

1.2 Moto del punto materiale

1.2.2 Scomposizione dell'accelerazione in componenti ortogonali

Possiamo scomporre l'accelerazione in componenti cartesiane:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{u}_z$$

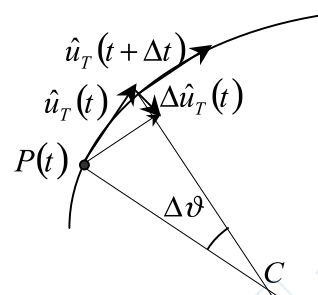
Un'altra utile scomposizione dell'accelerazione è quella in componenti *tangenziale* e *normale*. Vedremo che essa sarà alla base della comprensione del moto circolare.

In base alla proprietà descritta nella osservazione 3, abbiamo:

$$\vec{v}(t) = v(t)\hat{u}_T(t) \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(v\hat{u}_T) = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

Ricordando che **la derivata di un versore è sempre ortogonale al versore stesso**, osserviamo che abbiamo scomposto l'accelerazione vettoriale in una componente tangente ed una normale alla traiettoria:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N, \quad \vec{a}_T \equiv \frac{dv}{dt}\hat{u}_T, \quad \vec{a}_N \equiv v\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$



La componente normale può essere meglio esplicitata come segue.

Consideriamo la situazione schematizzata nella figura a lato, in cui la derivata del versore tangente è diretta verso la concavità della traiettoria (per la medesima traiettoria esiste un solo altro caso possibile, in cui tale derivata ha la stessa direzione ma verso opposto...). Se indichiamo con C il punto di incontro delle rette ortogonali al versore tangente nei due punti successivi $P(t)$ e $P(t + \Delta t)$, avremo che per $\Delta t \rightarrow 0$ l'angolo in C tende a zero, e C diviene il centro di un cerchio che approssima molto bene la traiettoria nell'intorno della posizione P considerata.

Tale cerchio è detto *cerchio osculatore alla traiettoria in P* , e distanza $\rho \equiv \overline{CP}$ prende il nome di *raggio di curvatura* della traiettoria nel punto P .

Sfruttando queste definizioni e le proprietà di similitudine tra i due triangoli rettangoli in figura (il maggiore di cateti $\overline{CP} = \rho$ e $|d\vec{r}| = |ds|$, ed il minore di cateti $|\hat{u}_T|$ e $|d\hat{u}_T|$) possiamo scrivere:

$$|ds| = \rho \cdot |d\vartheta| \quad \text{e} \quad |d\hat{u}_T| = |\hat{u}_T| \cdot |d\vartheta|, \quad \text{da cui} \quad |d\hat{u}_T| = |d\vartheta| = \frac{|ds|}{\rho} \Rightarrow \left| \frac{d\hat{u}_T}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right| \frac{1}{\rho} = \frac{|v|}{\rho}$$

Considerando anche direzione e verso della derivata del versore tangente avremo:

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{v}{\rho} \hat{u}_N,$$

dove il versore \hat{u}_N è normale ad \hat{u}_T ed è sempre diretto verso l'interno della traiettoria per definizione. Dunque il verso di $d\hat{u}_T/dt$ è determinato dal segno di v : se v è positivo $d\hat{u}_T/dt$ punta verso l'interno della traiettoria, mentre se v è negativo $d\hat{u}_T/dt$ punta verso l'esterno.

Per determinare \vec{a}_N basta ora moltiplicare $d\hat{u}_T/dt$ per v e quindi \vec{a}_N punterà in ogni caso verso l'interno della traiettoria (più precisamente verso il centro del cerchio osculatore).

In definitiva, l'accelerazione vettoriale istantanea può essere scritta come:

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N \quad ; \quad \vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T \quad ; \quad \vec{a}_N = \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N$$

Oss.1 Significato della scomposizione in componenti tangenziale e normale

La componente tangente dell'accelerazione rende conto della variazione del *modulo* della velocità, mentre la componente normale dipende dalla variazione in *direzione* della velocità vettoriale.

Oss.2 Alcuni importanti tipi di moto

Due casi particolari di moto si ottengono per:

- a) $\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \vec{a}_N = 0$ moto rettilineo
 b) $v = \text{cost.} \Rightarrow \vec{a}_T = 0$ moto uniforme

1.2.3 Il moto piano in coordinate polariLe coordinate polari nel piano

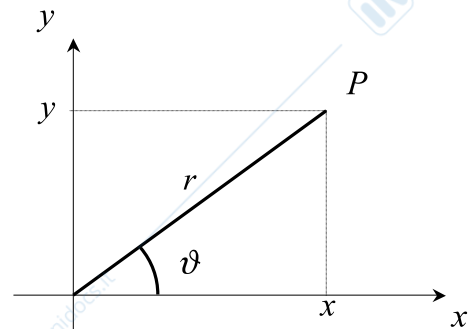
Se il *moto* avviene in un *piano*, le sole coordinate cartesiane x ed y sono sufficienti a descriverlo. In alternativa, possiamo utilizzare le coordinate polari nel piano, che talora risultano assai più convenienti delle cartesiane. Le coordinate polari del piano sono così definite:

$r \equiv |\vec{r}| = \overline{OP}$ raggio vettore (distanza di P dall'origine, numero reale positivo)

$\vartheta \equiv \sphericalangle(\vec{r}, \hat{u}_x)$ anomalia (angolo formato da $\vec{r} = \overline{OP}$ con \hat{u}_x , definito tra 0 e 2π)

Legame con le coordinate cartesiane:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \vartheta &= \arctan(y/x) \\ x &= r \cos \vartheta \\ y &= r \sin \vartheta \end{aligned}$$

Legge oraria in coordinate polari del piano

Si può scrivere con la coppia di equazioni

$$\begin{cases} r = r(t) \\ \vartheta = \vartheta(t) \end{cases} \quad \text{in alternativa alla coppia} \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Traiettoria

Si può scrivere come

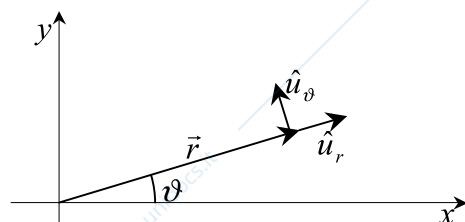
$$\vartheta = \vartheta(r) \quad \text{oppure come} \quad r = r(\vartheta)$$

Versori

Si definisce una coppia di versori:

$$\hat{u}_r \equiv \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{versore radiale}$$

$$\hat{u}_\vartheta \equiv \hat{u}_z \times \hat{u}_r \quad \text{versore trasversale}$$



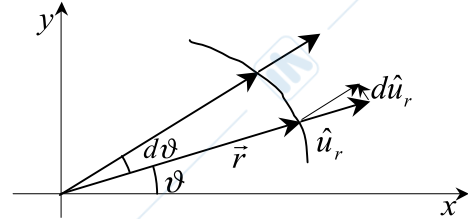
Nota bene: i versori \hat{u}_r ed \hat{u}_ϑ variano con il punto P , al contrario di \hat{u}_x ed \hat{u}_y . Non vanno confusi con la coppia \hat{u}_N ed \hat{u}_T , che è riferita alla traiettoria e non al sistema di riferimento scelto.

Velocità vettoriale in coordinate polari e Velocità angolare

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{u}_r) = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt}$$

Ma:

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{|\hat{u}_r|d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta = \omega\hat{u}_\vartheta = \omega\hat{u}_z \times \hat{u}_r = \vec{\omega} \times \hat{u}_r$$



Nei passaggi precedenti abbiamo definito una nuova importante grandezza:

Def. Velocità angolare

Vettore definito dalla relazione $\vec{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_z$, ove ϑ rappresenta l'anomalia del punto materiale in un sistema di coordinate polari (r, ϑ) nel piano (eventualmente locale) del moto, ed \hat{u}_z è il versore dell'asse ortogonale al piano stesso ($\hat{u}_z = \hat{u}_r \times \hat{u}_\vartheta$).

Per quanto detto, la velocità vettoriale istantanea può scomporsi come segue:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\vartheta$$

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r \quad \text{velocità radiale}$$

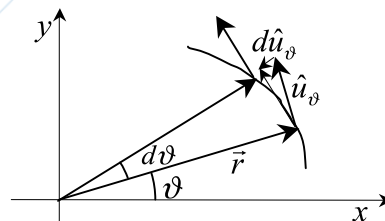
$$\vec{v}_\vartheta = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \hat{u}_\vartheta \quad \text{velocità trasversale}$$

Accelerazione vettoriale in coordinate polari (argomento facoltativo)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\hat{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{u}_\vartheta + r\frac{d\vartheta}{dt}\frac{d\hat{u}_\vartheta}{dt}, \text{ con}$$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta \quad (\text{vedi sopra})$$

$$\frac{d\hat{u}_\vartheta}{dt} = -\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_r \quad (\text{vedi figura})$$



$$\text{e quindi: } \vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2}\hat{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta + \frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_\vartheta + r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\hat{u}_\vartheta + r\frac{d\vartheta}{dt}\left(-\frac{d\vartheta}{dt}\right)\hat{u}_r$$

In definitiva:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left[r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\right]\hat{u}_\vartheta = \vec{a}_r + \vec{a}_\vartheta$$

Vedremo che in un generico moto nel piano, il momento angolare rispetto all'origine del SdR è:

$$\vec{L}_O \triangleq \vec{r} \times \vec{p} = mr^2 \frac{d\vartheta}{dt} \hat{u}_z = L_O \hat{u}_z.$$

Dunque si osserva come risulti il componente trasversale dell'accelerazione

$$\vec{a}_\vartheta \triangleq \left(r \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} \right) \hat{u}_\vartheta = \frac{1}{mr} \frac{dL_O}{dt} \hat{u}_\vartheta.$$

Ne consegue che se il momento angolare è una costante del moto (come ad esempio certamente accade nel caso in cui la risultante delle forze agenti sia di tipo centrale), allora l'accelerazione trasversale si annulla (come deve essere se la risultante delle forze è puramente radiale).