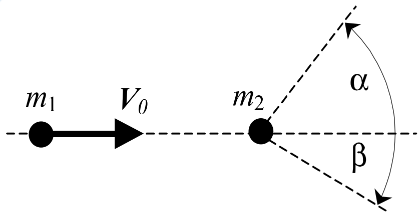
19/7/2010
ore 9:15

FISICA (primo appello)

Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Torricelli

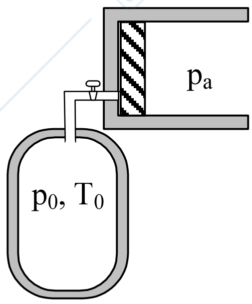
1) Un corpo di massa $m = 10$ kg è in quiete su un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.5$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.4$. Al corpo viene applicata una forza parallela al piano, di intensità $F = k\,t$, dove $k = 50$ N/s e t è il tempo. Assumendo approssimativamente $g = 10$ m/s^2, si calcoli la velocità del corpo all'istante $t = 3$ s.

2) Una particella di massa m_1 urta con velocità $\boldsymbol{V_0}$ una seconda particella di massa m_2, inizialmente ferma. Dopo l'urto la prima particella si muove lungo una direzione che forma un angolo α con $\boldsymbol{V_0}$, mentre la seconda lungo una direzione che forma un angolo β con $\boldsymbol{V_0}$ (v. figura).
a) Si calcoli il modulo delle velocità delle particelle dopo l'urto.
b) Si verifichi che con $m_1 = m_2$ e $\alpha = \beta = \pi/4$ l'urto è elastico.

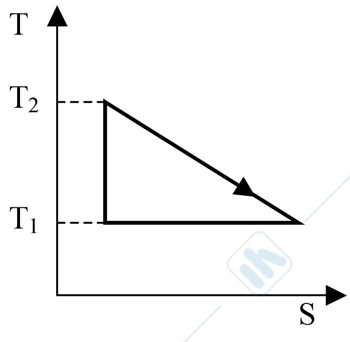


3) Si enunci e si dimostri l'equazione della statica dei fluidi ideali.

4) Una bombola contiene un gas ideale monoatomico con temperatura $T_0 = 500$ K e pressione $p_0 = 2p_a$, dove p_a è la pressione atmosferica esterna. La bombola è collegata, tramite una valvola inizialmente chiusa, ad un cilindro vuoto munito di pistone scorrevole in orizzontale senza attrito ed in equilibrio con l'aria esterna. La valvola viene aperta ed il gas raggiunge un nuovo stato di equilibrio. Considerando il sistema adiabatico, si calcoli la nuova temperatura del gas.

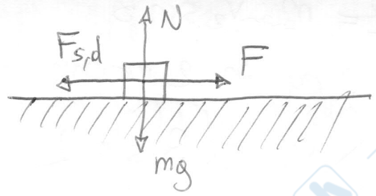


5) Si calcoli il rapporto tra lavoro prodotto e calore assorbito nel ciclo termodinamico disegnato nella figura a lato.
Dati numerici: $T_1 = 300$ K, $T_2 = 500$ K



Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Es.1



$F_s \leq \mu_s N = \mu_s mg = 50\ N$

$F = F(t) = kt < F_s$ per $t < F_s/k = 1\ s$

Quindi nell'intervallo temporale $[0, 1s]$ il corpo rimane in quiete.

Per $t > 1s$ $F(t) > F_s > F_d = \mu_d N = \mu_d mg$

$F_d = 40\ N$ (costante). La risultante delle forze orizzontali vale pertanto $R(t) = F(t) - F_d$

$R(t) = kt - F_d$. In base alla II legge della dinamica di Newton, per $t > 1s$, $a(t)$ è

$a(t) = R(t)/m = \frac{k}{m}t - \mu_d g$, quindi la velocità $v(t = 3s) = \int_{t_0}^{t}\left(\frac{k}{m}t' - \mu_d g\right)dt' =$

$= \frac{1}{2}\frac{k}{m}(t^2 - t_0^2) - \mu_d g(t - t_0) = 12\ m/s$

Es.2

a) Applico la conservazione della quantità di moto:

$\vec{p}_i = m_1 \vec{V}_0 = m_1 V_0 \hat{u}_x$

$\vec{p}_F = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1 V_1 \cos\alpha\, \hat{u}_x + m_1 V_1 \sin\alpha\, \hat{u}_y + m_2 V_2 \cos\beta\, \hat{u}_x - m_2 V_2 \sin\beta\, \hat{u}_y$

$\vec{p}_i = \vec{p}_F \Rightarrow \begin{cases} m_1 V_0 = m_1 V_1 \cos\alpha + m_2 V_2 \cos\beta \\ m_1 V_1 \sin\alpha = m_2 V_2 \sin\beta \end{cases}$

sistema di 2 eq. in 2 incognite V_1 e V_2

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE** l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

www.unidocs.it - Appunti e dispense per superare i tuoi esami universitari

$$\cancel{m_1} V_0 = \cancel{m_1} V_1 \cos\alpha + \cancel{m_1} V_1 \operatorname{ctg}\beta \sin\alpha$$

da cui $V_1 = \dfrac{V_0}{\cos\alpha + \operatorname{ctg}\beta \sin\alpha}$

e $V_2 = \dfrac{m_1}{m_2} \dfrac{V_0}{\cos\beta + \operatorname{ctg}\alpha \sin\beta}$

b) Posto $m_1 = m_2$ e $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$ ricavo dalle formule precedenti

$$V_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} V_0 \quad e \quad V_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} V_0 = V_1$$

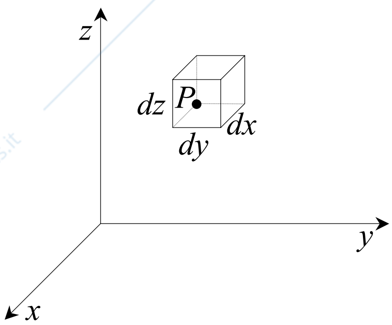
da cui $E_{K,F} = 2 \frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} m V_0^2 = E_{K,i}$

quindi si è dimostrato che l'urto risulta perfettamente elastico.

