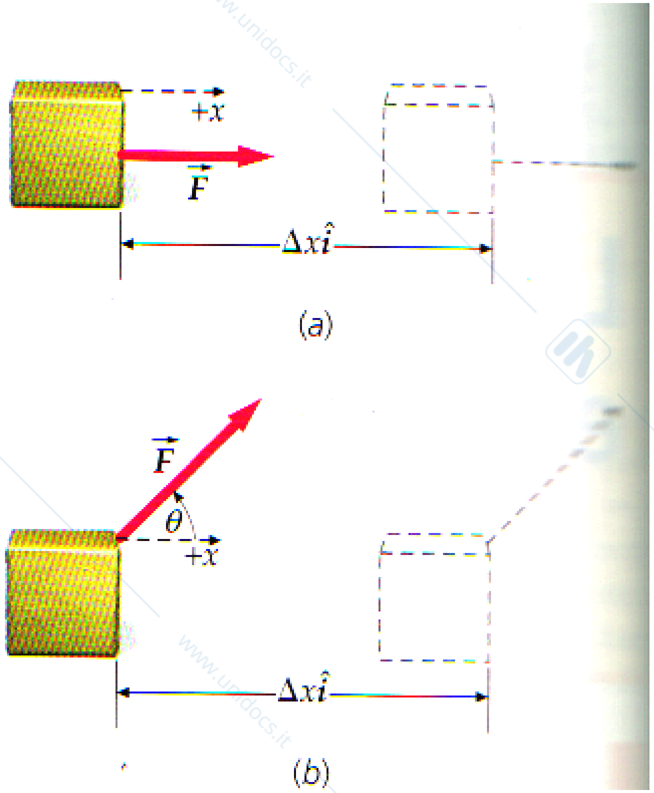
Lavoro ed energia

Data una forza costante **F**, si *definisce* **lavoro** L svolto dalla forza F su un corpo la quantità

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s}$$



Il prodotto dei due vettori F e s è un *prodotto scalare*, quindi il lavoro è una quantità scalare.
Se la forza e lo spostamento s = x sono paralleli si può scrivere semplicemente

$$L = F \cdot x$$

altrimenti è, detto θ l'angolo tra F e x:

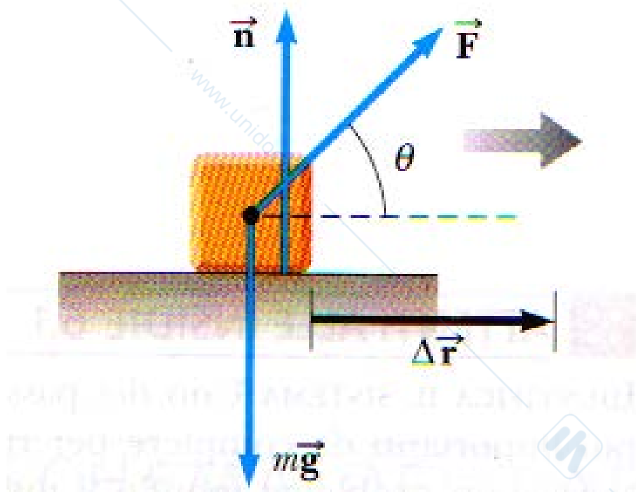
$$L = F\, x \cos\theta$$

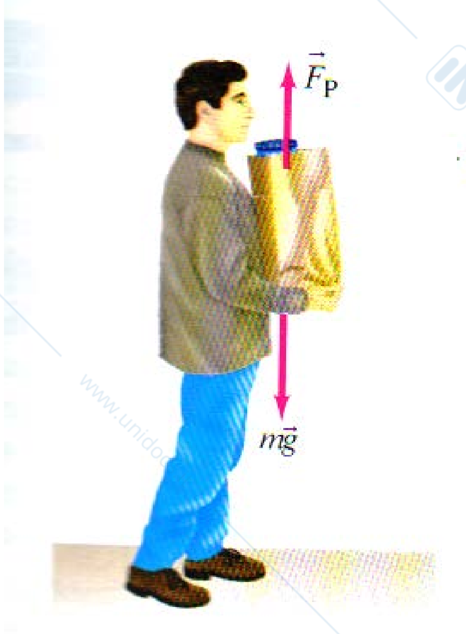
Ovviamente, se la forza e lo spostamento sono ortogonali si ha:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad cos\,\theta = 0 \qquad \qquad L = F\, x \cos\theta = 0$$

Quindi ad esempio, poiché nel *moto circolare uniforme* la forza *centripeta* è sempre ortogonale allo spostamento, allora L = 0.

