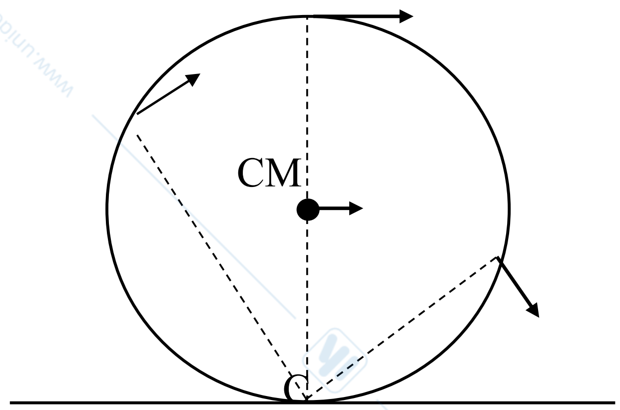
MOTO DI PURO ROTOLAMENTO
(rotolamento senza strisciamento)

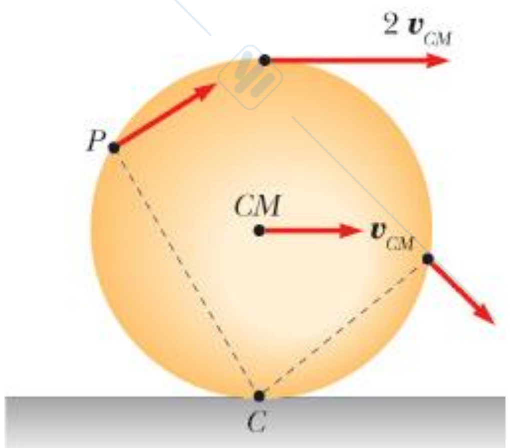
Moto di puro rotolamento:

- caso particolare di moto di rototraslazione
- l’asse di rotazione non è un asse materiale ma è un asse geometrico che si sposta insieme al corpo rigido
- la velocità di traslazione del centro di massa e la velocità angolare di rotazione NON sono indipendenti
- esempio classico di moto di puro rotolamento: la ruota

Il corpo che rotola può, in ogni intervallo di tempo dt, venir considerato come se ruotasse con velocità angolare $\vec{\omega}$ e accelerazione angolare $\vec{\alpha}$ attorno ad un asse perpendicolare al piano della figura, passante per il punto di contatto C tra il corpo e il piano.

Nell'intervallo di tempo dt il p.to C è tenuto fermo dalla forza di attrito statico che si esercita tra il piano ed il corpo



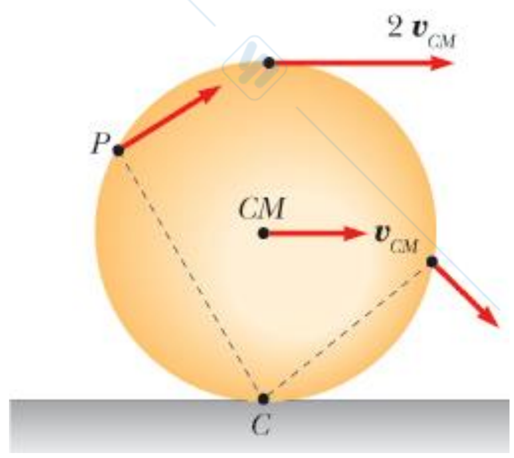


$\Rightarrow$ la velocità di ogni p.to P del corpo è ortogonale alla linea che congiunge il p.to P con C ed è uguale a $\vec{v}_P=\vec{\omega} \times \vec{r}$, dove $\vec{r}$ è il vettore che parte da C e va al p.to P.

In particolare:

$\vec{v}_{CM}=\vec{\omega} \times \vec{R}$, dove $\vec{R}$ è il vettore che parte da C e va al CM), in modulo si ha $\boxed{v_{CM}=\omega R}$

$\vec{a}_{CM}=\vec{\alpha} \times \vec{R}$, dove $\vec{R}$ è il vettore che parte da C e va al CM), in modulo si ha $\boxed{a_{CM}=\alpha R}$



$\Rightarrow$ la velocità di ogni p.to P del corpo si può sempre scrivere come

$$\vec{v}_P = \boxed{\vec{v}_{CM}} + \boxed{\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM\text{-}P}}$$

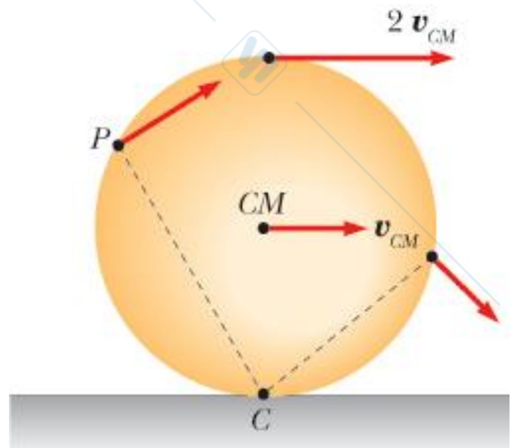
dove $\vec{r}_{CM\text{-}P}$ è il vettore che parte dal CM e va al p.to P

moto di traslazione del CM

moto di rotazione dei punti attorno al CM

In particolare:

$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM\text{-}C} = \vec{\omega} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM\text{-}C}$, ma $\vec{R} = -\vec{r}_{CM\text{-}C} \Rightarrow \vec{v}_C = 0$



$\Rightarrow$ $E_K = (1/2)I_C\omega^2$ dove I_C = momento di inerzia rispetto all'asse passante per il p.to di contatto C.

