

CINEMATICA BIDIMENSIONALE

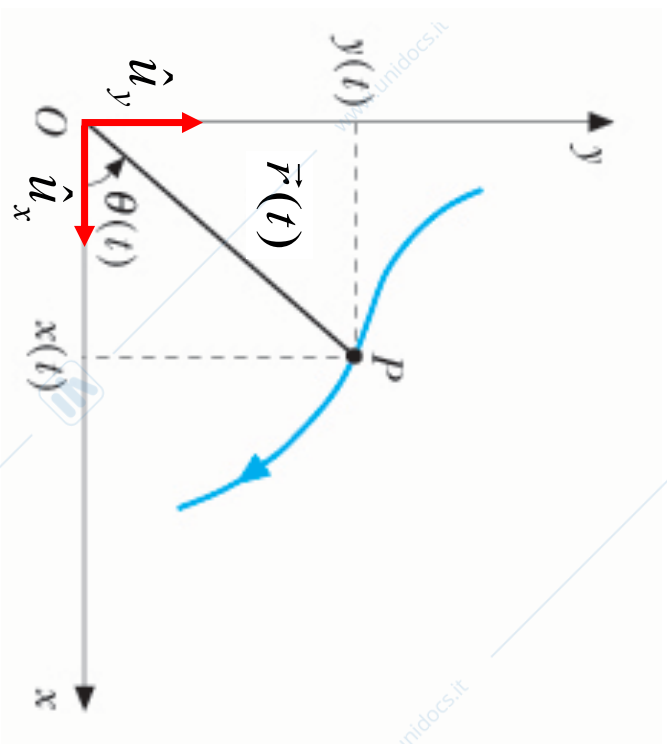
Moto nel piano: vettore posizione $\vec{r}(t)$

In coordinate cartesiane

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$$

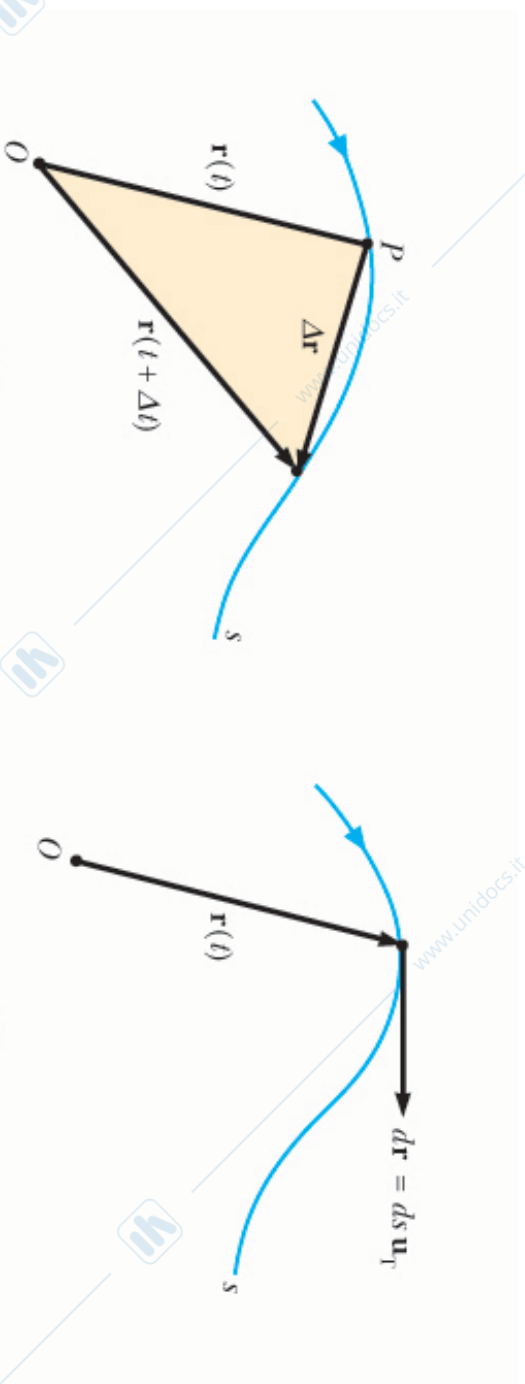
$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$



Moto nel piano: vettore velocità $\vec{v}(t)$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



Per $\Delta t \rightarrow 0$ $d\vec{r}$ diventa tangente alla traiettoria e in modulo diventa pari allo spostamento infinitesimo ds lungo la traiettoria: $d\vec{r} = ds \cdot \hat{u}_T$

dove \hat{u}_T è il versore tangente alla traiettoria

Moto nel piano: vettore velocità $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{ds(t) \cdot \hat{u}_T}{dt} = \frac{ds(t)}{dt} \hat{u}_T = v(t) \cdot \hat{u}_T$$

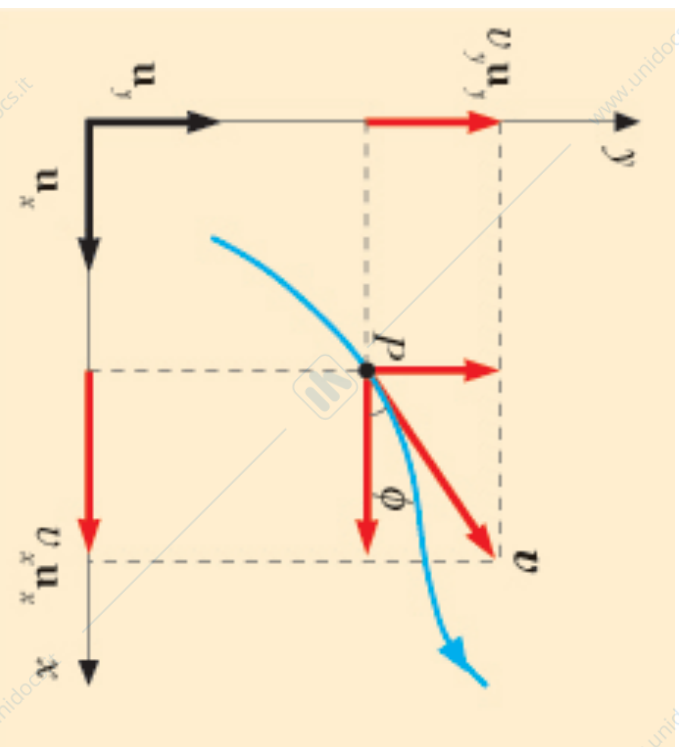


Il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria e individua con la sua direzione e il suo verso la direzione e il verso del moto e con il suo modulo la velocità istantanea con cui è percorsa la traiettoria.

Moto nel piano: vettore velocità $\vec{v}(t)$

Se $\vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$ \Downarrow

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\hat{u}_y = v_x(t)\hat{u}_x + v_y(t)\hat{u}_y$$



$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2}$$

$$\operatorname{tg}\phi = \left| \frac{v_y}{v_x} \right|$$

Moto nel piano: vettore accelerazione $\vec{a}(t)$

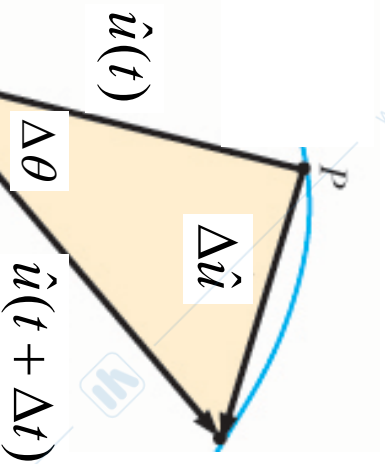
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\text{Se } \vec{v}(t) = v(t) \cdot \hat{u}_T \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v(t) \cdot \hat{u}_T)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + v(t) \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

Moto nel piano: vettore accelerazione $\vec{a}(t)$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\text{Se } \vec{v}(t) = v(t) \cdot \hat{u}_T \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v(t) \cdot \hat{u}_T)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + v(t) \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{u}(t + \Delta t) - \hat{u}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{u}}{\Delta t} = \frac{d\hat{u}}{dt}$$

Essendo \hat{u} un versore di modulo unitario \rightarrow la curva blu è un tratto di circonferenza

$d\hat{u}$ è tangente alla circonferenza $\rightarrow d\hat{u}$ è perpendicolare a $\hat{u}(t)$

$d\hat{u} = ds \cdot \hat{u}_N$ dove \hat{u}_N è un versore perpendicolare a $\hat{u}(t)$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{ds \cdot \hat{u}_N}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_N = \frac{|d\vartheta|}{dt} \hat{u}_N = \frac{d\vartheta}{dt} \hat{u}_N$$

La derivata di un versore $\hat{u}(t)$ è un vettore perpendicolare al versore stesso, di modulo $d\vartheta/dt$, dove $d\vartheta$ è lo spostamento angolare di $\hat{u}(t)$ nel tempo dt

Moto nel piano: vettore accelerazione $\vec{a}(t)$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\text{Se } \vec{v}(t) = v(t) \cdot \hat{u}_T \Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v(t) \cdot \hat{u}_T)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + v(t) \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

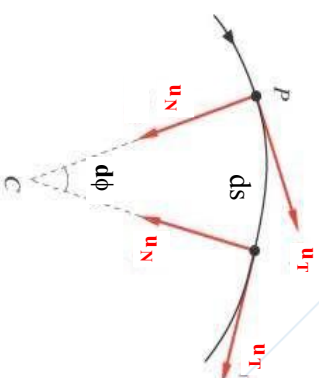
$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + v(t) \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_N$$

componente parallela a v che esprime la variazione del modulo della velocità: *accelerazione tangenziale*

componente ortogonale a v che esprime la variazione della direzione della velocità. $d\phi/dt$ dice quanto rapidamente varia la direzione di \mathbf{u}_T : *accelerazione normale o centripeta*

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + v(t) \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_N$$

Si consideri la figura. Per $dt \rightarrow 0$, le rette normali alla traiettoria in due punti molto vicini tra di loro, si incontrano nel punto C, che coincide con il centro della circonferenza tangente alla traiettoria nel punto P