Analogamente, se un corpo viene trascinato su un piano orizzontale, la forza di gravità m**g**, e la forza normale **n**, che sono ortogonali allo spostamento, non compiono lavoro.





Affinché ci sia lavoro, ci deve essere spostamento. Quindi ad esempio reggere un corpo **non** comporta alcun lavoro, anche se si applica una forza per sostenerlo.

Nel sistema internazionale SI, il lavoro si misura in **joule** (J):

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \times 1\,\mathrm{m}$$

Dimensionalmente è

$$[L] = [F \cdot s] = \left[MLT^{-2}L\right] = \left[ML^{2}T^{-2}\right]$$

Dalla definizione si vede inoltre che il lavoro può essere sia positivo che negativo: se i versi di **F** ed **r** sono concordi lavoro positivo, se sono discordi il lavoro è negativo.
O in altri termini, se

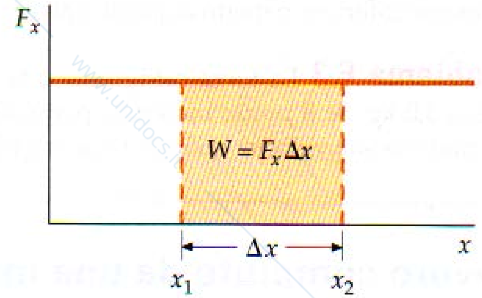
$$0° \leq \theta < 90° \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L} > 0$$

$$90° < \theta \leq 180° \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L} < 0$$

Se *più forze* agiscono su un corpo, il lavoro totale sarà pari alla somma del lavoro fatto dalle singole forze.
Ad esempio, per uno spostamento Δx lungo x si ha:

$$L_{tot} = F_{1,x}\Delta x + F_{2,x}\Delta x + F_{3,x}\Delta x + \ldots = F_{r,x}\Delta x$$

Se su un corpo agisce una forza costante F, dalla definizione data si vede che il lavoro è rappresentato dall'area del grafico forza - spostamento, tra i due punti dello spostamento Δx x_1 ed x_2.

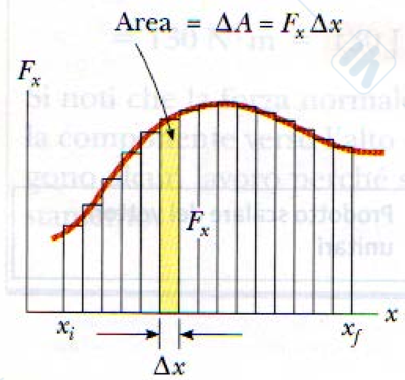


Se la **forza** che compie il lavoro **non** è **costante**, allora l'espressione del lavoro si complica.

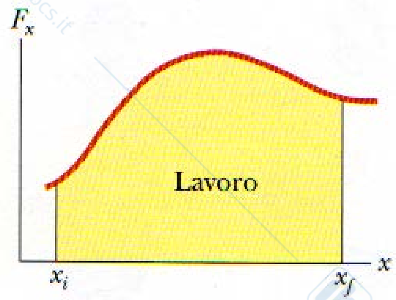
Se la forza F che agisce su un corpo essa varia come in figura, ed il moto è rettilineo lungo x, il lavoro è ancora rappresentata dall'area del grafico forza – spostamento, che può essere determinata tenendo conto di tanti spostamenti molto piccoli Δx_i e sommando tutti i contributi:

$$L = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i F_{x,i}\ \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \quad L = \int_{x_i}^{x_f} F_x\ dx$$



