Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria dell'Informazione

24/9/2010
ore 13:00

FISICA (secondo appello)

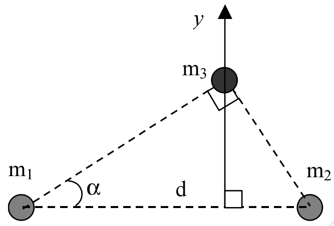
Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Torricelli

1) Un corpo puntiforme di massa $m_1 = 3$ kg inizialmente fermo a un'altezza $H = 1$ m scivola su un piano inclinato liscio. Il corpo urta in modo completamente anelastico un secondo corpo puntiforme di massa $m_2 = 2m_1$, fermo su un piano orizzontale liscio e collegato ad una molla di costante elastica $k = 2\times10^3$ N/m. Assumendo approssimativamente $g = 10$ m/s^2, si calcoli la massima compressione della molla.

2) Tre corpi puntiformi di massa m_1, m_2 e m_3 sono disposti nei vertici di un triangolo rettangolo (vedi figura).

a) Si determini per quale valore del rapporto m_2/m_1 la forza gravitazionale risultante su m_3 ha componente solo sull'asse y.

b) Si determini l'energia potenziale gravitazionale della massa m_3.



3) Si ricavi il periodo delle piccole oscillazioni in un piano verticale di un'asta rigida, omogenea, di sezione trascurabile, di lunghezza d e massa m, incernierata in un suo estremo.

4) Un gas ideale monoatomico subisce una trasformazione reversibile costituita da un raffreddamento a volume costante (A→B) seguito da un riscaldamento a pressione costante (B→C). Il calore totale scambiato dal gas è zero e $T_A = 2T_B$.

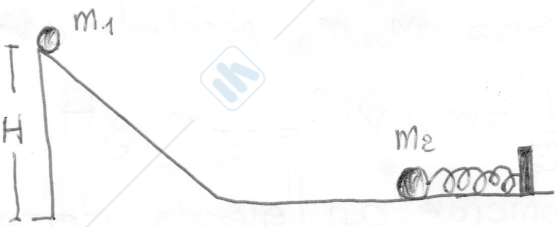
a) Si calcoli la temperatura finale del gas, T_C, in funzione di T_A.

b) È possibile riportare il gas nello stato iniziale (A) mediante una trasformazione adiabatica?

5) Un gas ideale compie una trasformazione adiabatica irreversibile. Si dica se la pressione finale del gas è maggiore, minore o uguale a quella che si otterrebbe con una trasformazione adiabatica reversibile che, a partire dal medesimo stato iniziale, producesse un'identica variazione di temperatura.

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

1.



Inizialmente m_1 è ferma quindi possiede energia meccanica

$$E_{1i} = m_1 g H$$

Appena prima dell'urto m_1 possiede invece energia meccanica

$$E_{1F} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Poichè la caduta di m_1 avviene sotto l'azione di sole forze conservative, la sua energia meccanica si conserva e abbiamo

$$E_{1i} = E_{1F} \Rightarrow \cancel{m_1} g H = \frac{1}{2} \cancel{m_1} v_1^2$$

da cui $v_1 = \sqrt{2gH}$

L'urto di m_1 con m_2 avviene sotto l'azione di forze non impulsive (molla) quindi nell'urto si conserva la quantità di moto totale del sistema m_1, m_2. Inoltre per l'ipotesi di anelasticità dell'urto dovrà essere $v_1' = v_2' = v'$, velocità di m_1 e di m_2 dopo l'urto.

$\vec{p} = m_1 v_1 \hat{u}_x$ (q.tà di moto prima dell'urto)

$\vec{p}' = (m_1 + m_2) v' u_x = 3 m_1 v' \hat{u}_x$

(q.tà di moto appena dopo l'urto)

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

$$\vec{p}\,' = \vec{p} \Rightarrow v' = \frac{1}{3} v_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2gH}$$

Dopo l'urto il sistema m_1, m_2 possiede energia cinetica

$$E_c' = \frac{1}{2}(3m_1) v'^2 = \frac{1}{3} m_1 g H$$

e tale energia coincide con l'energia meccanica E' del sistema poiché inizialmente la molla è a riposo (energia potenziale elastica nulla), quindi

$$E' = E_c' = \frac{1}{3} m_1 g H$$

Quando la molla giunge alla massima compressione, allora la velocità di m_1, m_2 sarà nulla e l'energia del sistema sarà data dalla sola energia potenziale elastica della molla:

$$E'' = E_p'' = \frac{1}{2} K (\Delta L)^2$$

con ΔL massima compressione della molla.