- C: centro di curvatura
- CP = R: raggio di curvatura della traiettoria nel punto P

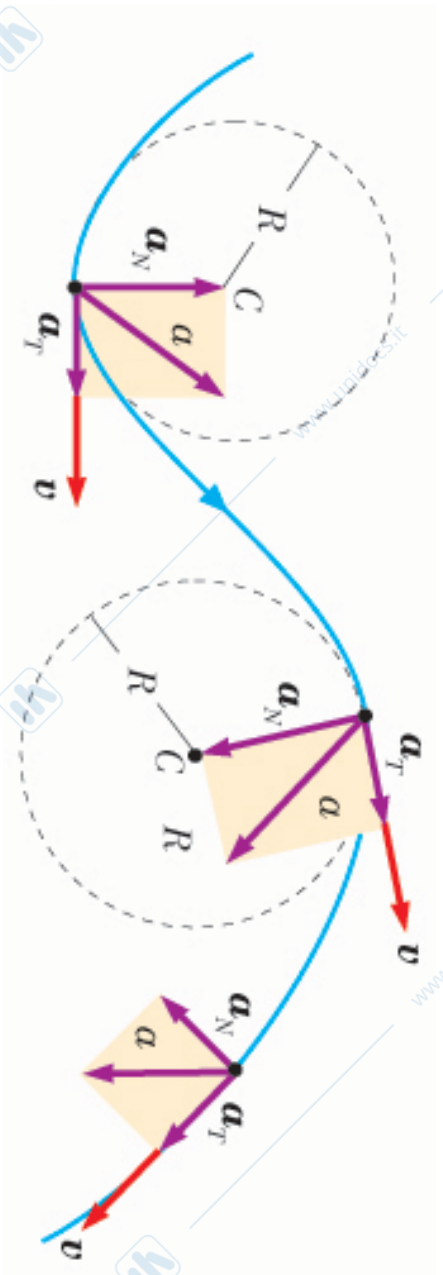
Al variare della posizione di P sulla traiettoria, varia R, che diviene infinito nei tratti rettilinei.

$$ds = R d\phi \Rightarrow d\phi/ds = 1/R$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = -\frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + v(t) \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_N = \frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + v(t) \frac{v(t)}{R} \hat{u}_N = \frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + \frac{v(t)^2}{R} \hat{u}_N$$

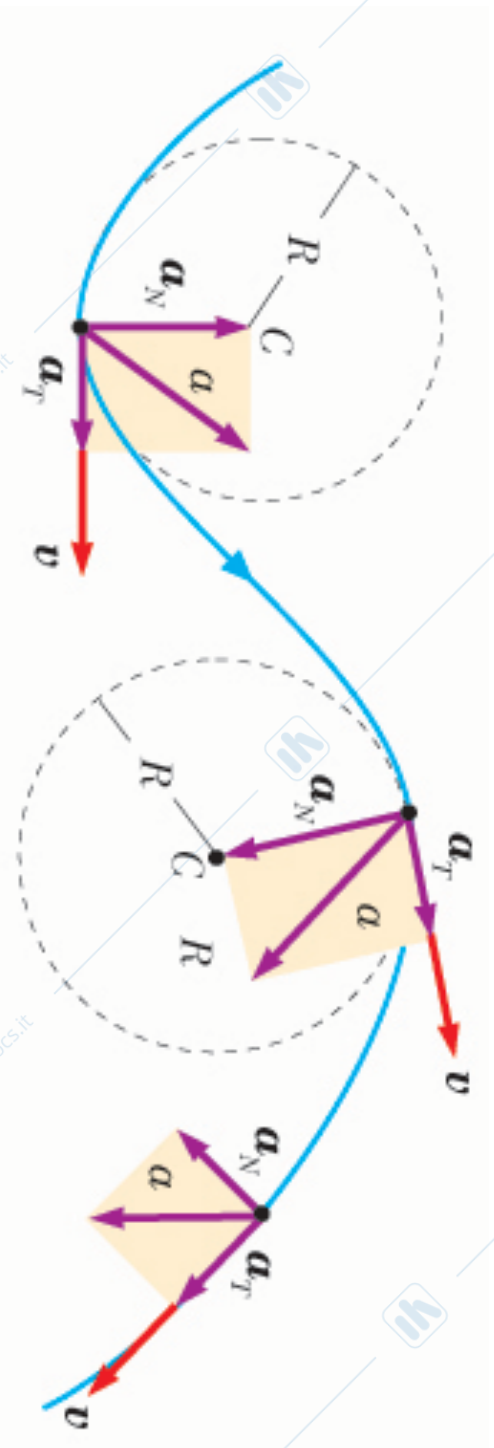
$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + \frac{v(t)^2}{R} \hat{u}_N = a_T(t) \hat{u}_T + a_N(t) \hat{u}_N = \vec{a}_T(t) + \vec{a}_N(t)$$



La prima componente dipende dalla variazione del modulo della velocità ed è parallela alla velocità e prende il nome di **accelerazione tangenziale**, la seconda componente dipende dalla variazione della direzione della velocità ed è ortogonale a questa; essa prende il nome di **accelerazione normale o centripeta**.

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + \frac{v(t)^2}{R} \hat{u}_N = \vec{a}_T(t) + \vec{a}_N(t)$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v(t)^2}{R}\right)^2}$$



Il moto nel piano: componenti dell'accelerazione nei diversi moti

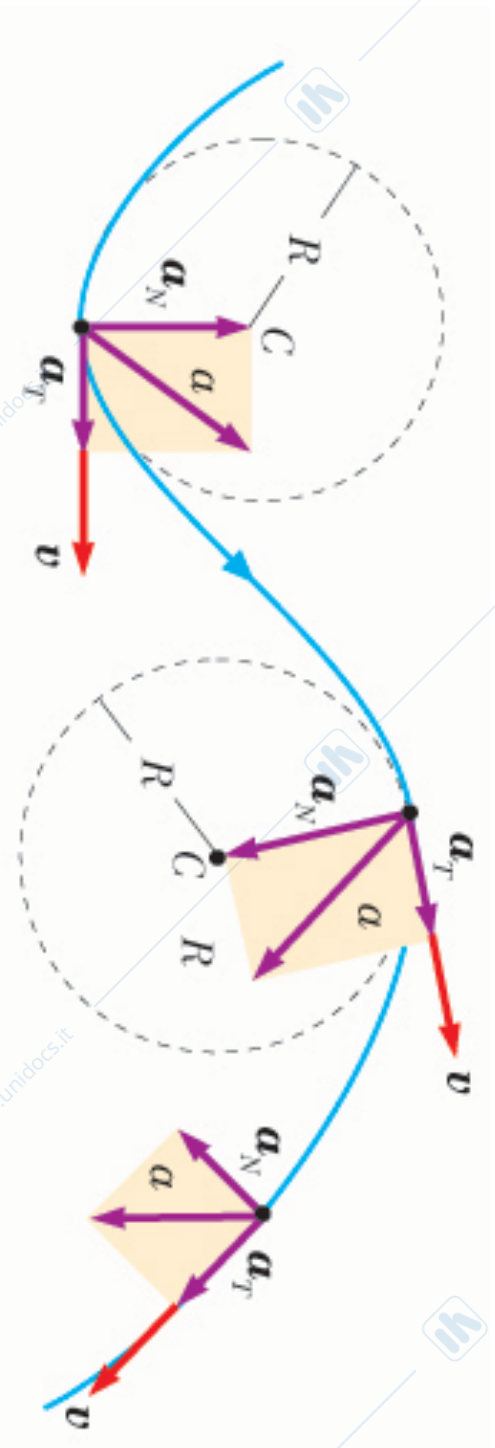
- Moto curvilineo
- Moto curvilineo uniforme
- Moto rettilineo vario
- Moto rettilineo uniforme

$$a_N \neq 0 \quad a_T \neq 0$$

$$a_N \neq 0 \quad a_T = 0$$

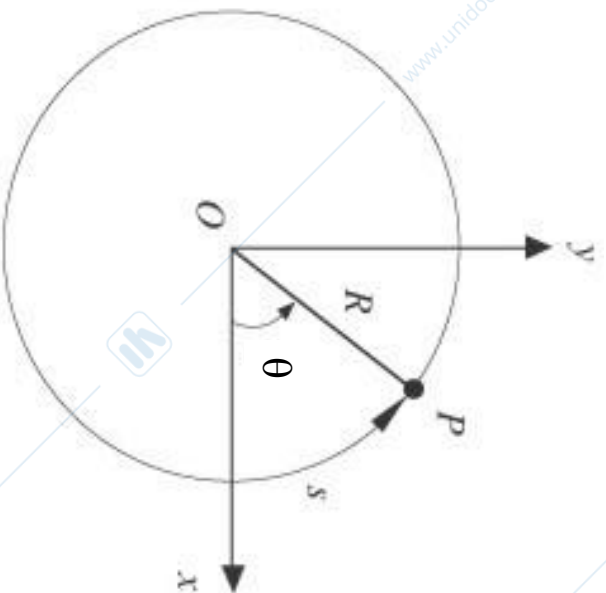
$$a_N = 0 \quad a_T \neq 0$$

$$a_N = 0 \quad a_T = 0$$



Moto nel piano: moto circolare

Moto piano la cui traiettoria è una circonferenza di raggio R .