Dal teorema di Huygens – Steiner:

$I_C = I_{CM}+mR^2 \rightarrow E_K = (1/2)I_{CM}\omega^2+(1/2)mR^2\omega^2$, ma $v_{CM} = \omega R$

$\rightarrow E_K = (1/2)I_{CM}\omega^2+(1/2)mv_{CM}{}^2$

$$\Rightarrow \quad E_K = (1/2)I_{CM}\omega^2 + (1/2)mv_{CM}^2$$

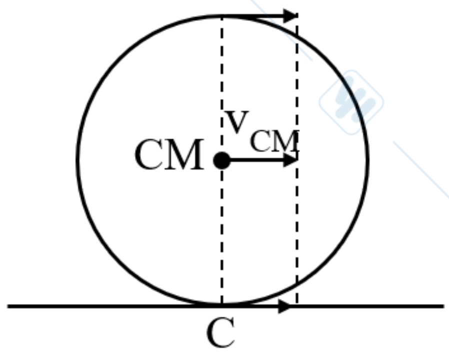
Energia cinetica di un corpo che ruota attorno ad un asse passante per il CM, senza traslare
($\omega = v_{CM}/R$)

Energia cinetica di un corpo che si muove di moto traslatorio, senza ruotare, con velocità v_{CM}

$$\Rightarrow \quad E_K = \boxed{(1/2)I_{CM}\omega^2} + \boxed{(1/2)mv_{CM}^2}$$

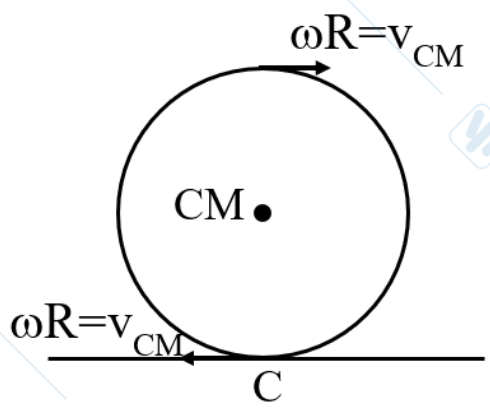
Energia cinetica di un corpo che ruota attorno ad un asse passante per il CM, senza traslare
($\omega = v_{CM}/R$)

Energia cinetica di un corpo che si muove di moto traslatorio, senza ruotare, con velocità v_{CM}