Poiché la compressione della molla avviene sotto l'azione di sole forze conservative (Forza elastica) l'energia meccanica del sistema si conserva e abbiamo

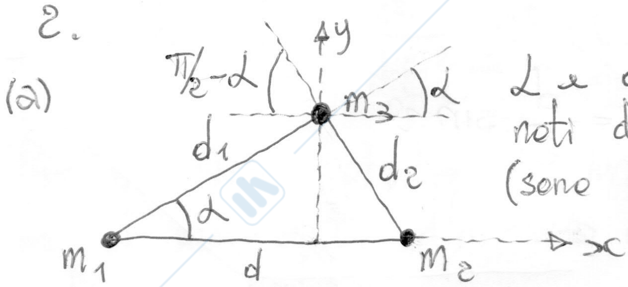
$$E' = E'' \Rightarrow \frac{1}{3} m_1 g H = \frac{1}{2} K (\Delta L)^2$$

$$\Rightarrow \Delta L = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{m_1 g}{K} H} = 0.1 \text{ m}$$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

2.

(a)



α e d parametri noti del triangolo (sono dati del problema)

$$d_1 = d\cos\alpha$$
$$d_2 = d\sin\alpha$$

$$F_{31,x} = -G\frac{m_1 m_3}{d_1^2}\cos\alpha = -G\frac{m_1 m_3}{d^2\cos\alpha}$$

$$F_{32,x} = G\frac{m_2 m_3}{d_2^2}\underbrace{\cos(\pi/2-\alpha)}_{\sin(\alpha)} = G\frac{m_2 m_3}{d^2\sin\alpha}$$

Equilibrio lungo direzione x (risultante lungo x nulla):

$$F_{31,x} + F_{32,x} = 0$$

$$\frac{m_1}{\cos\alpha} = \frac{m_2}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = tg(\alpha)$$

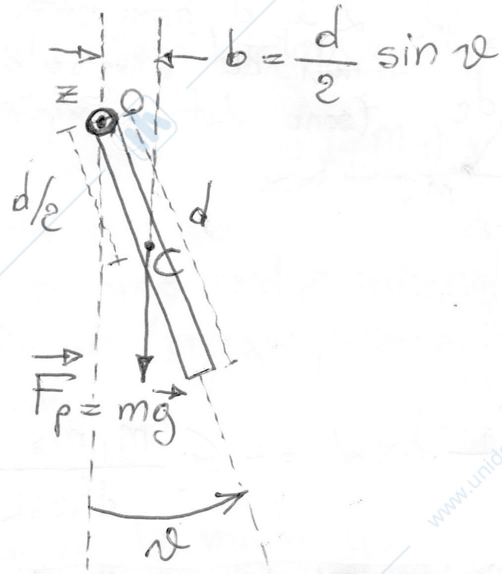
(b)

$$E_p = -G\frac{m_1 m_3}{d_1} - G\frac{m_2 m_3}{d_2} =$$

$$= -\frac{G m_1 m_3}{d}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{tg\alpha}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= -2 m_1 m_3 G / d\cos\alpha$$

3.



Sull'asta agisce un momento risultante dovuto alla forza peso (applicata nel centro di massa C dell'asta) pari a

$$\vec{\tau}_0 = \vec{OC} \times \vec{F}_p = -\frac{1}{2} d\, mg \sin\vartheta\, \hat{u}_z$$

Sappiamo inoltre che per un corpo rigido di momento d'inerzia I, la seconda equazione cardinale della dinamica diventa:

$$\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = I_0 \vec{\alpha}$$

(nell'ipotesi che il corpo rigido ruoti intorno ad un asse fisso z passante per il polo O).

essendo $\vec{\mathcal{L}} = \frac{d^2}{dt^2} \vartheta(t)\, \hat{u}_z$.

Per un'asta sottile di lunghezza d e massa m, il momento d'inerzia rispetto ad un estremo vale:

$$I_o = \int_0^d \underbrace{\frac{m}{\cancel{S} d} r^2 \cancel{S} dr}_{dm(r)} = $$ (r coordinata assiale dell'asta e S sezione dell'asta)

$$= \frac{1}{3} m d^2$$

Otteniamo quindi l'equazione del moto oscillatorio dell'asta:

$$\vec{\tau}_o = \frac{1}{3} m d^2 \vec{\mathcal{L}}$$

$$-\frac{1}{2} \cancel{m} g \cancel{d} \sin\vartheta = \frac{1}{3} \cancel{m} d^{\cancel{2}} \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