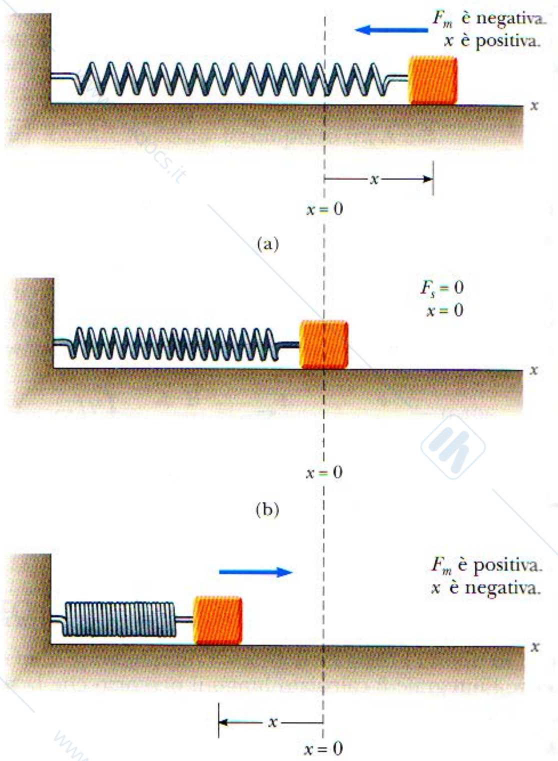
(a)



(b)

Domanda: ma esistono forze ***non*** costanti?

Un esempio semplice di *forza non costante* è la forza **elastica**.



In questo caso si ha che

$$F_m = -k\ x$$

Il lavoro fatto per *allungare* la molla in uno spostamento x è dato da

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F_x\ dx = \int_{x_i}^{x_f} k\ x\ dx$$

Integrando

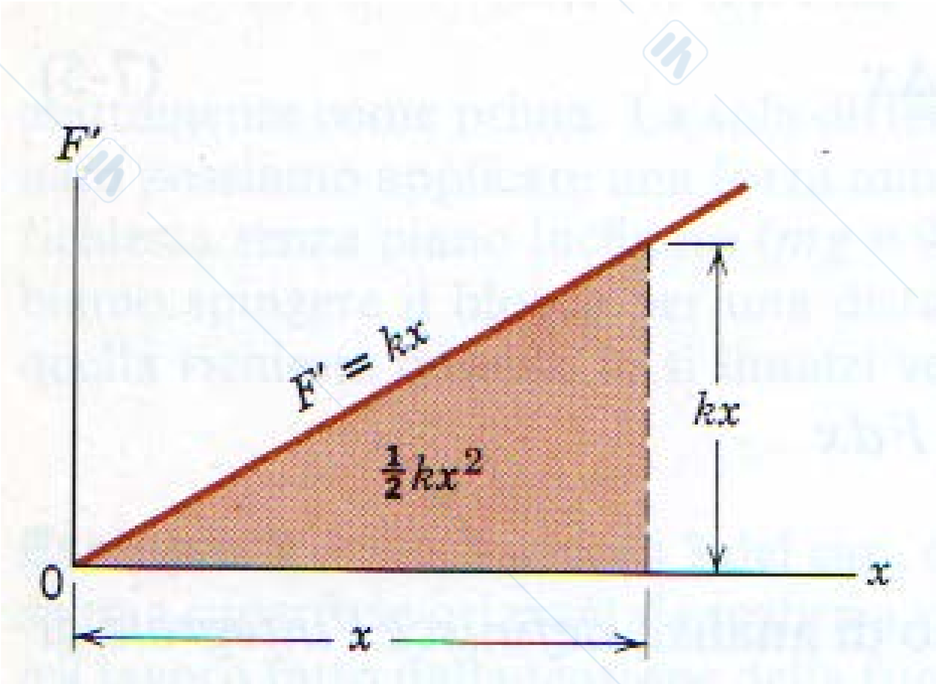
$$L = \int_{x_i}^{x_f} k\ x\ dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

e se $x_i = 0$ ed $x_f = x$ si può trovare il lavoro fatto per allungare la molla di un tratto x:

$$L = \frac{1}{2}kx^2$$

Si poteva trovare lo stesso risultato considerando che la forza è come rappresentato in figura e quindi l'area nel grafico *forza – spostamento*, che come visto precedentemente rappresenta il lavoro, può essere calcolata semplicemente:

$$L = \frac{1}{2}kx \cdot x = \frac{1}{2}kx^2$$



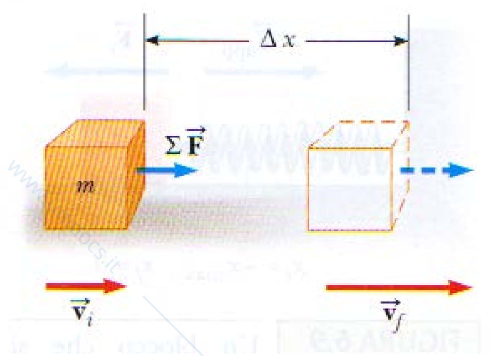
Energia cinetica e *teorema dell'energia cinetica*

Difficile dare ora una definizione esauriente di energia. Si può dire che, almeno in meccanica:

l'energia è la capacità a compiere un lavoro

Definizione non completamente corretta e molto semplificata, ma per gli scopi del corso ragionevolmente corretta.