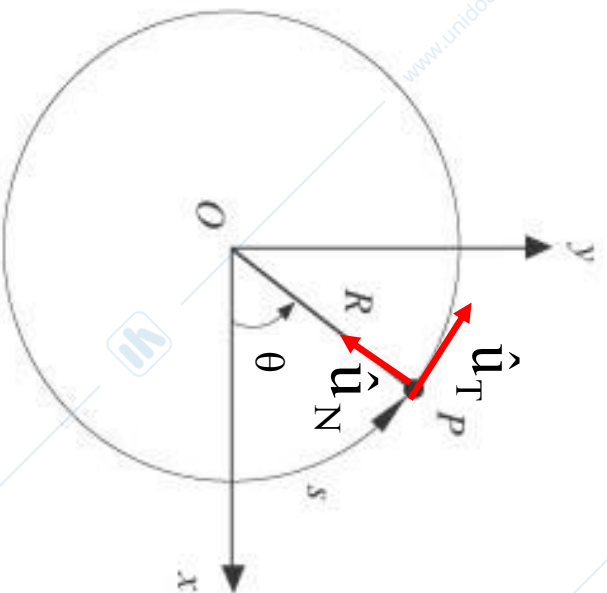
Il moto del punto materiale P lungo una circonferenza di raggio costante R può essere descritto in 2 modi:

- 1) facendo riferimento allo spazio percorso sulla circonferenza, $s(t)$
- 2) utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t)$
 $\rightarrow \theta(t) = s(t)/R$

Moto nel piano: moto circolare

1) facendo riferimento allo spazio percorso sulla circonferenza, $s(t)$.

Definiamo un versore \hat{u}_T tangente alla circonferenza e un versore \hat{u}_N normale alla circonferenza



$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{ds(t)}{dt} \hat{u}_T = v(t) \cdot \hat{u}_T$$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_T + \frac{v(t)^2}{R} \hat{u}_N = \vec{a}_T(t) + \vec{a}_N(t)$$

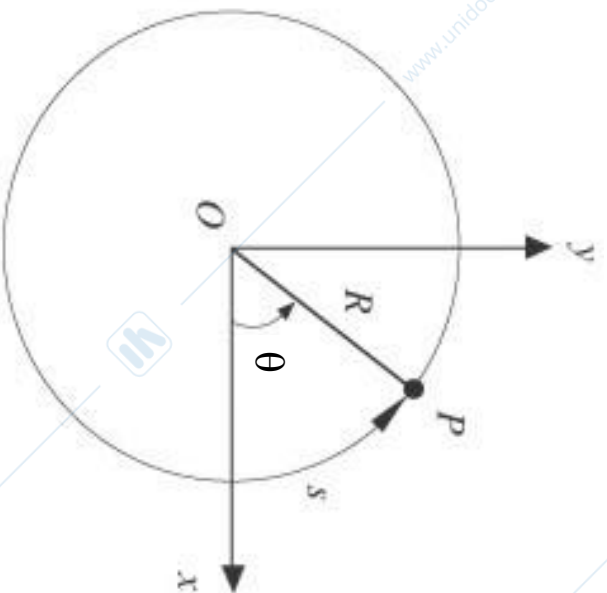
La velocità varia continuamente in direzione \Rightarrow accelerazione centripeta sempre $\neq 0$

Moto nel piano: moto circolare

2) utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t) \rightarrow \theta(t) = s(t)/R$

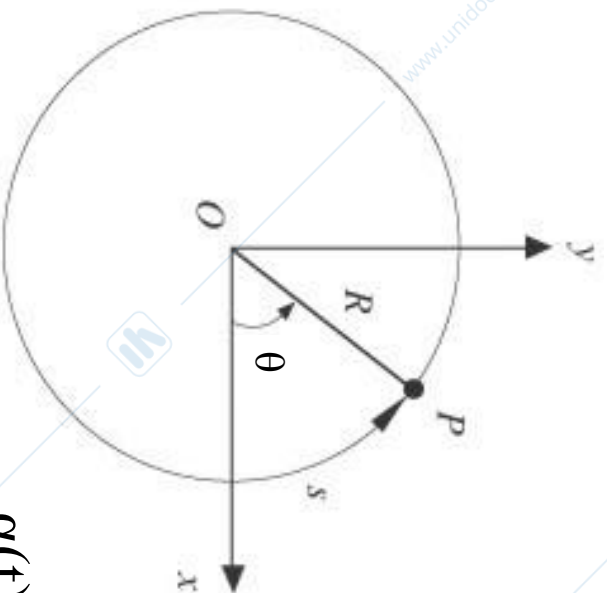
velocità angolare $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d(s(t)/R)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) \frac{d(1/R)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds(t)}{dt} = \frac{v(t)}{R}$$



Moto nel piano: moto circolare

2) utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t) \rightarrow \theta(t) = s(t)/R$



velocità angolare $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d(s(t)/R)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) \frac{d(1/R)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds(t)}{dt} = \frac{v(t)}{R}$$

accelerazione angolare $\alpha(t)$:

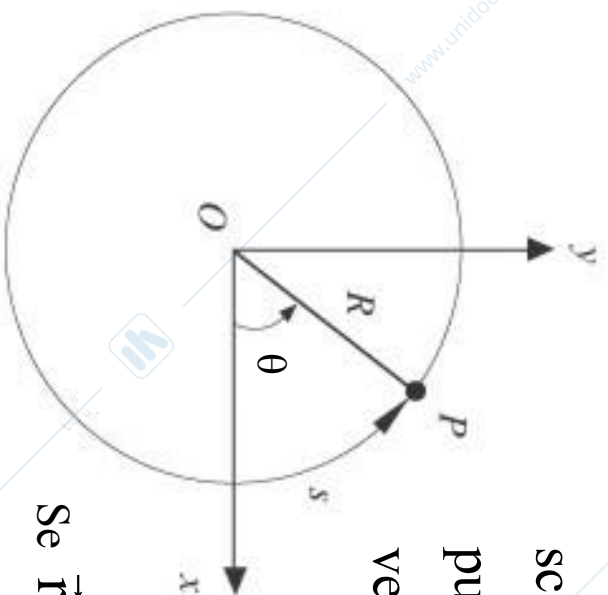
$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d(v(t)/R)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} + v(t) \frac{d(1/R)}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} = \frac{a_T(t)}{R}$$

Moto nel piano: moto circolare

2) utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t) \rightarrow \theta(t) = s(t)/R$

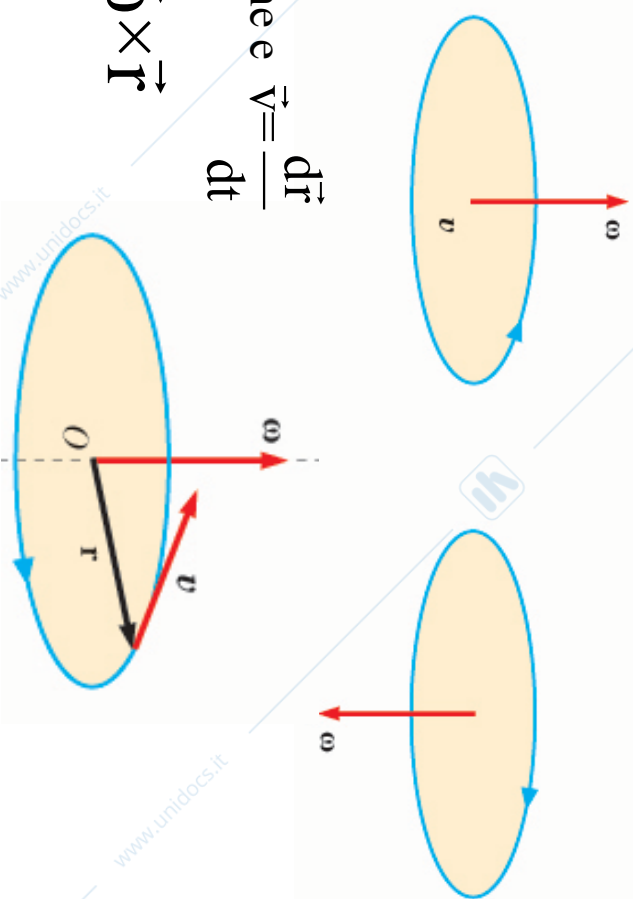
Notazione vettoriale

Si può definire la *velocità angolare* come il vettore $\vec{\omega}$ di componente scalare $d\theta/dt$, perpendicolare al piano della circonferenza percorsa dal punto P e verso tale che dalla punta del vettore $\vec{\omega}$ il moto appaia in verso antiorario.



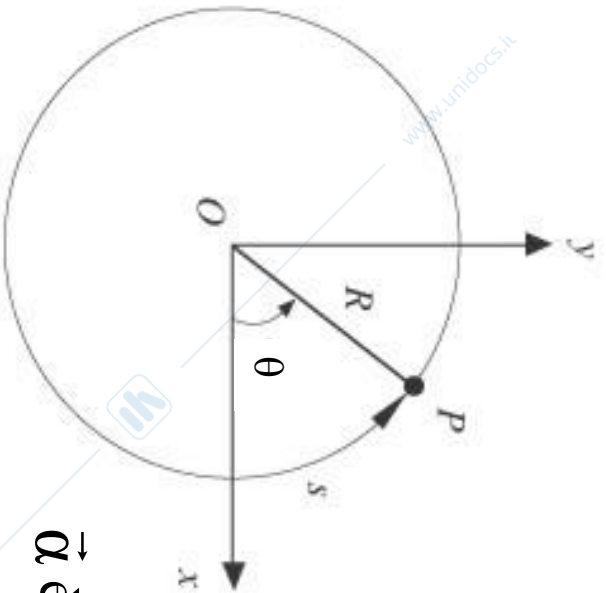
Se $\vec{r} = R\hat{u}_r$ è il vettore posizione e $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



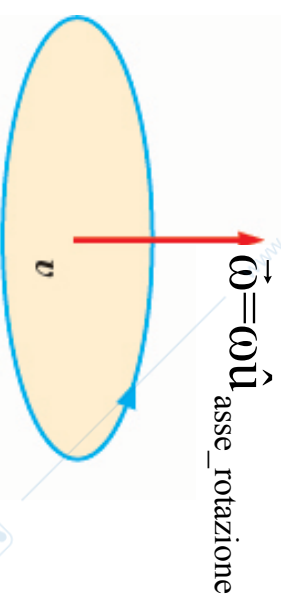
Moto nel piano: moto circolare

2) utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t) \rightarrow \theta(t) = s(t)/R$



Notazione vettoriale

Si può definire il vettore *accelerazione angolare* $\vec{\alpha}$



$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d(\omega \hat{u}_{asse_rot})}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \hat{u}_{asse_rot} + \omega \frac{d\hat{u}_{asse_rot}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \hat{u}_{asse_rot}$$

$\vec{\alpha}$ è parallelo a $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega}$ ha direzione costante) e verso determinato dalla variazione della componente scalare di $\vec{\omega}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Moto nel piano: moto circolare

2) utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t) \rightarrow \theta(t) = s(t)/R$

Caso generale:

$$\vec{\alpha}(t) = \alpha(t) \hat{n}_{\text{asse_rotazione}} \quad \vec{\omega}(t) = \omega(t) \hat{n}_{\text{asse_rotazione}}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} \rightarrow \int_0^t \alpha(t) dt = \int_{\omega(t=0)}^{\omega(t)} d\omega(t) = \omega(t) - \omega(t=0)$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \rightarrow \int_0^t \omega(t) dt = \int_{\theta(t=0)}^{\theta(t)} d\theta(t) = \theta(t) - \theta(t=0)$$

Esempio: moto circolare smorzato

Si consideri un moto circolare caratterizzato da un'accelerazione angolare $\alpha = -k\omega$.