Es.3

L'equazione della statica dei fluidi stabilisce il legame esistente tra la pressione p in un fluido ed il campo di forze di volume $\vec{f}$ agente su di esso, in condizioni di equilibrio statico: $\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}$, essendo ρ la densità (locale) del fluido.

Per dimostrarla, consideriamo un fluido immerso in un campo di forze, ed un elemento infinitesimo di volume al suo interno, di forma *cubica*. Indichiamo con ρ la densità del fluido, con p la sua pressione nel punto P, ad uno spigolo dell'elemento infinitesimo di volume considerato (vedi figura), e con $\vec{f}$ la *forza per unità di massa* del campo (ad esempio, nel caso di un campo gravitazionale, quella che abbiamo definito come intensità del campo, che sarà $\vec{f} = -g\hat{u}_z$). L'equazione generale della statica per l'elemento di volume considerato è:



$$p\,dy\,dz\,\hat{u}_x - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy\,dz\,\hat{u}_x + p\,dz\,dx\,\hat{u}_y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dz\,dx\,\hat{u}_y +$$

$$+ p\,dx\,dy\,\hat{u}_z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) dx\,dy\,\hat{u}_z + \rho\, dx\,dy\,dz\,\vec{f} = 0,$$

che si semplifica in: $-\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\hat{u}_x + \dfrac{\partial p}{\partial y}\hat{u}_y + \dfrac{\partial p}{\partial z}\hat{u}_z\right) + \rho \vec{f} = 0$.

Ricordando l'espressione dell'operatore gradiente in coordinate cartesiane, l'equazione precedente assume la forma: $\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}$, C.V.D.

Es.4

Trasformazione adiabatica: $\delta Q = 0$
Nello stato finale, dovrà essere, per def. di equilibrio (meccanico), $p = p_a$
Quindi nello stato iniziale: $p_0 = 2p_a$, $T_0 = 500K$
e $V_0 = nRT_0/2p_a$ per la eq. di stato del gas ideale.
Nello stato finale: $p = p_a$, T è incognita e
e $V = nRT/p_a$

Quindi sappiamo che $\frac{2V_0}{T_0} = \frac{V}{T}$ (1)

Per il I PTD, sappiamo inoltre che la variaz. di energia interna del gas deve essere pari al lavoro compiuto dall'ambiente sul sistema.
Tale lavoro è pari a $\mathcal{L}_{ext} = p_a(V_0 - V)$, (quindi è un lavoro negativo, perciò è un lavoro subito dall'ambiente):

$$n c_v (T - T_0) = p_a (V_0 - V) \quad (2)$$

Le due equazioni (1) e (2) costituiscono un sistema in 2 incognite T e V.
Da (1) ricaviamo $V = \frac{2T}{T_0} V_0$ che sostituito in (2) fornisce:

$$n c_v (T - T_0) = p_a \left(1 - \frac{2T}{T_0}\right) V_0$$

$$\left(n c_v + \underbrace{\frac{2 p_a V_0}{T_0}}_{nR}\right) T = \underbrace{p_a V_0}_{\frac{1}{2} nRT_0} + n c_v T_0$$

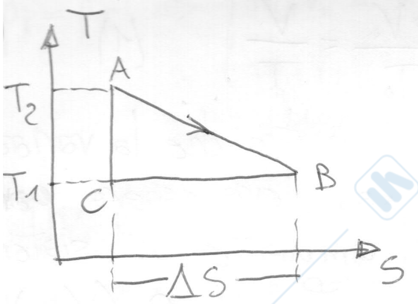
$$\cancel{n} c_p T = \cancel{n} \left(c_v + \frac{1}{2} R\right) T_0$$

Ricordando che il gas è monoatomico, quindi $c_v = \frac{3}{2} R$ e $c_p = 5/2 R$ ricavo

$$T = \frac{4}{5} T_0 = 400 \text{ K.}$$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Es.5



In un diagramma T-S l'area sottesa dalla curva corrispondente ad una data trasformazione è pari alla quantità di calore scambiata (con segno) dal sistema lungo tale trasformazione. Infatti, dalla definizione di entropia abbiamo

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow \delta Q = T\,dS \Rightarrow \int_A^B \delta Q = \int_A^B T\,dS$$

quindi $Q_{A \to B} = \int_A^B T\,dS$

Dal diagramma del ciclo si evince quindi che il calore assorbito $Q_{ASS} = Q_{AB}$ e il calore ceduto $Q_{CED} = -Q_{BC}$, quindi

$$Q_{ASS} = \frac{T_1 + T_2}{2} \Delta S$$

$$Q_{CED} = T_1 \Delta S$$

$$\mathcal{L} = Q_{ASS} - Q_{CED} = \frac{1}{2}(T_2 - T_1)\Delta S$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{L}}{Q_{ASS}} = \frac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2} = \frac{1}{4}$$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*