Dato un corpo di massa m che si muove di moto rettilineo con velocità iniziale v_i. Ad esso viene applicata una forza **F** per un tratto Δx che lo accelera e porta la sua velocità a v_f.



Il lavoro compiuto dalla forza è

$$L = F \cdot \Delta x$$

Ricordando poi l'equazione per un moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a\,\Delta x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x}$$

$$L = F \cdot \Delta x = ma\, \Delta x = m\left(\frac{v_f^2 - v_i^2}{2\Delta x}\right)\Delta x$$

$$L = \frac{1}{2} m\, v_f^2 - \frac{1}{2} m\, v_i^2$$

Viene definita **energia cinetica** *traslazionale* T la quantità

$$T = \frac{1}{2} m\, v^2$$

Questa espressione è valida per qualunque moto traslazionale in tre dimensioni e anche se la forza F è variabile.

Si può quindi scrivere che è

$$L = T_f - T_i = \Delta T$$

Teorema dell'energia cinetica (o delle forza vive)

Il lavoro totale compiuto su un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica

In molti testi si usa la lettera K anziché la lettera T per indicare l'energia cinetica.

Per vedere che è vero anche se la forza è variabile, si osserva che:

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx = \int_{x_i}^{x_f} ma \, dx$$

Si può poi scrivere che:

$$a = \frac{d\,\mathrm{v}}{dt} = \frac{d\,\mathrm{v}}{dx}\frac{dx}{dt} = \mathrm{v}\frac{d\,\mathrm{v}}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad L = \int_{x_i}^{x_f} ma \, dx = \int_{x_i}^{x_f} m\,\mathrm{v}\frac{d\,\mathrm{v}}{dx} dx = \int_{\mathrm{v}_i}^{\mathrm{v}_f} m\,\mathrm{v}\, d\,\mathrm{v}$$

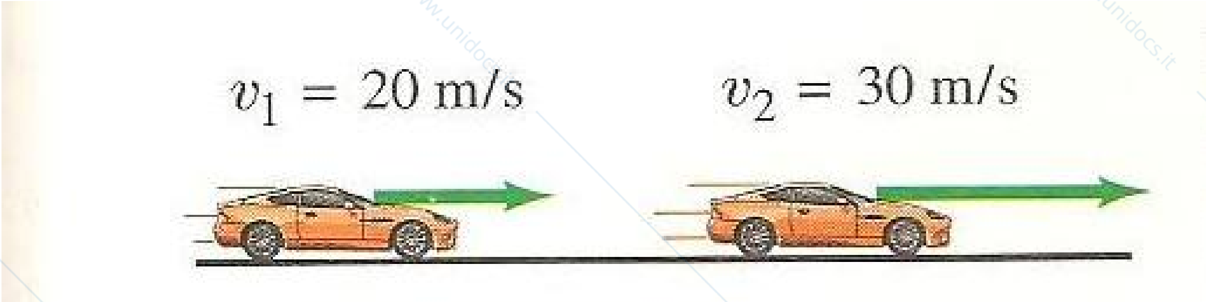
$$\Rightarrow \quad L = \int_{\mathrm{v}_i}^{\mathrm{v}_f} m\,\mathrm{v}\, d\,\mathrm{v} = \frac{1}{2} m\,\mathrm{v}_f^2 - \frac{1}{2} m\,\mathrm{v}_i^2$$

Dal *teorema dell'energia cinetica* si deduce ovviamente che l'energia cinetica si misura in joule (J) e che *dimensionalmente* è

$$[T] = \left[\frac{1}{2} m\,\mathrm{v}^2\right] = \left[ML^2T^{-2}\right]$$

ha cioè ovviamente le *stesse dimensioni del lavoro*!

Quanto lavoro è necessario per accelerare un'automobile di massa m = 1000 kg da 20 m/s a 30 m/s?