Sia ω_0 la velocità angolare iniziale. Determinare:

- 1) la legge oraria della velocità angolare $\omega(t)$
- 2) l'angolo di arresto θ_{\max}

Esempio: moto circolare smorzato

Si consideri un moto circolare caratterizzato da un'accelerazione angolare $\alpha = -k\omega$.

Sia ω_0 la velocità angolare iniziale. Determinare:

- 1) la legge oraria della velocità angolare $\omega(t)$
- 2) l'angolo di arresto θ_{\max}

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -k\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -k dt \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega(t)} \frac{d\omega}{\omega} = \int_{t=0}^t -k dt \Rightarrow \ln \frac{\omega(t)}{\omega_0} = -kt \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 \exp(-kt)$$

\Rightarrow la velocità angolare decresce esponenzialmente nel tempo

Esempio: moto circolare smorzato

Si consideri un moto circolare caratterizzato da un'accelerazione angolare $\alpha = -k\omega$.

Sia ω_0 la velocità angolare iniziale. Determinare:

- 1) la legge oraria della velocità angolare $\omega(t)$
- 2) l'angolo di arresto θ_{\max}

Per determinare l'angolo di arresto θ_{\max} , partiamo dal fatto che per $\theta = \theta_{\max} \Rightarrow \omega = 0$ e che per $\theta = \theta_0 = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$, ossia partiamo da una velocità angolare in funzione dell'angolo $\Rightarrow \omega(\theta(t))$:

$$\alpha = \frac{d\omega(\theta(t))}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \omega = -k\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -k d\theta \Rightarrow \int_{\omega_0}^0 \frac{d\omega}{\omega} = \int_{\theta_0=0}^{\theta_{\max}} -k d\theta$$

$$\Rightarrow 0 - \omega_0 = -k\theta_{\max} \Rightarrow \theta_{\max} = \frac{\omega_0}{k}$$

Moto nel piano: moto circolare

2) utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t) \rightarrow \theta(t) = s(t)/R$

Casi particolari:

$\alpha = 0 \rightarrow$ moto circolare uniforme

$$\alpha(t) = 0 \rightarrow \omega(t) = \omega(t=0)$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \rightarrow \theta(t) = \theta(t=0) + \omega(t=0)t$$

$\alpha = \text{costante} \rightarrow$ moto circolare uniformemente accelerato (o decelerato)

$$\alpha(t) = \text{costante} = \alpha_0 \rightarrow \omega(t) = \omega(t=0) + \alpha_0 t$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \rightarrow \int_0^t (\omega(t=0) + \alpha_0 t) dt = \omega(t=0)t + \alpha_0 \frac{t^2}{2} \rightarrow \theta(t) = \theta(t=0) + \omega(t=0)t + \alpha_0 \frac{t^2}{2}$$

Esempio: moto circolare uniformemente decelerato

Un sasso è fissato all'estremo di una fune inestensibile e di peso trascurabile lunga $L = 0.7$ m, il cui secondo estremo è tenuto in mano da un ragazzo che pone in rotazione il tutto con una velocità angolare $\omega_0 = 20$ rad/s. Se il ragazzo smette di far ruotare la corda il sasso si ferma dopo un tempo $t_0 = 2$ s. Calcolare: 1) l'accelerazione angolare, supposta costante, 2) l'accelerazione tangenziale e 3) il numero di giri, n , fatti dal sasso prima di fermarsi, trascurando il peso del sasso e supponendo che la rotazione avvenga su di un piano orizzontale.

Esempio: moto circolare uniformemente decelerato

Un sasso è fissato all'estremo di una fune inestensibile e di peso trascurabile lunga $L = 0.7$ m, il cui secondo estremo è tenuto in mano da un ragazzo che pone in rotazione il tutto con una velocità angolare $\omega_0 = 20$ rad/s. Se il ragazzo smette di far ruotare la corda il sasso si ferma dopo un tempo $t_0 = 2$ s. Calcolare: 1) l'accelerazione angolare, supposta costante, 2) l'accelerazione tangenziale e 3) il numero di giri, n , fatti dal sasso prima di fermarsi, trascurando il peso del sasso e supponendo che la rotazione avvenga su di un piano orizzontale.

1) Dopo che il ragazzo smette di far ruotare la corda, il moto della fune e del sasso ad essa fissato diventa un moto circolare uniformemente decelerato.

$$\alpha(t) = \text{costante} = -|\alpha_0| \rightarrow \omega(t) = \omega(t=0) - |\alpha_0| t$$

Il segno meno sta ad indicare che si tratta di una decelerazione angolare.

Per $t = t_0 = 2$ s il sistema si ferma ($\rightarrow \omega = 0$ rad/s)

$$0 = \omega_0 - |\alpha_0| t_0 \rightarrow |\alpha_0| = \frac{\omega_0}{t_0} = 10 \text{ rad/s}^2$$

Esempio: moto circolare uniformemente decelerato

Un sasso è fissato all'estremo di una fune inestensibile e di peso trascurabile lunga $L = 0.7$ m, il cui secondo estremo è tenuto in mano da un ragazzo che pone in rotazione il tutto con una velocità angolare $\omega_0 = 20$ rad/s. Se il ragazzo smette di far ruotare la corda il sasso si ferma dopo un tempo $t_0 = 2$ s. Calcolare: 1) l'accelerazione angolare, supposta costante, 2) l'accelerazione tangenziale e 3) il numero di giri, n , fatti dal sasso prima di fermarsi, trascurando il peso del sasso e supponendo che la rotazione avvenga su di un piano orizzontale.

$$2) \quad -|\alpha_0| = \frac{a_T}{L} \rightarrow a_T = -|\alpha_0| L \rightarrow |a_T| = |\alpha_0| L = 7 \text{ m/s}^2$$

Esempio: moto circolare uniformemente decelerato

Un sasso è fissato all'estremo di una fune inestensibile e di peso trascurabile lunga $L = 0.7$ m, il cui secondo estremo è tenuto in mano da un ragazzo che pone in rotazione il tutto con una velocità angolare $\omega_0 = 20$ rad/s. Se il ragazzo smette di far ruotare la corda il sasso si ferma dopo un tempo $t_0 = 2$ s. Calcolare: 1) l'accelerazione angolare, supposta costante, 2) l'accelerazione tangenziale e 3) il numero di giri, n , fatti dal sasso prima di fermarsi, trascurando il peso del sasso e supponendo che la rotazione avvenga su di un piano orizzontale.

3) Il numero totale di giri effettuati durante la decelerazione di ottiene valutando l'angolo spazzato dalla fune prima di fermarsi e dividendo tale angolo per l'angolo giro (2π).

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \rightarrow \int_0^t (\omega_0 - |\alpha_0| t) dt = \omega_0 t - |\alpha_0| \frac{t^2}{2} \rightarrow \theta(t) - \theta(t=0) = \omega_0 t - |\alpha_0| \frac{t^2}{2}$$

$$\theta(t_0) - \theta(t=0) = \Delta\theta = \omega_0 t_0 - |\alpha_0| \frac{t_0^2}{2} = 20 \text{ rad} \quad \Rightarrow n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 3.18 \text{ giri}$$

Moto nel piano: caso generale

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} dt = d\vec{v} \Rightarrow \int_0^t \vec{a} dt = \int_{\vec{v}(t=0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t=0) \\ \Rightarrow \vec{v}(t) &= \vec{v}(t=0) + \int_0^t \vec{a} dt\end{aligned}$$

Moto nel piano: caso generale

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} dt = d\vec{v} \Rightarrow \int_0^t \vec{a} dt = \int_{\vec{v}(t=0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v} = \vec{v}(t) - \vec{v}(t=0)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t=0) + \int_0^t \vec{a} dt$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} dt = d\vec{r} \Rightarrow \int_0^t \vec{v} dt = \int_{\vec{r}(t=0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t=0)$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t=0) + \int_0^t \vec{v} dt$$

Moto nel piano: caso generale

$$\text{Se } \vec{a}(t) = a_x(t)\hat{u}_x + a_y(t)\hat{u}_y \quad \vec{v}(t) = v_x(t)\hat{u}_x + v_y(t)\hat{u}_y \quad \vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t=0) + \int_0^t \vec{a} dt$$

$$\Rightarrow \left(v_x(t)\hat{u}_x + v_y(t)\hat{u}_y \right) = \left(v_x(0)\hat{u}_x + v_y(0)\hat{u}_y \right) + \int_0^t \left(a_x(t)\hat{u}_x + a_y(t)\hat{u}_y \right) dt$$

Proiettiamo tale
relazione vettoriale
sugli assi x e y

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x(t)\hat{u}_x = v_x(0)\hat{u}_x + \int_0^t a_x(t)\hat{u}_x dt \\ v_y(t)\hat{u}_y = v_y(0)\hat{u}_y + \int_0^t a_y(t)\hat{u}_y dt \end{cases}$$

