Q_1}{s - x} + \frac{k_0 Q_2}{x + s} = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x = -s\frac{Q_1 + Q_2}{Q_1 - Q_2} = -2 \cdot 10^{-3}\frac{2 \cdot 10^{-9} - 4 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-9} + 4 \cdot 10^{-9}} =$$
$$= 0.67 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 0.67\ \text{mm}\ .$$

DUE CARICHE POSITIVE $q_1 = 1.5\ \mu C$ E $q_2 = 2.6\ \mu C$ SI TROVANO IN QUIETE IN DUE PUNTI DELLO SPAZIO ALLA DISTANZA DI $d = 7.0$ cm. UNA TERZA CARICA POSITIVA $q_3 = 0.80\ \mu C$ VIENE POSTA TRA DI ESSE NELLA POSIZIONE A DISTANZA $x = 2.0$ cm DA q_1. CALCOLARE LA FORZA ELETTROSTATICA CHE AGISCE SU q_3.



q_3 è soggetta alla forza coulombiana repulsiva che si esercita tra q_1 e q_3

$$F_{1,3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_3}{x^2} \quad \text{(in modulo)}$$

e la forza repulsiva coulombiana tra q_2 e q_3

$$F_{2,3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2 q_3}{d^2}$$

Le due forze agiscono sulla stessa retta, ma sono opposte:

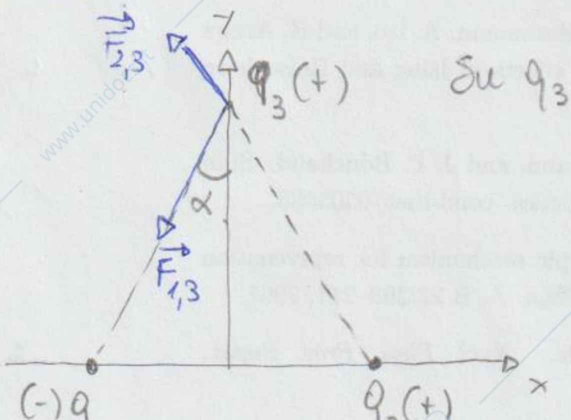
$$F_{TOT} = F_{1,3} - F_{2,3} = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{d^2}\right)$$

Sostituendo i dati $F_{1,3} = 27$ N, $F_{2,3} = 7.5$ N.

Dato che $F_{1,3} > F_{2,3}$ il verso della forza risultante è verso la carica q_2. $F_{TOT} = 19.5$ N.

(N.B. "μ" è il prefisso equivalente a 10^{-6})

TRE CARICHE ELETTRICHE SONO POSTE IN QUIETE SUI VERTICI DI UN TRIANGOLO EQUILATERO DI LATO $L = 4.00$ cm. I VALORI DELLE TRE CARICHE SONO $q_1 = -4.00$ nC, $q_2 = 3.00$ nC, $q_3 = 6.00$ nC. DETERMINARE LA FORZA ELETTROSTATICA TOTALE CHE AGISCE SULLA CARICA q_3. SE NE CALCOLINO COMPONENTI, MODULO, DIREZIONE E VERSO NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO INDICATO IN FIGURA.

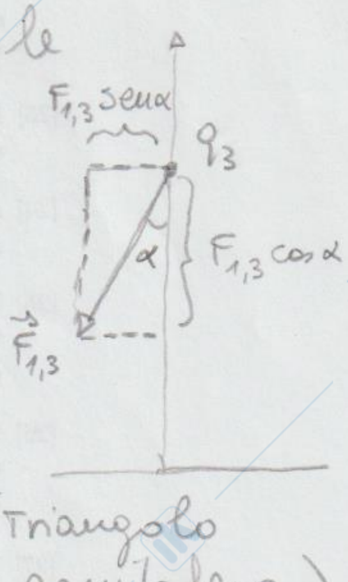


Su q_3 agiscono due forze di modulo:

$$F_{1,3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{L^2}$$

$$F_{2,3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{L^2}$$

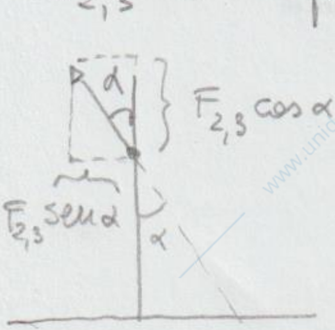
che non sono collineari. Bisogna ricavare le componenti.