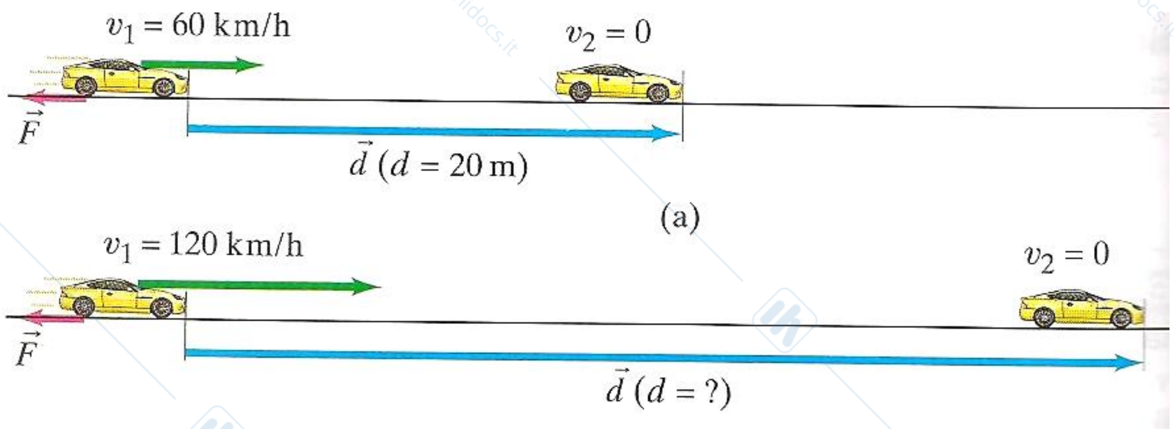


Il lavoro necessario è pari alla variazione dell'energia cinetica

$$L = \frac{1}{2} m \mathrm{v}_f^2 - \frac{1}{2} m \mathrm{v}_i^2$$

$$L = \frac{1}{2} \times (1000\ kg) \times (30\ m/s)^2 - \frac{1}{2} \times (1000\ kg) \times (20\ m/s)^2 =$$
$$= 2.5 \times 10^5\ J$$

L'automobile dell'esercizio precedente, quando viaggia a 60 km/h è in grado di fermarsi in d = 20 m. se adesso viaggiasse a 120 km/h, quale sarebbe la sua nuova distanza di arresto d?



Assumiamo che la forza frenante sia costante. Forza **F** e distanza di arresto **d** hanno verso opposto.
Il lavoro per frenare l'automobile è

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = -Fd$$

Al termine della frenata la velocità finale è zero, quindi dal teorema dell'energia cinetica:

$$L = -Fd = \Delta T = \frac{1}{2} m \mathrm{v}_f^2 - \frac{1}{2} m \mathrm{v}_i^2 = 0 - \frac{1}{2} m \mathrm{v}_i^2$$

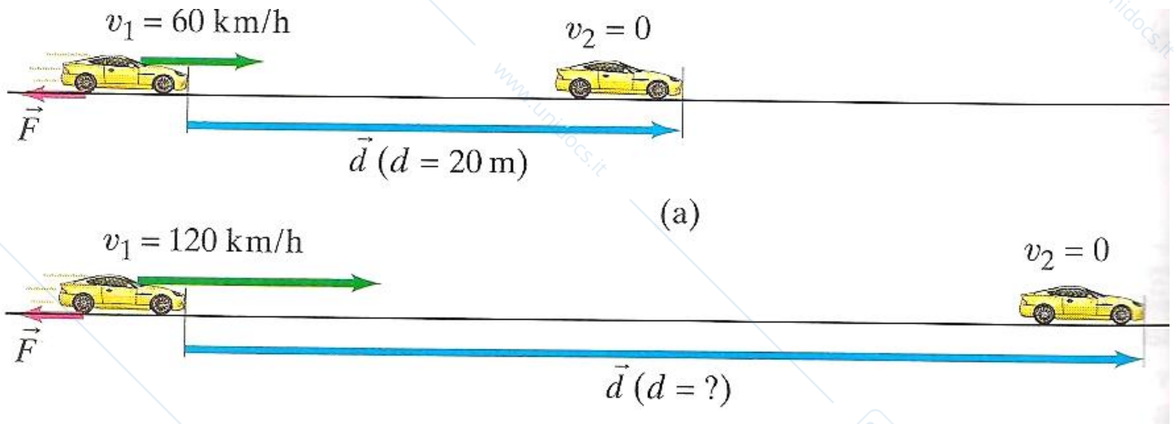
In questa espressione, F e m sono costanti e si vede che

$$-Fd = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$\Rightarrow \quad d \propto v^2$$

Cioè che lo spazio di frenata *aumenta* con il quadrato della velocità!
Se la velocità raddoppia (da 60 km/h a 120 km/h) o spazio di frenata diventa $2^2 = 4$ volte maggiore, e quindi d = 80 m!