Moto nel piano: caso generale

$$\text{Se } \vec{a}(t) = a_x(t)\hat{u}_x + a_y(t)\hat{u}_y \quad \vec{v}(t) = v_x(t)\hat{u}_x + v_y(t)\hat{u}_y \quad \vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t=0) + \int_0^t \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow \left(x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y \right) = \left(x(0)\hat{u}_x + y(0)\hat{u}_y \right) + \int_0^t \left(v_x(t)\hat{u}_x + v_y(t)\hat{u}_y \right) dt$$

Proiettiamo tale
relazione vettoriale
sugli assi x e y

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t)\hat{u}_x = x(0)\hat{u}_x + \int_0^t v_x(t)\hat{u}_x dt \\ y(t)\hat{u}_y = y(0)\hat{u}_y + \int_0^t v_y(t)\hat{u}_y dt \end{array} \right.$$

Moto nel piano: caso generale

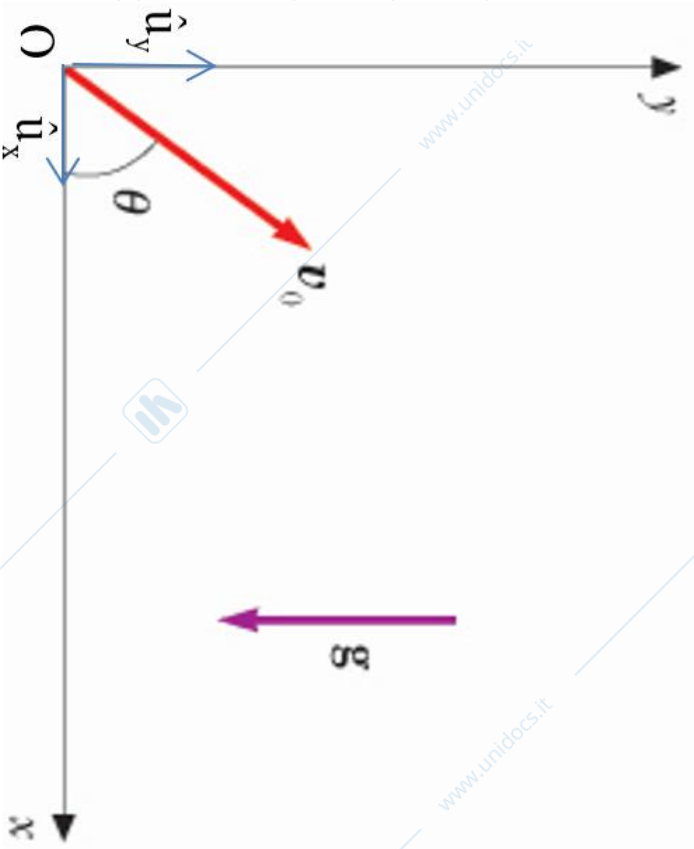
$$\text{Se } \vec{a}(t) = a_x(t)\hat{u}_x + a_y(t)\hat{u}_y \quad \vec{v}(t) = v_x(t)\hat{u}_x + v_y(t)\hat{u}_y \quad \vec{r}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t)\hat{u}_x = x(0)\hat{u}_x + \int_0^t v_x(t)\hat{u}_x dt \\ y(t)\hat{u}_y = y(0)\hat{u}_y + \int_0^t v_y(t)\hat{u}_y dt \end{cases}$$

Composizione di due moti rettilinei

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 1) moto di un corpo puntiforme P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \vec{v}_0 formante un angolo θ con l'asse delle ascisse x.



$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{u}_x + v_0 \sin \theta \hat{u}_y \quad \vec{r}_0 = 0$$

$$\vec{a} = -|g| \hat{u}_y = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^t -|g| dt \cdot \hat{u}_y = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t) \Rightarrow$$

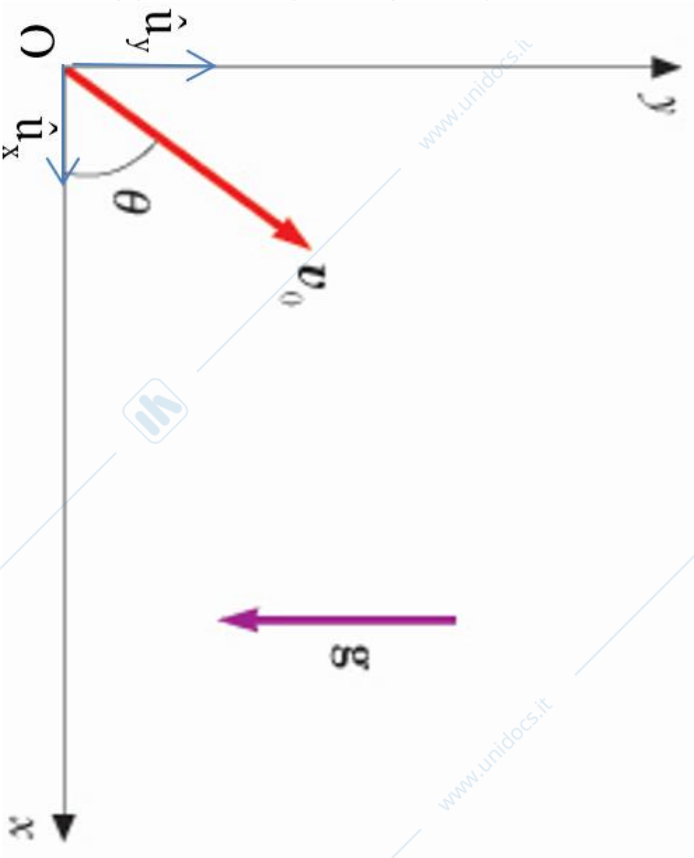
$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 - |g| t \hat{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = (v_0 \cos \theta \hat{u}_x + v_0 \sin \theta \hat{u}_y) - |g| t \hat{u}_y =$$

$$= v_0 \cos \theta \hat{u}_x + (v_0 \sin \theta - |g| t) \hat{u}_y =$$

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 1) moto di un corpo puntiforme P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \vec{v}_0 formante un angolo θ con l'asse delle ascisse x.



$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{u}_x + v_0 \sin \theta \hat{u}_y \quad \vec{r}_0 = 0$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^t \vec{v}(t) dt = \int_0^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^t (\vec{v}_0 - |g|t\hat{u}_y) dt = \int_0^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = 0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} |g| t^2 \hat{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = (v_0 \cos \theta \hat{u}_x + v_0 \sin \theta \hat{u}_y) t - \frac{1}{2} |g| t^2 \hat{u}_y = v_0 \cos \theta \cdot t \cdot \hat{u}_x + (v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} |g| t^2) \hat{u}_y$$

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 1) moto di un corpo puntiforme P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \vec{v}_0 formante un angolo θ con l'asse delle ascisse x.

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \theta \hat{u}_x + v_0 \sin \theta \hat{u}_y \quad \vec{r}_0 = 0$$

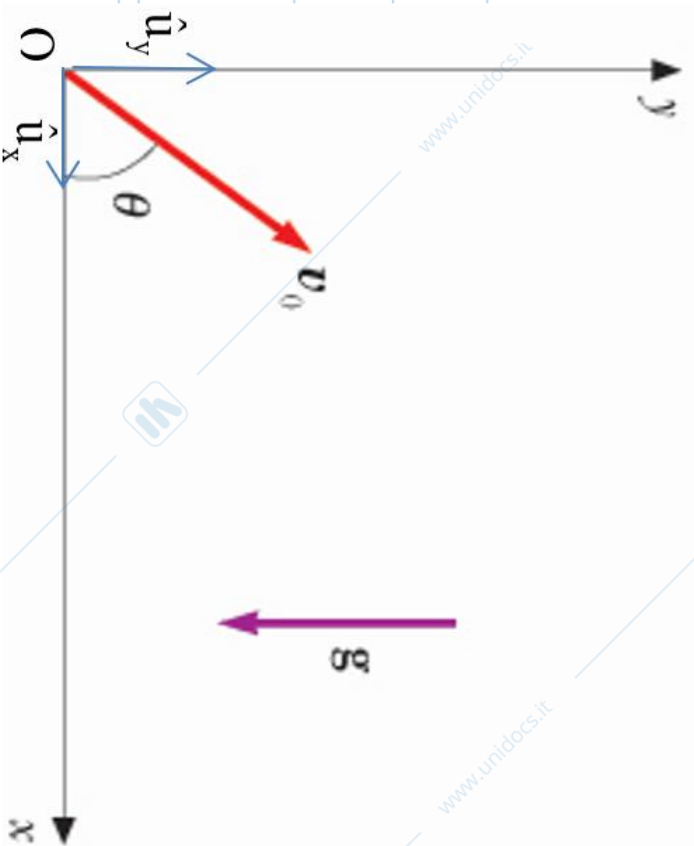
$$\vec{a} = -|g| \hat{u}_y$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos \theta \hat{u}_x + (v_0 \sin \theta - |g|t) \hat{u}_y$$

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos \theta \cdot t \cdot \hat{u}_x + (v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} |g|t^2) \hat{u}_y$$

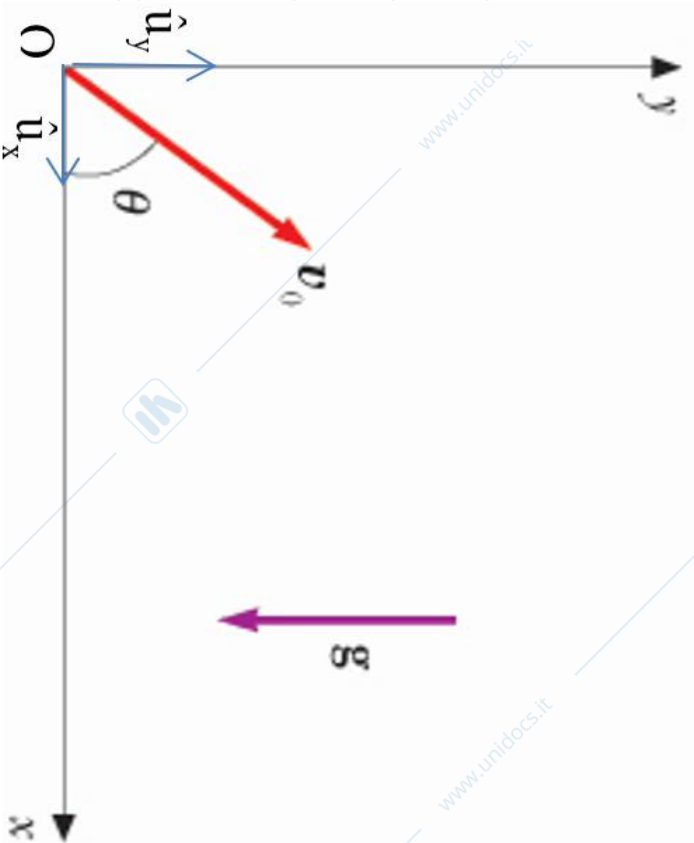


Il moto bidimensionale può essere quindi visto come la somma di due moti unidimensionali



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 1) moto di un corpo puntiforme P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \vec{v}_0 formante un angolo θ con l'asse delle ascisse x.