$\vec{F}_{1,3}$ è attrattiva e diretta da q_3 a q_1.
Le sue componenti sono entrambe negative

$$\vec{F}_{1,3} = \begin{pmatrix} -F_{1,3}\,\text{sen}\,\alpha \\ -F_{1,3}\cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{per } \alpha = 30° = \frac{\pi}{6} \text{ (Triangolo equilatero)}$$

$\vec{F}_{2,3}$ è repulsiva; la componente y è positiva, quella x è negativa



$$\vec{F}_{2,3} = \begin{pmatrix} -F_{2,3}\,\text{sen}\,\alpha \\ F_{2,3}\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Sostituendo i dati ("n" è il prefisso = 10^{-9})

$$F_{1,3} = 1.35 \cdot 10^{-4}\ N$$

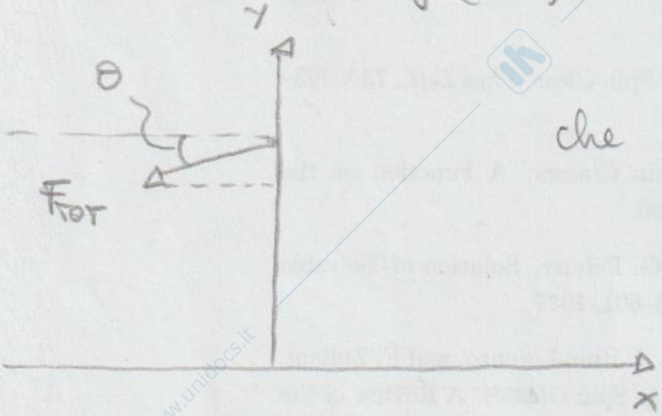
$$F_{2,3} = 1.01 \cdot 10^{-4}\ N$$

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{2,3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(F_{1,3}+F_{2,3}) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(F_{2,3}-F_{1,3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{F_{TOT,x}}{-1.18 \cdot 10^{-4}} \\ \underset{F_{TOT,y}}{-0.30 \cdot 10^{-4}} \end{pmatrix} N$$

Il modulo è $F_{TOT} = \sqrt{F_{TOT,x}^2 + F_{TOT,y}^2} = 1.22 \cdot 10^{-4}\ N$

la direzione rispetto all'asse x è data

da $\operatorname{arctg}(\theta) = \frac{F_{TOT,y}}{F_{TOT,x}} = 0.25$

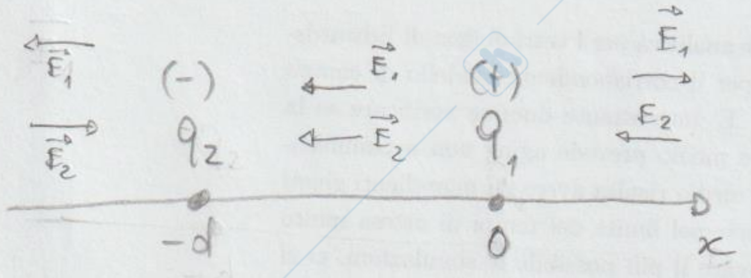


che corrisponde a $\theta_1 = 0.25 = 14°$

oppure a $\theta_2 = 3.4 = 194°$

la soluzione corretta è θ_2 in quanto $\vec{F}_{TOT}$ è diretto verso il terzo quadrante ("in basso a sinistra")

UNA CARICA POSITIVA q_1 SI TROVA A DISTANZA d DA UNA CARICA NEGATIVA q_2 TALE CHE $q_2 = -4q_1$ - TROVARE IL PUNTO SULL'ASSE CHE LE CONGIUNGE IN CUI IL CAMPO ELETTRICO È NULLO.



Poniamo $q_1 > 0$ nell'origine di un asse coordinato e $q_2 < 0$ nel punto $x = -d$

Regione $x < -d$: il campo elettrico $\vec{E}_1$ generato da q_1 è diretto verso le x negative, mentre $\vec{E}_2$, generato da q_2 è diretto verso le x positive (N.B. il verso del campo è sempre quello del moto provocato su una carica sonda POSITIVA).

Regione $-d < x < 0$: $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ sono concordi

Regione $x > 0$: $\vec{E}_1$ è diretto verso x positivo, $\vec{E}_2$ verso x negativo.

Solo nelle regioni $x < -d$ e $x > 0$ può esistere un punto in cui $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$.

Un generico punto di coordinate x dista $|x|$ da q_1 e $\sqrt{(x+d)^2}$ da q_2. Il punto che verifica $\vec{E} = 0$ verifica anche $E_1 = E_2$ in modulo

con $E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{x^2}$ $\qquad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_2|}{(x+d)^2}$

Per $q_2 = -4 q_1$

$E_1 = E_2 \Rightarrow 4x^2 = (x+d)^2$

$\Rightarrow 2x = \pm (x+d)$

$$\begin{cases} x_+ = d \rightarrow \text{soluzione che cerchiamo} \\ x_- = -\frac{d}{3} \rightarrow -d < x < 0 \end{cases}$$

, $E_1 = E_2$ ma $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$: i campi sono concordi e hanno somma vettoriale non nulla

SI CALCOLI LA DISTANZA A CUI BISOGNA PORRE DUE ELETTRONI IN MODO CHE LA FORZA ELETTROSTATICA TRA ESSI SIA UGUALE ALLA FORZA PESO CHE AGISCE SU OGNUNO DI ESSI (SI CONSIDERI LA MASSA $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg E LA CARICA $q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C PER L'ELETTRONE).

la forza elettrostatica tra due e^- posti a distanza d è $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{d^2}$

la forza peso su ognuno di essi è $P = m_e g$

$F = P \Rightarrow d^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e g}$

$\Rightarrow d = \frac{e}{2\sqrt{\pi\epsilon_0 m_e g}} = 5.1$ m