Politecnico di Milano – Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

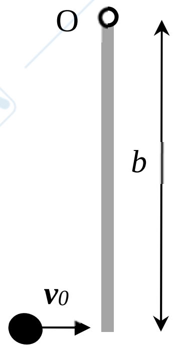
19 / 6 / 2018
ore 13:30

FISICA (seconda prova in itinere)

Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti

1.

Un'asta omogenea di massa M e lunghezza b può ruotare in un piano verticale attorno a un estremo O ed è inizialmente in equilibrio. L'asta viene colpita all'altra estremità da una pallina, di massa $m = M/2$ in moto con velocità $\mathbf{v}_0$ orizzontale, che dopo l'urto rimane unita all'asta.
Si calcoli la minima velocità v_0 per cui l'asta compie una rotazione completa dopo l'impatto.
[Si consideri la pallina un punto materiale. Il momento d'inerzia di un'asta omogenea rispetto al CM è $I_{CM} = Mb^2/12$]



2.

Un cilindro chiuso da un pistone scorrevole in verticale senza attrito, entrambi *isolanti*, contiene n moli di un gas ideale monoatomico in equilibrio termodinamico alla temperatura T_0. Il gas compie le seguenti trasformazioni:

1. sul pistone viene appoggiato un peso ed il gas raggiunge un nuovo stato d'equilibrio con una pressione *sei volte* quella iniziale;
2. il peso viene rapidamente rimosso ed il gas ritorna in equilibrio.

Si calcoli:
a) la temperatura del gas dopo la prima trasformazione,
b) la variazione d'energia interna del gas nell'intero processo.
[Esprimere i risultati in funzione di T_0, di n e della costante R]

3.

a) Si enunci il principio d'accrescimento dell'entropia spiegando esplicitamente il significato dei simboli utilizzati e le condizioni di validità.
b) Da tale enunciato di deduca il secondo principio della termodinamica nella formulazione di Kelvin-Planck.

Si ricorda di:
- *Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA*
- *FIRMARE l'elaborato;*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Fisica - seconda prova in itinere del 19/6/18 - Traccia sintetica di soluzione

Quesito 1

- Durante l'urto si conserva il momento angolare rispetto al polo O:

$$L_{i,O} = L_{f,O}$$

$$mv_0 b = I_{tot}\omega$$

dove inizialmente vi è solo il momento angolare della pallina in moto, mentre dopo l'urto occorre considerare il momento di inerzia assiale I_{tot} che comprende sia il contributo dell'asta sia il contributo della pallina rimasta unita ad essa.

- $I_{tot} = I_{asta,O} + I_{pallina,O} = \underbrace{I_{asta,CM} + M\frac{b^2}{2^2}}_{\text{teo. H.-S.}} + mb^2 = \frac{1}{12}Mb^2 + \frac{1}{4}Mb^2 + mb^2 = \frac{5}{3}mb^2$

- Il caso con velocità minima per compiere una rotazione completa corrisponde alla condizione per cui l'asta, dopo l'urto, arriva con velocità angolare nulla dopo essere ruotata di 180°.

- Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica al moto del corpo rigido dopo l'urto. Dovendo considerare i contributi di energia potenziale della forza peso sia per l'asta sia per la pallina, assumiamo come zero dell'energia potenziale la quota iniziale della pallina. Ricordiamo inoltre che l'energia cinetica di un corpo rigido rotante attorno a un asse fisso si può scrivere come $E_K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I}$.

$$E_{mecc,i} = E_K + U_{p,asta} + U_{p,pallina} = \frac{1}{2}\frac{L_{f,0}^2}{I_{tot}} + Mg\frac{b}{2} + 0$$

$$E_{mecc,f} = E_K + U_{p,asta} + U_{p,pallina} = 0 + Mg\frac{3b}{2} + 2mgb$$

- Uguagliando:

$$\frac{1}{2}\frac{L_{f,O}^2}{I_{tot}} + Mg\frac{b}{2} = Mg\frac{3b}{2} + 2mgb$$

$$\frac{1}{2}\frac{L_{i,O}^2}{I_{tot}} = 4mgb$$

$$L_{i,O}^2 = 8mgb\, I_{tot}$$

$$m^2v_0^2b^2 = \frac{40}{3}m^2gb^3$$

$$\boxed{v_0 = 2\sqrt{\frac{10}{3}gb}}$$

Quesito 2

a)
- Entrambe le trasformazioni sono *irreversibili*, in quanto non sono quasistatiche.
  - Consideriamo la prima trasformazione. Possiamo scrivere l'equazione di stato dei gas per lo stato iniziale e lo stato finale:

$$p_0V_0 = nRT_0 \qquad 6p_0V_1 = nRT_1$$

- Scriviamo il Primo Principio della Termodinamica, tenendo presente che la trasformazione è adiabatica, dunque $Q = 0$.

$$\mathcal{L} = -\Delta U = nc_V(T_0 - T_1)$$

- Consideriamo che il lavoro termodinamico è, per definizione, quello operato dalle forze di pressione esterne sul sistema. La pressione esterna è costante durante tutta la trasformazione e pari a $6p_0$ perciò:

$$\mathcal{L} = \int p_{est}dV = p_{est}\Delta V = 6p_0(V_1 - V_0) = 6p_0V_1 - 6p_0V_0$$

- Sostituendo nel Primo Principio:

$$6p_0V_1 - 6p_0V_0 = nc_V(T_0 - T_1)$$

Per un gas ideale monoatomico $c_V = \frac{3}{2}R$. Sostituendo inoltre le relazioni derivanti dall'Equazione di Stato:

$$nRT_1 - 6nRT_0 = \frac{3}{2}nRT_0 - \frac{3}{2}nRT_1$$
$$3T_1 = 15T_0$$
$$\boxed{T_1 = 3T_0}$$

b)
- Possiamo procedere ad analizzare la seconda trasformazione in modo analogo alla prima.
- Per lo stato finale della seconda trasformazione, dall'Equazione di Stato dei gas perfetti:

$$p_0V_2 = nRT_2$$

- Applicando il Primo Principio della Termodinamica:

$$\mathcal{L} = -\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_2)$$

- Qui la pressione esterna è costante durante tutta la trasformazione e pari a p_0, perciò:

$$\mathcal{L} = \int p_{est}dV = p_{est}\Delta V = p_0(V_2 - V_1) = p_0V_2 - p_0V_1$$

- Sostituendo l'espressione del lavoro nel Primo Principio:

$$p_0V_2 - p_0V_1 = \frac{3}{2}nR(T_1 - T_2)$$

Sostituendo le relazioni derivanti dall'Equazione di Stato:

$$nRT_2 - \frac{1}{6}nRT_1 = \frac{3}{2}nRT_1 - \frac{3}{2}nRT_2$$
$$15T_2 = 10T_1$$
$$T_2 = \frac{2}{3}T_1 = 2T_0$$

- La variazione complessiva di energia interna è:

$$\Delta U_{tot} = nc_V(T_2 - T_0) = \frac{3}{2}nR(2T_0 - T_0)$$

$$\boxed{\Delta U_{tot} = \frac{3}{2}nRT_0}$$

Quesito 3

Si veda la teoria.