Guidate con prudenza e limitate la velocità ☺

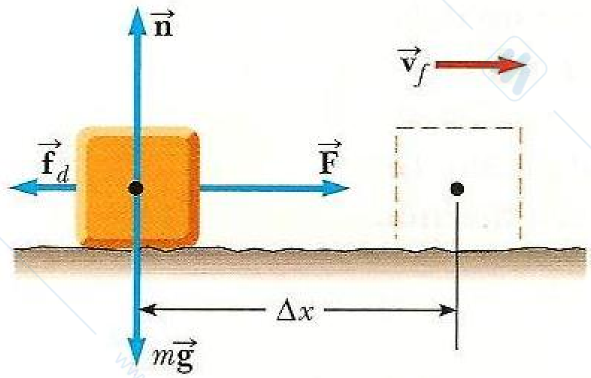


Lavoro in presenza di forze di attrito

Un blocco di 6 kg, inizialmente fermo, è tirato verso destra da una forza costante orizzontale di modulo F = 12.0 N su una superficie scabra. Il coefficiente di attrito dinamico tra blocco e superficie è 0.150.

Trovare la velocità del blocco dopo che si è spostato di $\Delta x = 3.00$ m.

Ricordando che il lavoro fatto su un corpo se su di esso agiscono più forze è pari alla somma del lavoro fatto da ogni singola forza e tenendo conto dei segni, il teorema dell'energia cinetica in questo caso si può scrivere come



$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = -f_d \Delta x + F \Delta x = -\mu_d n \Delta x + F \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad L = \Delta T = -\mu_d m g \Delta x + F \Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\mu_d m g \Delta x + F \Delta x$$

Essendo $v_i = 0$:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = -\mu_d m g \Delta x + F \Delta x$$

$$v_f = \sqrt{-2\,\mu_d\, g\, \Delta x + \frac{2\,F\,\Delta x}{m}} = 1.78\, m/s$$

Esempio 6.5 Lavoro di una forza elastica

Un corpo di 4 kg su un piano privo di attrito è fissato a una molla orizzontale avente $k = 400\ \text{N/m}$. La molla è inizialmente compressa di 5,0 cm (fig. 6.14). Determinare (*a*) il lavoro compiuto sul corpo dalla molla, mentre il corpo torna alla posizione di equilibrio $x = x_2 = 0{,}0$ cm, partendo dalla posizione $x = x_1 = -5{,}0$ cm, e (*b*) la velocità del corpo in $x_2 = 0{,}0$ cm.

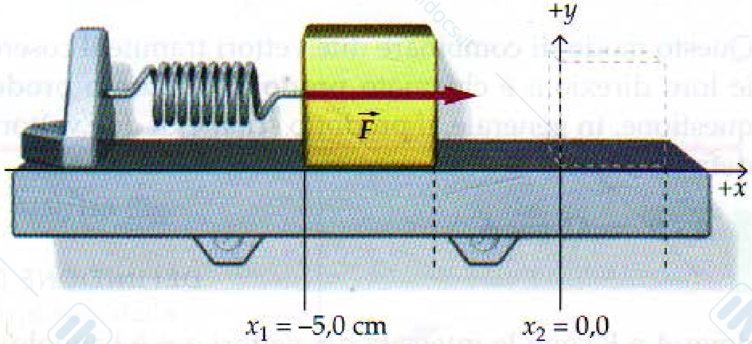


FIGURA **6.14**

IMPOSTAZIONE Disegna un grafico di F_x in funzione di x. Il lavoro compiuto sul corpo mentre si muove da x_1 a x_2 è pari all'area sottesa dalla funzione $F_x(x)$ in questo intervallo. Questa area, ombreggiata in figura 6.15, può essere calcolata eseguendo l'integrale della forza in dx. Il lavoro è poi uguale alla variazione di energia cinetica, che è data dall'energia cinetica finale, visto che quella iniziale è nulla. La velocità del corpo in $x = 0{,}0$ cm si ricava dalla sua energia cinetica finale.

