



8/7/2011
ore 16:30

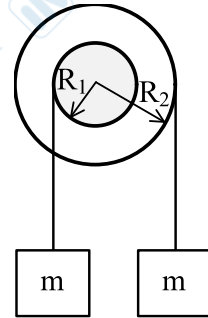
FISICA (seconda verifica in itinere)

Proff. Ciucci, Della Valle, Magni, Nisoli, Torricelli

1)

a) Si definisca il momento d'inerzia.

b) Una carrucola è costituita da due dischi di raggi R_1 ed R_2 fissati ad uno stesso asse orizzontale. Sui due dischi sono avvolte due funi ideali le cui estremità sono fissate a due corpi di massa m . Trascurando ogni forma di attrito, si calcoli l'accelerazione angolare della carrucola e la tensione delle due funi. Si consideri noto il momento di inerzia I della carrucola rispetto all'asse di rotazione.



2)

a) Si enunci e si dimostri il principio di Archimede.

b) Una sfera cava (raggio interno R_I , raggio esterno R_E) galleggia, rimanendo immersa per metà del suo volume, in un liquido con densità ρ . Si determini la densità del materiale di cui è costituita la sfera.

3)

a) Si definisca il lavoro termodinamico.

b) Un cilindro adiabatico, chiuso da un pistone di peso trascurabile che può scorrere senza attrito, contiene un gas ideale biatomico. Inizialmente il gas è a temperatura $T_i = 350$ K ed il sistema è in equilibrio con la pressione esterna. Molto rapidamente la pressione esterna viene raddoppiata ed il sistema raggiunge un nuovo stato di equilibrio. Si calcoli la temperatura finale del gas T_f .

4)

a) Si enunci il teorema (disuguaglianza) di Clausius

b) Si dimostri che l'entropia è una funzione di stato.

Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA ,
- **FIRMARE** l'elaborato,
- **MOTIVARE** e **COMMENTARE** adeguatamente le formule utilizzate.

1.a

Per una distribuzione discreta di masse (puntiformi) definiamo momento d'inerzia (del sistema di punti materiali) rispetto all'asse A (Fisso):

$$I_A = \sum_{i=1}^N m_i d_i^2$$

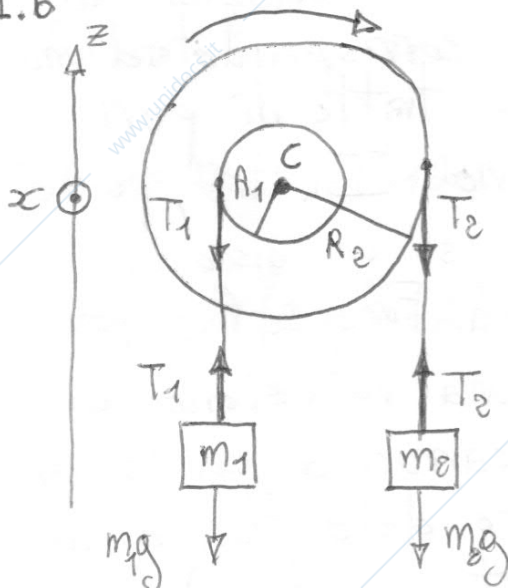
essendo m_i l' i -esima massa puntiforme (massa dell' i -esimo punto materiale) e d_i la sua distanza dall'asse A.

Nel caso di una distribuzione continua di massa (corpi non puntiformi) la precedente definizione si generalizza come segue:

$$I_A = \int_V dm(\vec{r}) d^2(\vec{r}) = \int \rho(\vec{r}) d^2(\vec{r}) dV$$

essendo $\rho(\vec{r})$ la densità (locale) nell'interno di volume infinitesimo dV della posizione \vec{r} e $d(\vec{r})$ la distanza di tale interno dall'asse A.