Moto lungo x:

$$a_x = 0$$

$$V_x = V_0 \cos \theta$$

$$x = V_0 \cos \theta \cdot t$$

\Rightarrow moto rettilineo uniforme

Moto lungo y:

$$a_y = -|g|$$

$$V_y = (V_0 \sin \theta - |g|t)$$

$$y = (V_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} |g|t^2)$$

\Rightarrow moto rettilineo uniformemente accelerato

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

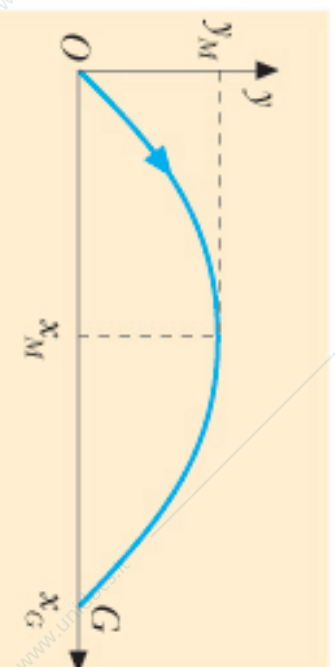
Caso 1) moto di un corpo puntiforme P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \vec{v}_0 formando un angolo θ con l'asse delle ascisse x.

Traiettoria

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

$$y = (v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} |g| t^2) \Rightarrow y(x) = \left(v_0 \sin \theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2} |g| \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \right) = x \operatorname{tg} \theta - \frac{|g|}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} x^2$$

Traiettoria parabolica con concavità verso il basso



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 1) moto di un corpo puntiforme P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \vec{v}_0 formando un angolo θ con l'asse delle ascisse x.

Gittata X_G

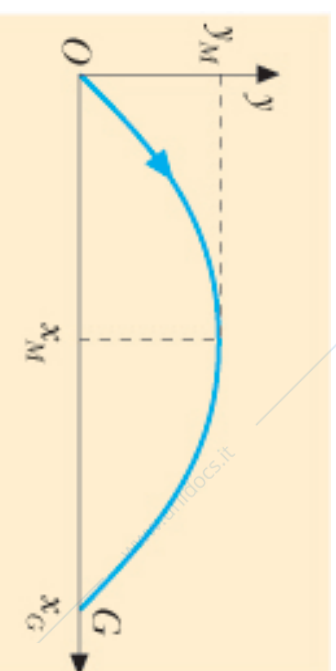
$$X_G \Rightarrow y(X_G) = 0 \Rightarrow X_G \operatorname{tg} \theta - \frac{|g|}{2v_0^2 \cos^2 \theta} X_G^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X_G = 0 \\ X_G = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta \operatorname{tg} \theta}{|g|} = \frac{2v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{|g|} \end{cases}$$

Gittata $X_{G, \text{Max}}$

$$X_{G, \text{Max}} \Rightarrow \frac{dx_G}{d\theta} = 0 \Rightarrow \frac{2v_0^2}{|g|} (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0 \Rightarrow (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0 \Rightarrow \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$X_{G, \text{Max}} = \frac{2v_0^2}{|g|} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{v_0^2}{|g|}$$



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

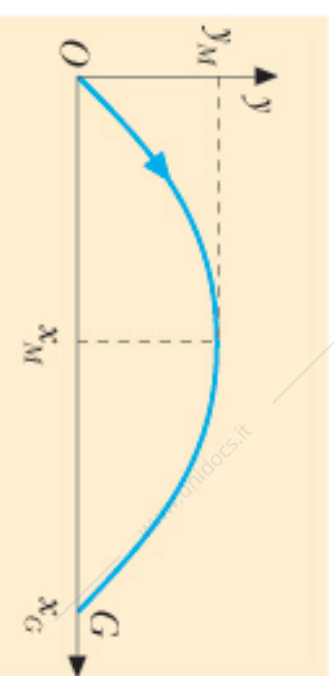
Caso 1) moto di un corpo puntiforme P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \vec{v}_0 formando un angolo θ con l'asse delle ascisse x.

Posizione orizzontale del massimo della parabola, x_M

Per simmetria della parabola: $x_M = \frac{1}{2} x_G = \frac{v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{|g|}$

Altezza massima raggiunta, y_M

$$y_M = y(x_M) = \frac{v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{|g|} \operatorname{tg} \theta - \frac{|g|}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{|g|} \right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{|g|} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{|g|} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{|g|}$$



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

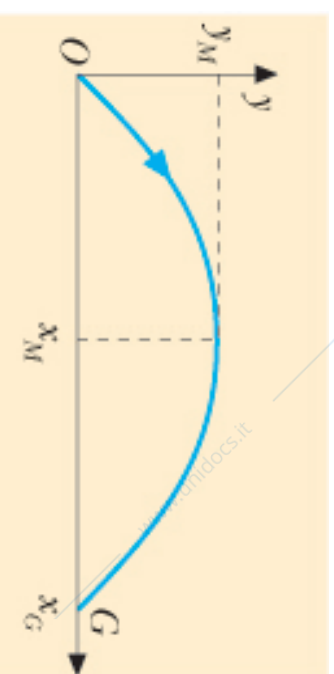
Caso 1) moto di un corpo puntiforme P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \vec{v}_0 formando un angolo θ con l'asse delle ascisse x.

Tempo totale di volo, t_G

$$t_G = t(x_G) = \frac{x_G}{v_0 \cos \theta} = \frac{2v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{v_0 \cos \theta |g|} = \frac{2v_0 \sin \theta}{|g|}$$

Tempo per raggiungere l'altezza massima, t_M

Per simmetria della parabola: $t_M = \frac{1}{2} t_G = \frac{v_0 \sin \theta}{|g|}$



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

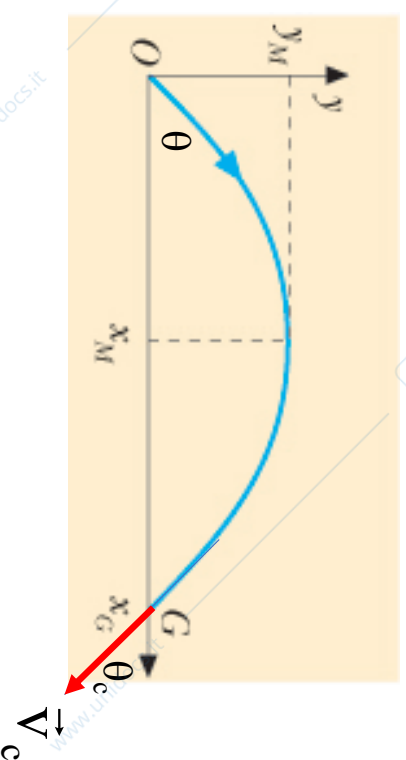
Caso 1) moto di un corpo puntiforme P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \vec{V}_0 formando un angolo θ con l'asse delle ascisse x.

Velocità di impatto al suolo, \vec{V}_c (in direzione, verso e modulo)

direzione: se indichiamo con θ_c l'angolo tra il vettore \vec{V}_c e l'asse x, per simmetria della parabola $\Rightarrow \theta_c = \theta$ = angolo di alzo iniziale $\theta \Rightarrow \vec{V}_c = V_0 \cos \theta \hat{u}_x - V_0 \sin \theta \hat{u}_y$

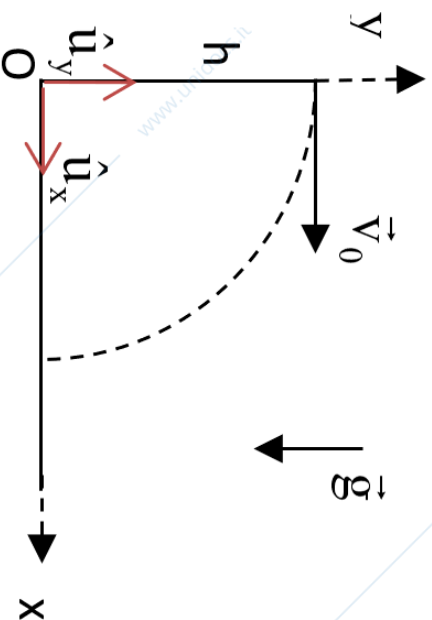
verso: verso il basso

modulo: per simmetria della parabola $|V_c| = |V_0|$



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 2) moto di un corpo puntiforme P che viene fatto cadere da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità orizzontale \vec{V}_0



$$\vec{V}_0 = v_0 \hat{u}_x$$

$$\vec{r}_0 = h \hat{u}_y$$

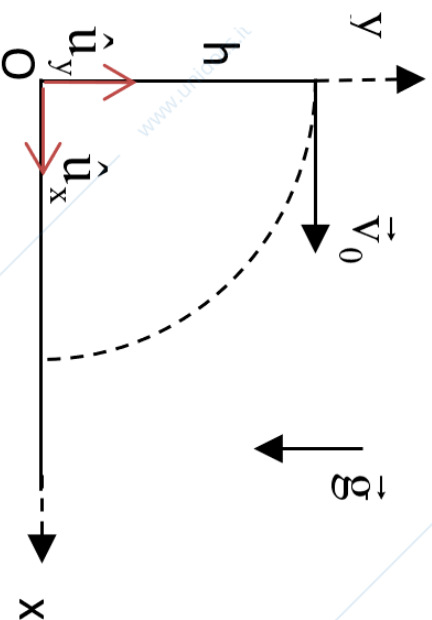
$$\vec{a} = -|g| \hat{u}_y = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^t -|g| dt \cdot \hat{u}_y = \int_{\vec{V}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{V}_0 - |g| t \hat{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = v_0 \hat{u}_x - |g| t \hat{u}_y$$