SOLUZIONE

(*a*) Il lavoro W compiuto sul corpo dalla molla è l'integrale di $F_x\,dx$ da x_1 a x_2:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}kx^2\Big|_{x_1}^{x_2} = -\tfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

$$= -\tfrac{1}{2}(400\ \text{N/m})[(0{,}000\ \text{m})^2 - (0{,}050\ \text{m})^2]$$

$$= \boxed{0{,}50\ \text{J}}$$

(*b*) Applica il teorema del lavoro e dell'energia cinetica al corpo e ricava v_2:

$$W_{\text{tot}} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$

quindi

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2W_{\text{tot}}}{m} = 0 + \frac{2(0{,}50\ \text{J})}{4{,}0\ \text{kg}} = 0{,}25\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_2 = \boxed{0{,}50\ \text{m/s}}$$

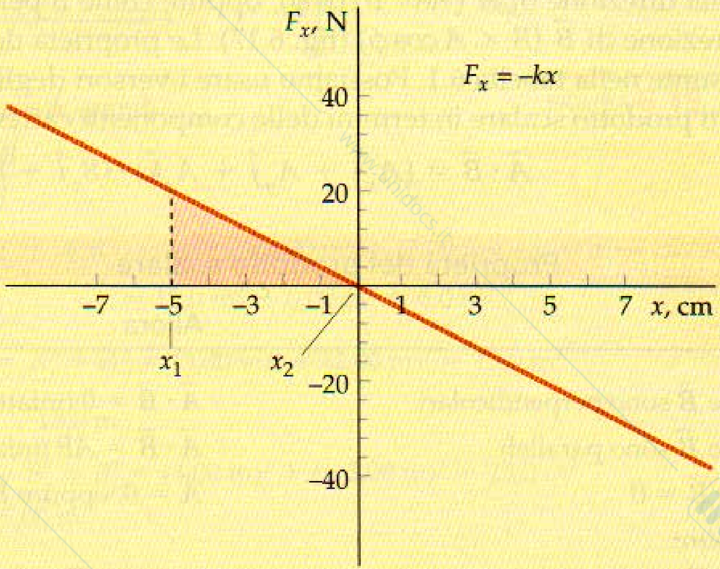


FIGURA **6.15**

La potenza

Nelle definizioni precedenti, non c'è alcun riferimento al tempo impiegato a compiere il lavoro L, ossia alla *rapidità* con cui si trasferisce energia al sistema.

Se si applica una *forza esterna* ad un corpo, e se il lavoro compiuto dalla forza è L nel tempo t allora si definisce **potenza** *media* il rapporto

$$\overline{P} = \frac{L}{\Delta t}$$

Si definisce poi, come già visto in precedenza, **potenza** *istantanea* come

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad dL = P dt$$

e anche

$$L = \overline{P} \Delta t$$

È ovvio che la potenza è una *grandezza scalare*.

Nel SI la potenza P si misura in watt (W):

$$1\,W = 1\,\frac{J}{s}$$

Dimensionalmente è

$$[P] = [L/t] = \left[ML^2T^{-2} \cdot T^{-1}\right] = \left[ML^2T^{-3}\right]$$

Ricordando poi quanto visto per il lavoro, si può anche scrivere che è

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d\left(\vec{F} \cdot \vec{s}\right)}{dt} = \frac{d\left(\vec{F} \cdot \vec{s}\right)}{dt} = \vec{F}\,\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{v}}}$$

Cioè la potenza è pari al *prodotto scalare* della forza per la velocità.

Non si deve confondere la potenza con l'energia!

Si fa spesso uso di una unità di energia data dal chilowatt-ora. Attenzione che è una unità di energia! Infatti 1 kWh è dato da

$$1\,kWh = \left(10^3\,W\right)\left(3600\,s\right) = 3.6 \times 10^6\,W \cdot s = 3.6\,MJ$$

Anche se poco corretto le potenze dei motori delle automobili vengono spesso date in cavalli vapore (CV o hp).

È una misura del sistema britannico e si ha che è circa

$$1\,hp \approx 746\,W$$

Esercizio sulla potenza

Dal ventricolo sinistro del cuore di un uomo escono circa 60 cm^3 di sangue durante ogni sistole, pari ad una massa di m = 6×10^{-2} kg, con una velocità v = 0.2 m/s.
Calcolare la potenza per far circolare il sangue, sapendo che la *frequenza cardiaca* è di circa 1 Hz.