1.b



Assumiamo positive le rotazioni nel verso indicato dalla freccia. Questo significa che, prese un'asse verticale z come in figura, le accelerazioni delle due masse saranno rispettivamente

$$\vec{a}_1 = a_1 \hat{u}_z, \quad \vec{a}_2 = -a_2 \hat{u}_z$$

con $a_1, a_2 > 0$

Il sistema è costituito di tre corpi: le due masse m_1 e m_2 , assunte punti materiali, che possono compiere solo moti traslazionali in direzione verticale z ; la carrucola,

①

Corpo rigido, che, essendo vincolata nel suo baricentro, C , può compiere solo rotazioni intorno all'asse baricentrico ortogonale al piano delle due masse (piano del disegno).

Equazioni del moto:

$$\begin{aligned}
 m_1: T_1 \hat{u}_z - m_1 g \hat{u}_z &= m_1 a_1 \hat{u}_z \\
 m_2: T_2 \hat{u}_z - m_2 g \hat{u}_z &= -m_2 a_2 \hat{u}_z \\
 \text{carr: } T_2 R_2 - T_1 R_1 &= I \alpha \\
 m_1 = m_2 &= m
 \end{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} \text{I eq. cardinale} \\ \text{o II principio della} \\ \text{dinamica p.to materiale} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{II eq. cardinale della} \\ \text{dinamica per il corpo} \\ \text{rigido} \end{array} \right.$$

$$T_1 - mg = ma_1$$

$$T_2 - mg = -ma_2$$

$$T_2 R_2 - T_1 R_1 = I \alpha$$

3 equazioni in 5 incognite
 $T_1, T_2, a_1, a_2, \alpha$

Vincoli cinematici:

Poiché le funi sono inestensibili, una traslazione di un tratto dz delle due masse corrisponde ad uno svolgimento/avvolgimento di un tratto di pari lunghezza per la rispettiva fune. Inoltre, poiché ciascuna fune si avvolge/svolge su un disco di diverso raggio, R_1 per la prima fune e R_2 per la seconda, è chiaro che ad una rotazione di un angolo $d\varphi$ da parte della carrucola corrisponde un avvolgimento/svolgimento delle funi di un tratto $R_1 d\varphi$ ed $R_2 d\varphi$ rispettivamente. Ricorrendo le due osservazioni precedenti troviamo quindi:

$$dz_1 = R_1 d\varphi, \quad dz_2 = -R_2 d\varphi$$

Derivando due volte rispetto al tempo e ricordando che $a_1 = d^2 z_1 / dt^2$, $a_2 = -d^2 z_2 / dt^2$, $\alpha = d^2 \theta / dt^2$ si trovano i vincoli cinematici:

$$a_1 = R_1 \alpha, \quad a_2 = R_2 \alpha$$

Il precedente sistema di equazioni diviene quindi

$$\begin{cases} T_1 - mg = m R_1 \alpha \\ T_2 - mg = -m R_2 \alpha \\ T_2 R_2 - T_1 R_1 = I \alpha \end{cases} \quad \begin{array}{l} 3 \text{ equazioni in } 3 \text{ incognite} \\ T_1, T_2, \alpha \end{array}$$

Esprimendo T_1 e T_2 dalle prime due equazioni in funzione di α e sostituendo nella terza equazione troviamo:

$$m(g - R_2 \alpha) R_2 - m(g + R_1 \alpha) R_1 = I \alpha$$

$$\text{da cui } \alpha = \frac{mg(R_2 - R_1)}{I + m(R_1^2 + R_2^2)}$$

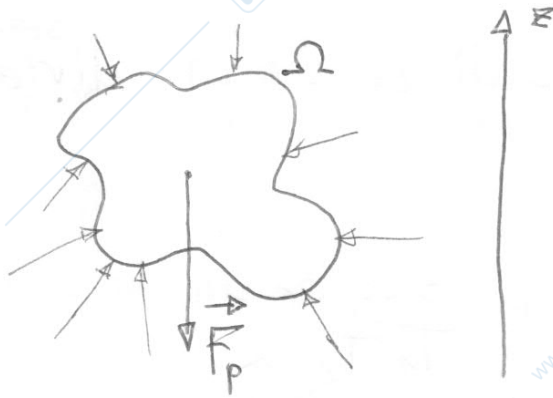
Risostituito nelle prime due fornisce:

$$T_1 = m(g + R_1 \alpha) = \left(\frac{I + m R_1 R_2 + m R_2^2}{I + m R_1^2 + m R_2^2} \right) mg$$

$$T_2 = m(g - R_2 \alpha) = \left(\frac{I + m R_1 R_2 + m R_1^2}{I + m R_1^2 + m R_2^2} \right) mg$$

e.a

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del volume di fluido



Consideriamo un fluido in equilibrio statico nel campo di gravità terrestre. Prendi una porzione di tale fluido delimitata da una superficie Ω , tale porzione sarà in equilibrio anch'essa sotto l'azione della risultante di tutte le forze esterne applicate. Tali forze sono:

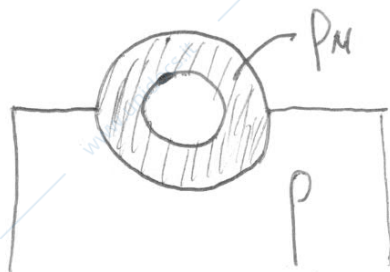
- i) la forza peso $\vec{F}_p = -\rho V g \hat{u}_z$
- ii) le forze di pressione dovute al resto del fluido di risultante \vec{F}_A .

Sarà dunque $\vec{F}_p + \vec{F}_A = 0 \Rightarrow \vec{F}_A = \rho V g \hat{u}_z$

La risultante delle forze di pressione ha modulo pari al peso del volume di fluido in Ω , direzione verticale e verso verso l'alto.

Quindi se un corpo solido occupasse il volume racchiuso in Ω , poiché nulla cambierebbe per quanto riguarda il fluido esterno ad Ω , tale corpo riceverebbe una spinta idrostatica $F_A = \rho V g \hat{u}_z$ C.V.D.

e.b



$$\vec{F}_p = -\rho_M \overbrace{\frac{4}{3}\pi(R_E^3 - R_I^3)}^{\text{Volume corpo solido}} g \hat{u}_z$$

$$\vec{F}_A = \rho \underbrace{\frac{1}{2} \frac{4}{3}\pi R_E^3}_{\text{Volume fluido spostato}} g \hat{u}_z$$

④

$$\vec{F}_P + \vec{F}_A = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho R_E^3 = \rho_M (R_E^3 - R_I^3)$$

$$\rho_M = \frac{1}{2} \frac{R_E^3}{R_E^3 - R_I^3} \rho$$

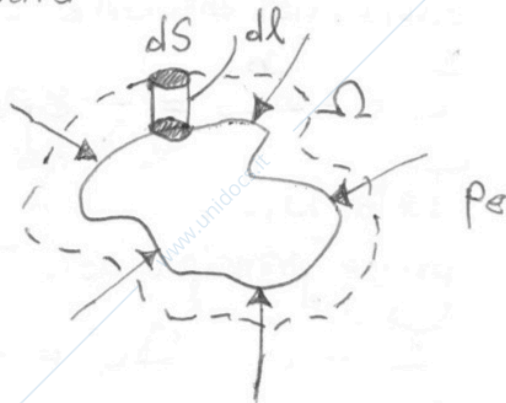
3.2

Il lavoro termodinamico corrisponde al lavoro meccanico relativo agli spostamenti coerenti delle parti microscopiche costituenti il sistema.

Tali spostamenti danno origine ad una variazione del volume del sistema stesso attraverso uno spostamento della sua frontiera.

Se rappresentiamo le forze agenti sul sistema attraverso la pressione esercitata dall'ambiente esterno sulla frontiera Ω del sistema stesso (ipotesi di sistema idrostatico), il lavoro subito dal sistema sarà

$$\begin{aligned} \delta L_e &= \int_{\Omega} p_e dS dl = \\ &= -p_e dV \\ \text{essendo } dV &\triangleq - \int_{\Omega} dS dl \end{aligned}$$



Il lavoro compiuto dal sistema sarà dunque $\delta L = -\delta L_e$, quindi $\delta L = p_e dV$.