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 2) moto di un corpo puntiforme P che viene fatto cadere da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità orizzontale \vec{V}_0



$$\vec{V}_0 = v_0 \hat{u}_x$$

$$\vec{r}_0 = h \hat{u}_y$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^t \vec{v}(t) dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t)$$

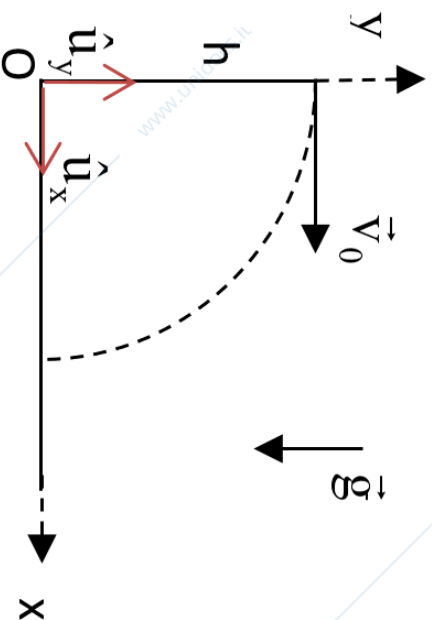
$$\Rightarrow \int_0^t (v_0 \hat{u}_x - |g|t \hat{u}_y) dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} |g| t^2 \hat{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = v_0 t \hat{u}_x + (h - \frac{1}{2} |g| t^2) \hat{u}_y$$

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 2) moto di un corpo puntiforme P che viene fatto cadere da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità orizzontale \vec{V}_0



$$\vec{V}_0 = v_0 \hat{u}_x$$

$$\vec{r}_0 = h \hat{u}_y$$

$$\vec{a} = -|g| \hat{u}_y$$

$$\vec{v}(t) = v_0 \hat{u}_x - |g| t \hat{u}_y$$

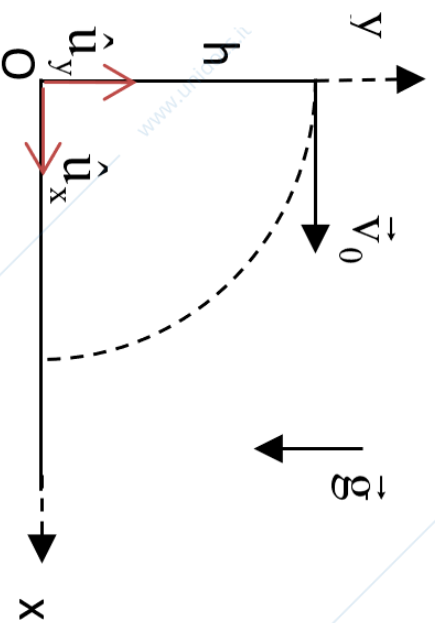
$$\vec{r}(t) = v_0 t \hat{u}_x + \left(h - \frac{1}{2} |g| t^2 \right) \hat{u}_y$$



Il moto bidimensionale può essere quindi visto come la somma di due moti unidimensionali

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 2) moto di un corpo puntiforme P che viene fatto cadere da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità orizzontale \vec{V}_0



$$\vec{V}_0 = V_0 \hat{u}_x$$

$$\vec{r}_0 = h \hat{u}_y$$

Moto lungo x:

$$a_x = 0$$

$$V_x = V_0$$

$$X = V_0 t$$

\Rightarrow moto rettilineo uniforme

Moto lungo y:

$$a_y = -|g|$$

$$V_y = -|g|t$$

$$y = \left(h - \frac{1}{2} |g| t^2 \right)$$

\Rightarrow moto rettilineo uniformemente accelerato

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

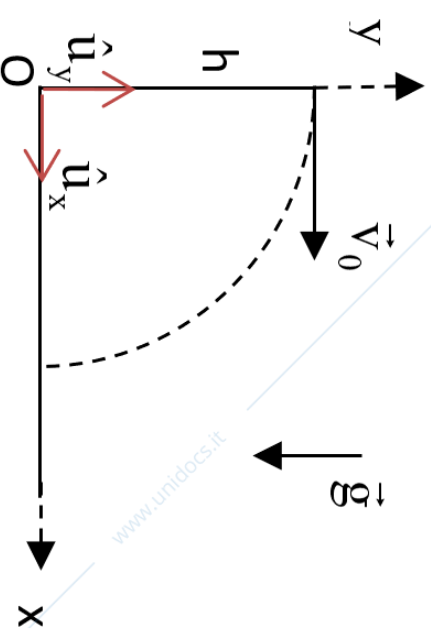
Caso 2) moto di un corpo puntiforme P che viene fatto cadere da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità orizzontale \vec{V}_0

Traiettoria

$$\begin{cases} x = v_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0} \\ y = \left(h - \frac{1}{2} |g| t^2 \right) \Rightarrow y(x) = \left(h - \frac{1}{2} |g| \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 \right) = h - \frac{|g|}{2v_0^2} x^2 \end{cases}$$

⇓

Traiettoria parabolica con concavità verso il basso



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

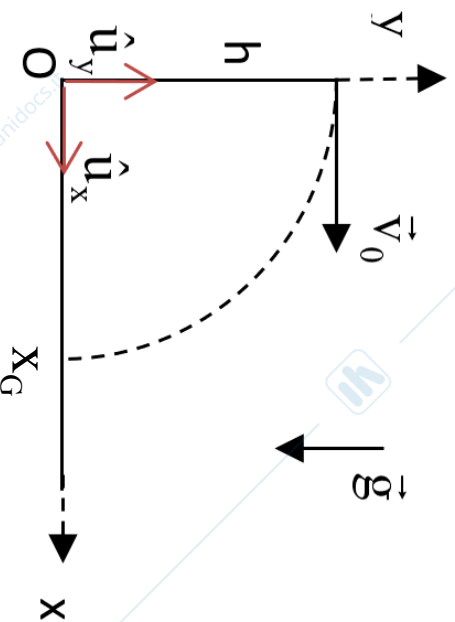
Caso 2) moto di un corpo puntiforme P che viene fatto cadere da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità orizzontale \vec{V}_0

Gittata X_G

$$X_G \Rightarrow y(X_G) = 0 \Rightarrow h - \frac{|g|}{2V_0^2} X_G^2 = 0 \Rightarrow X_G = \sqrt{\frac{2V_0^2 h}{|g|}} = V_0 \sqrt{\frac{2h}{|g|}}$$

Tempo totale di volo, t_G

$$t_G = t(X_G) = \frac{X_G}{V_0} = \sqrt{\frac{2h}{|g|}}$$



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 2) moto di un corpo puntiforme P che viene fatto cadere da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità orizzontale \vec{V}_0

Velocità di impatto al suolo, \vec{V}_c (in direzione, verso e modulo)

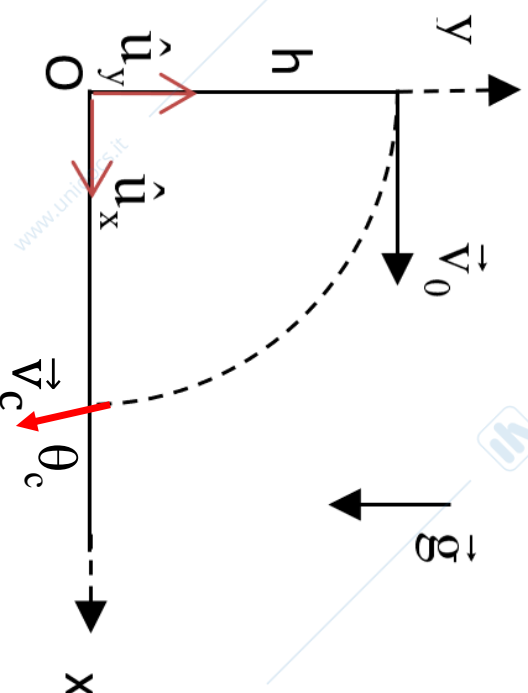
$$\vec{V}_c = v_0 \hat{u}_x - |g|t_c \hat{u}_y = v_0 \hat{u}_x - |g|t_c \hat{u}_y = v_0 \hat{u}_x - \sqrt{2h|g|} \hat{u}_y$$

direzione: se indichiamo con θ_c l'angolo tra il vettore \vec{V}_c e l'asse x

$$\Rightarrow \tan \theta_c = \frac{V_{c,y}}{V_{c,x}} = \frac{|g|t_c}{v_0} = \frac{\sqrt{2h|g|}}{v_0}$$

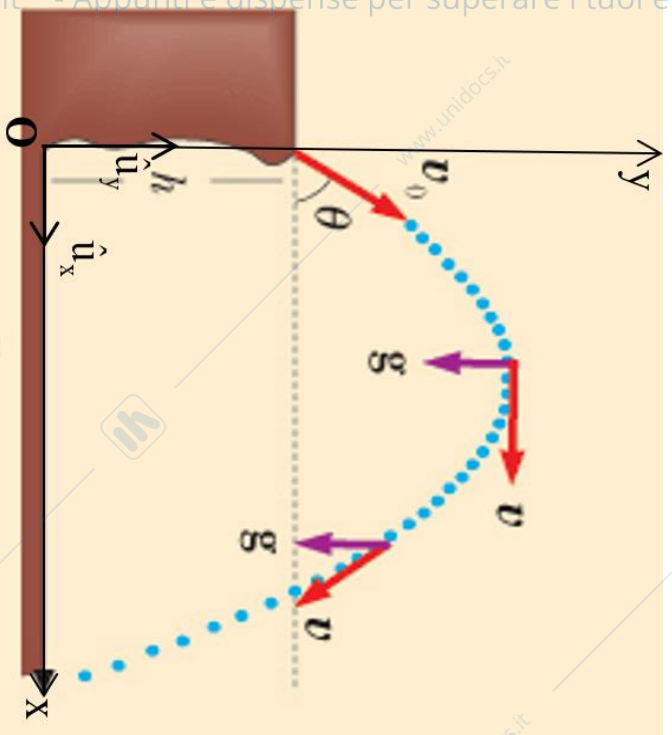
verso: verso il basso

$$\text{modulo: } v_c = \sqrt{v_0^2 + 2h|g|}$$



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 3) moto di un corpo puntiforme P che viene lanciato da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità \vec{V}_0 caratterizzata da un angolo θ .