Ipotesi di piccole oscillazioni: $\sin\vartheta \simeq \vartheta$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \underbrace{\frac{3}{2}\frac{g}{d}}_{\omega^2} \vartheta = 0$$

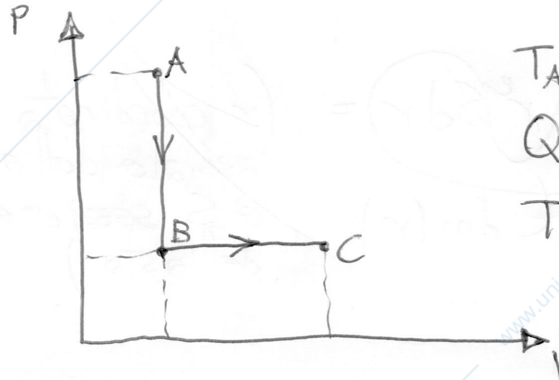
equazione di un moto armonico di $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{d}}$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Il periodo della oscillazione sarà quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2d}{3g}}$$

4.



$T_A = 2T_B$

$Q = Q_{AB} + Q_{BC} = 0$

$T_C = ?$

(a)

$$Q = n c_V (T_B - T_A) + n c_p (T_C - T_B) = 0$$

$c_V = \frac{3}{2}R$ (gas ideale mono atomico)

$c_p = c_V + R = \frac{5}{2}R$ (relazione di Mayer)

$n = 1$ mol

$$-\frac{3}{2}\frac{1}{2}T_A + \frac{5}{2}T_C - \frac{5}{2}\frac{1}{2}T_A = 0$$

$$\frac{5}{2}T_C = 2T_A \Rightarrow T_C = \frac{4}{5}T_A$$

(b) Dipende, infatti l'adiabatica $C \rightarrow A$ porterebbe alla realizzazione di un ciclo TD in cui il calore scambiato sarebbe pari a zero, cosa che unitamente al primo principio della TD implicherebbe che sia $\mathcal{L} = 0$, quindi $\mathcal{L}_{BC} = -\mathcal{L}_{CA}$.
Tale risultato è impossibile solo per trasf. adiab. reversibile ma non è detto che sia impossibile con trasf. adiab. irreversibile.

Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

5.

Siano A e B gli stati termodinamici di equilibrio rispettivamente iniziale e finale per la trasformazione adiab. irreversibile considerata. A e B apparterranno rispettivamente alle isoterme a temperatura T_A e T_B.

Diciamo B' lo stato termodinamico di equilibrio finale della trasformazione adiabatica reversibile in esame.

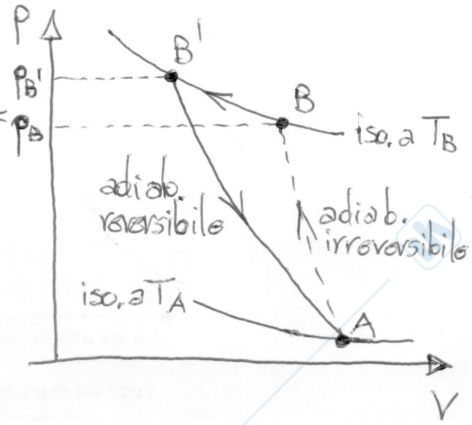
Per ipotesi sarà $T_{B'} = T_B$.

Si chiede se p_B è $>, <$ o $=$ a $p_{B'}$.

Poiché l'adiabatica $A \to B'$ è reversibile, possiamo considerare l'adiabatica $B' \to A$, che insieme alla adiabatica irreversibile $A \to B$ e alla isoterma reversibile $B \to B'$ forma un ciclo termodinamico irreversibile (vedi Figura).

Per tale ciclo la disuguaglianza di Clausius fornisce.

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$$



$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \underbrace{\cancel{\int_A^B \frac{\delta Q}{T}}}_{0 \text{ (adiab.)}} + \int_B^{B'} \frac{\delta Q}{T} + \underbrace{\cancel{\int_{B'}^A \frac{\delta Q}{T}}}_{0 \text{ (adiab.)}} =$$

$$= \int_B^{B'} \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_B}^{V_B'} \frac{nR\cancel{T}\,dV}{\cancel{T}V} = nR\ln\left(\frac{V_B'}{V_B}\right) =$$

$$= nR\ln\left(\frac{p_B}{p_{B'}}\right) < 0 \quad \text{sse} \quad p_B < p_{B'}$$

Concludiamo che la pressione finale del gas al termine della adiabatica irreversibile è minore di quella che si otterrebbe con una abiabatica reversibile (tra le stesse temperature estreme).

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- ***FIRMARE*** *l'elaborato,*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*