In una trasformazione quasi-statica dovrà inoltre essere $p_e dS - p dS = 0$, indicando con p la pressione interna, del sistema. Abbiamo perciò per una trasformazione quasi-statica di un sistema idrostatico:

$$\delta L = p dV$$

3.6

$$p_i = p_e$$

$$T_i = 350 \text{ K}$$

$$V_i = n R T_i / p_e$$

$$p_f = \varepsilon p_e$$

$$T_f = ?$$

$$V_f = n R T_f / \varepsilon p_e$$

La trasformazione è irreversibile poiché non quasi-statica (in un tempo molto breve si dice, la pressione esterna raddoppia, quindi il sistema non può essere in equilibrio durante la trasformazione, se non nello stato finale), quindi il lavoro compiuto dal sistema è determinabile dal lavoro dell'ambiente esterno:

$$L = -L_e = -\varepsilon p_e (V_i - V_f) = \varepsilon p_e (V_f - V_i) \quad (1)$$

Tale lavoro può anche essere determinato dal primo principio della Termodinamica:

$$L = Q - \Delta U = -\Delta U \quad (Q=0, \text{trasm. adiabatica})$$

Poiché U è funzione di stato e per un gas ideale vale $dU = n c_v dT$, con $c_v = \frac{5}{2} R$ per gas perfetto biatomico, abbiamo

$$L = -n \frac{5}{2} R (T_f - T_i) \quad (2)$$

Riunendo le due equazioni (1) e (2) abbiamo

$$\varepsilon p_e (V_f - V_i) = n \frac{5}{2} R (T_i - T_f)$$

$$\varepsilon p_e \left(\frac{n R T_f}{\varepsilon p_e} - \frac{n R T_i}{\varepsilon p_e} \right) = n \frac{5}{2} R (T_i - T_f)$$

⑥

Troviamo infine

$$T_F - 2T_i = \frac{5}{2} T_i - \frac{5}{2} T_F$$

$$\text{da cui } \frac{7}{2} T_F = \frac{9}{2} T_i \Rightarrow T_F = \frac{9}{7} T_i = 450 \text{ K}$$

4.a

In una trasformazione ciclica di un sistema termodinamico, la somma dei rapporti tra le quantità di calore scambiate con le sorgenti e le temperature delle sorgenti stesse è minore o uguale a zero, valendo la uguaglianza per trasformazioni cicliche reversibili:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

4.b

Consideriamo due stati di equilibrio termodinamico A e B di un sistema termodinamico, e consideriamo due trasformazioni reversibili qualsiasi da A a B, Γ_1 e Γ_2 .



Poiché Γ_2 è reversibile esiste la trasf. inversa Γ_2 che porta B in A ripercorrendo a ritroso gli stati intermedi occupati nella trasf. diretta.

La trasformazione $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è dunque una trasformazione ciclica reversibile. Applicando ad

(7)

essa la disuguaglianza di Clausius troviamo:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Il primo membro è però scomponibile come segue:

$$\begin{aligned} \oint \frac{\delta Q}{T} &= \int_{A, \Pi_1}^B \frac{\delta Q}{T} + \int_{B, \Pi_2^{-1}}^A \frac{\delta Q}{T} = \\ &= \int_{A, \Pi_1}^B \frac{\delta Q}{T} - \int_{A, \Pi_2}^B \frac{\delta Q}{T} \end{aligned}$$

Troviamo quindi

$$\int_{A, \Pi_1}^B \frac{\delta Q}{T} = \int_{A, \Pi_2}^B \frac{\delta Q}{T}$$

Per la arbitrarietà delle trasformazioni reversibili Π_1 e Π_2 concludiamo che

$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{REV}$ non dipende dalla trasformazione

reversibile considerata, ma solo dagli estremi A e B. Tale integrale quindi deve corrispondere alla variazione di una funzione di stato, detta entropia:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{REV}$$