Il lavoro fatto dal cuore è pari alla *variazione dell'energia cinetica* del sangue

$$L = \Delta T = \frac{1}{2} m \mathrm{v}_f^2 - \frac{1}{2} m \mathrm{v}_i^2$$

e la potenza è pari a

$$\overline{P} = \frac{L}{\Delta t}$$

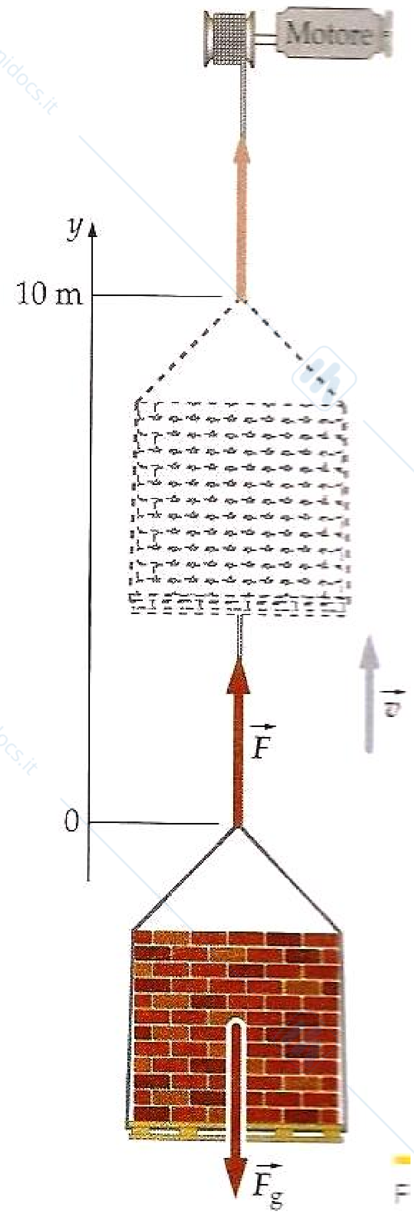
Assumendo che la velocità iniziale del sangue sia zero e che una frequenza di 1 Hz corrisponde ad un periodo (tempo) t = 1 s, si ha che

$$\overline{P} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{m \mathrm{v}_f^2}{t} = \frac{1}{2} \times \frac{\left(6 \times 10^{-2}\, kg\right) \times \left(0.2\, m/s\right)^2}{1\, s} =$$

$$= 1.2 \times 10^{-3} W$$

Esercizio sulla potenza

Un piccolo dispositivo a motore aziona un montacarichi che solleva un carico di mattoni del peso di 500 N a un'altezza di 10 m in 20 s a velocità costante (fig. 6.22). Il montacarichi pesa 300 N. Qual è la potenza del motore?



IMPOSTAZIONE Visto che l'accelerazione è nulla, l'intensità della forza $\vec{F}$ esercitata dal motore e diretta verso l'alto, è uguale al peso del montacarichi più quello dei mattoni. Il lavoro compiuto dal motore nell'unità di tempo rappresenta la potenza.

SOLUZIONE

La potenza è data da $\vec{F} \cdot \vec{v}$, per cui:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv\cos\phi = Fv\cos(0) = Fv$$

$$= (800\ \mathrm{N})\frac{10\ \mathrm{m}}{20\ \mathrm{s}} = \boxed{4{,}0 \times 10^2\ \mathrm{W}}$$

VERIFICA Il lavoro compiuto dalla forza è (800 N)(10 m) = 8000 J. Questo lavoro impiega un tempo di 20 s a sollevare il carico, quindi ci aspettiamo che la potenza sia 8000 J/20 s = = $4{,}0 \times 10^2$ W. Il nostro risultato è in perfetto accordo.

ULTERIORI CONSIDERAZIONI (1) Il montacarichi in realtà non può operare a velocità costante. Mattoni e montacarichi dovranno essere inizialmente messi in moto (visto che partono da uno stato di quiete). La potenza erogata in questo intervallo iniziale sarà maggiore di 400 W. E sarà anche minore di 400 W quando il montacarichi rallenta fino a fermarsi nello stato finale. Il valore di 400 W rappresenta la potenza media del motore durante il sollevamento (mentre la potenza della forza di gravità vale −400 W). (2) Una potenza di 400 W è leggermente superiore a $\frac{1}{2}$ hp.