$$\vec{V}_0 = V_0 \cos \theta \hat{u}_x + V_0 \sin \theta \hat{u}_y \quad \vec{r}_0 = h \hat{u}_y$$

$$\vec{a} = -|g| \hat{u}_y = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^t -|g| dt \cdot \hat{u}_y = \int_{\vec{V}_0}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t) \Rightarrow$$

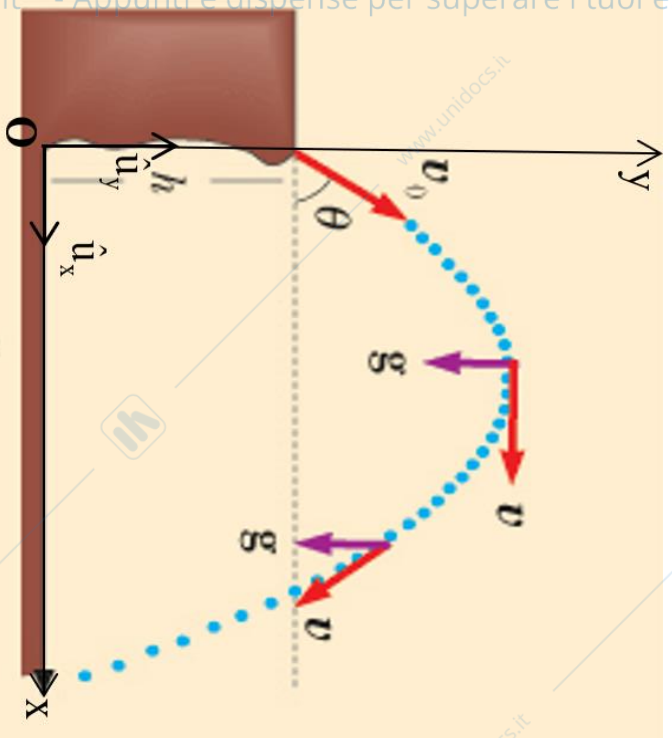
$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{V}_0 - |g| t \hat{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = (V_0 \cos \theta \hat{u}_x + V_0 \sin \theta \hat{u}_y) - |g| t \hat{u}_y =$$

$$= V_0 \cos \theta \hat{u}_x + (V_0 \sin \theta - |g| t) \hat{u}_y$$

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 3) moto di un corpo puntiforme P che viene lanciato da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità \vec{V}_0 caratterizzata da un angolo θ .



$$\vec{V}_0 = V_0 \cos \theta \hat{u}_x + V_0 \sin \theta \hat{u}_y \quad \vec{r}_0 = h \hat{u}_y$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^t \vec{v}(t) dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^t (\vec{V}_0 - |g|t\hat{u}_y) dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t) \Rightarrow$$

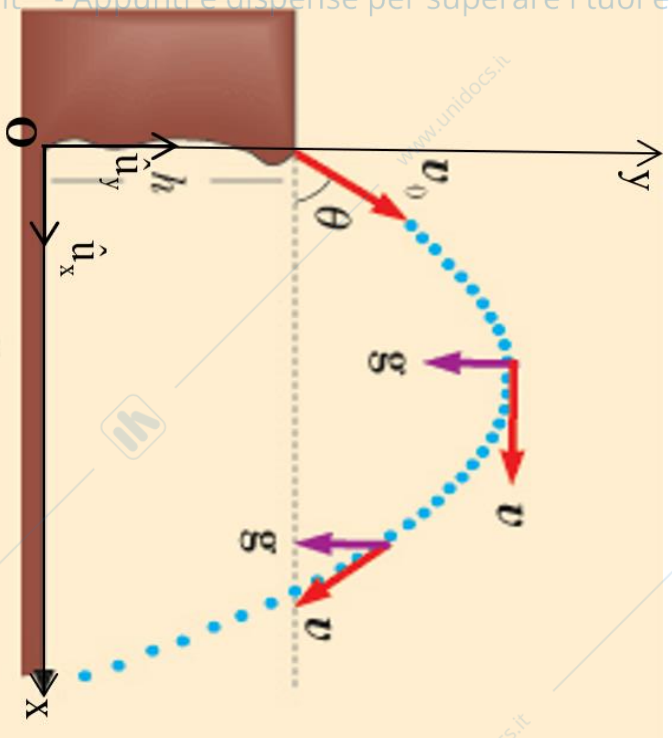
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t - \frac{1}{2} |g| t^2 \hat{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = h \hat{u}_y + (V_0 \cos \theta \hat{u}_x + V_0 \sin \theta \hat{u}_y) \cdot t - \frac{1}{2} |g| t^2 \hat{u}_y$$

$$= V_0 \cos \theta \cdot t \cdot \hat{u}_x + (h + V_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} |g| t^2) \hat{u}_y$$

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 3) moto di un corpo puntiforme P che viene lanciato da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità \vec{V}_0 caratterizzata da un angolo θ .



Moto lungo x:

$$a_x = 0$$

$$V_x = V_0 \cos \theta$$

$$X = V_0 \cos \theta \cdot t$$

\Rightarrow moto rettilineo uniforme

Moto lungo y:

$$a_y = -|g|$$

$$v_y = (V_0 \sin \theta - |g|t)$$

$$y = (h + V_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} |g|t^2)$$

\Rightarrow moto rettilineo uniformemente accelerato

Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

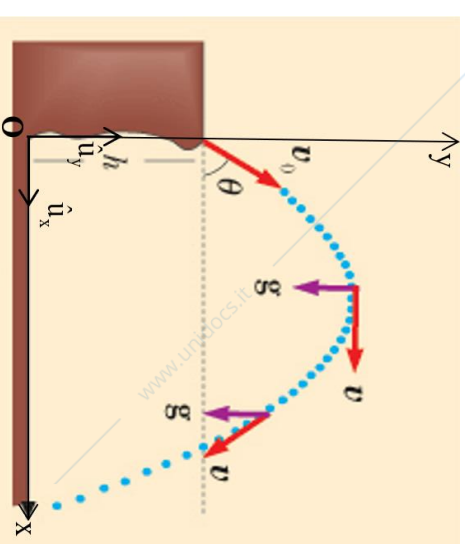
Caso 3) moto di un corpo puntiforme P che viene lanciato da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità \vec{V}_0 caratterizzata da un angolo θ .

Traiettoria

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \theta \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \theta} \\ y = (h + v_0 \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} |g| t^2) \Rightarrow y(x) = \left(h + v_0 \sin \theta \cdot \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2} |g| \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \right) = \\ = h + x \operatorname{tg} \theta - \frac{|g|}{2 v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 \end{cases}$$

⇓

Traiettoria parabolica con concavità verso il basso



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

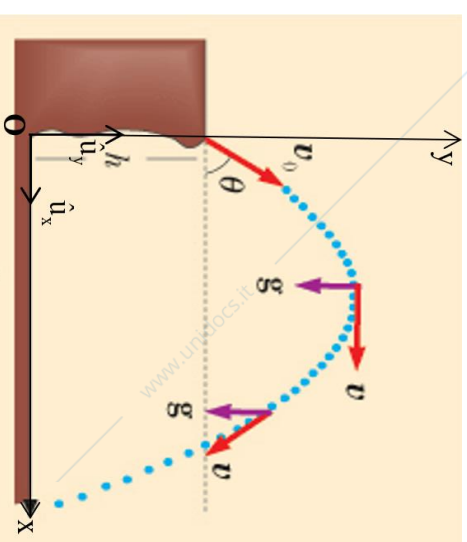
Caso 3) moto di un corpo puntiforme P che viene lanciato da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità \vec{V}_0 caratterizzata da un angolo θ .

Tempo totale di volo, t_G

$$t_G \Rightarrow y(t_G) = 0 \Rightarrow h + v_0 \sin \theta \cdot t_G - \frac{1}{2} |g| t_G^2 = 0 \Rightarrow t_G^2 - \frac{2v_0 \sin \theta}{|g|} \cdot t_G - \frac{2h}{|g|} = 0$$

$$\Rightarrow t_G = \frac{\frac{2v_0 \sin \theta}{|g|} \pm \sqrt{\left(\frac{2v_0 \sin \theta}{|g|}\right)^2 + \frac{8h}{|g|}}}{2} = \frac{v_0 \sin \theta}{|g|} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \theta}{|g|}\right)^2 + \frac{2h}{|g|}}$$

$$\frac{v_0 \sin \theta}{|g|} - \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \theta}{|g|}\right)^2 + \frac{2h}{|g|}} < 0 \Rightarrow t_G = \frac{v_0 \sin \theta}{|g|} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \theta}{|g|}\right)^2 + \frac{2h}{|g|}}$$



Moto nel piano: moto parabolico dei corpi

Caso 3) moto di un corpo puntiforme P che viene lanciato da un'altezza h rispetto al suolo avendo inizialmente una velocità \vec{V}_0 caratterizzata da un angolo θ .

Gittata X_G

$$X_G = X(t_G) = V_0 \cos \theta \cdot t_G = V_0 \cos \theta \cdot \left[\frac{V_0 \sin \theta}{|g|} + \sqrt{\left(\frac{V_0 \sin \theta}{|g|} \right)^2 + \frac{2h}{|g|}} \right]$$