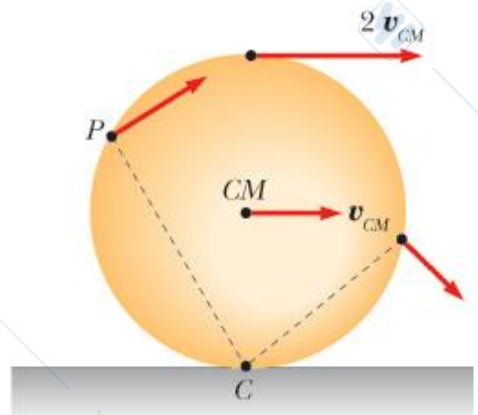
Traslazione $v = v_{CM}$

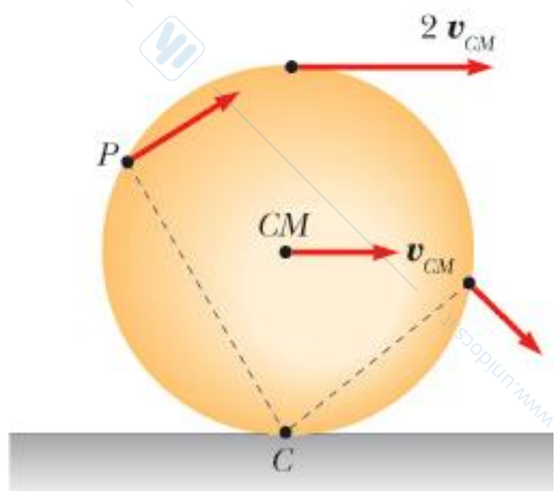
+



Rotazione $\omega= v_{CM}/R$

=

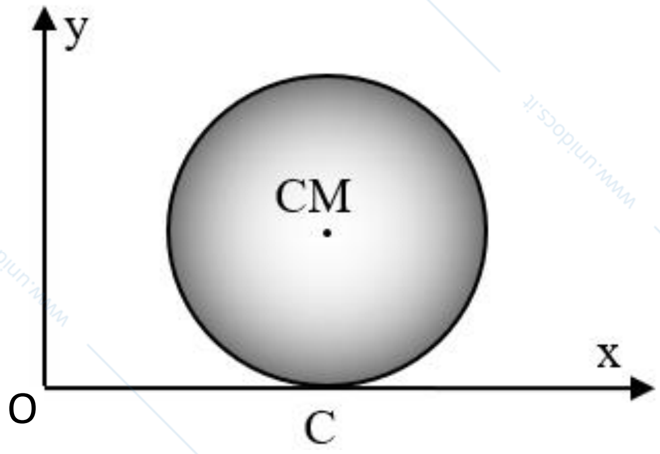




La successione di rotazioni infinitesime attorno al punto C di contatto equivale ad una rototraslazione in cui il CM avanza con velocità $\vec{v}_{CM}$ mentre il corpo ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto al CM.

Esempio – moto di puro rotolamento su di un piano orizzontale

Corpo di massa *m* e raggio *R* che rotola senza strisciare (moto di puro rotolamento) su una superficie piana orizzontale, in un sistema di riferimento (O, x, y) inerziale.

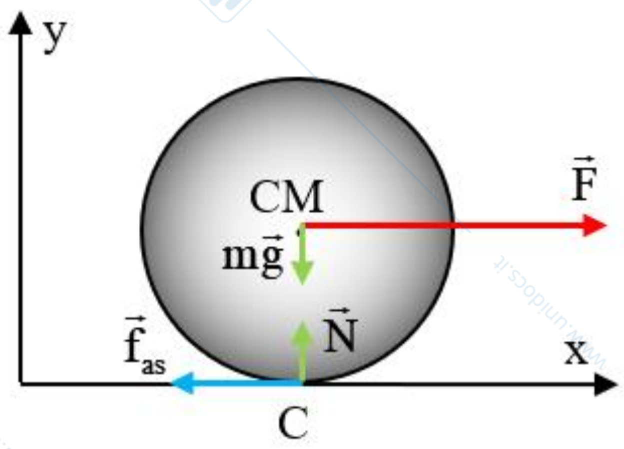


Dal punto di vista dinamico abbiamo due possibilità:

a) considerare il moto come la somma della traslazione del CM + la rotazione attorno al CM
   $\Rightarrow$ otteniamo il valore dell'accelerazione del CM e della forza di attrito statico

b) considerare il moto come una rotazione attorno al punto C di contatto corpo – piano orizzontale
   $\Rightarrow$ otteniamo il valore dell'accelerazione del CM

Caso 1 – Sotto l'azione di una forza orizzontale $\vec{F}$ applicata al CM



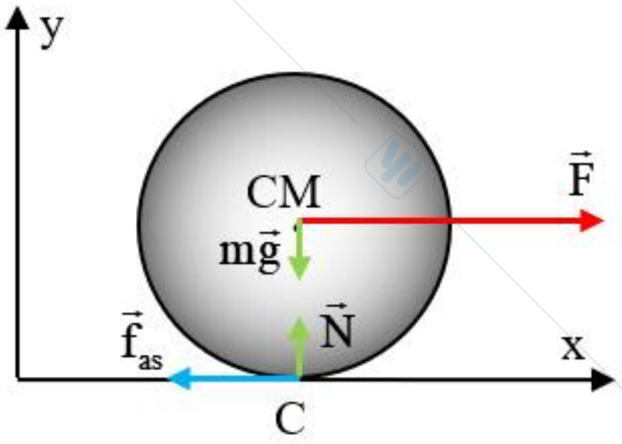
Metodo a)

Traslazione del CM: $\vec{F} + \vec{f}_{as} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$ ($\vec{f}_{as}$ è diretta in verso opposto all'asse x)

che proiettata sugli assi x e y $\Rightarrow \begin{cases} F - f_{as} = ma_{CM} \\ N - mg = 0 \end{cases}$

Rotazione attorno al CM : $\vec{r} \times \vec{f}_{as} = I_{CM}\vec{\alpha}$ (dove $\vec{r}$ è il vettore che parte dal CM e va al punto C)

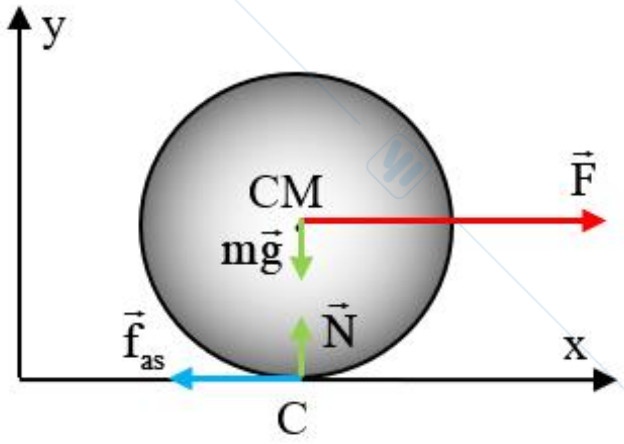
che proiettata su di un asse z passante per il CM ed entrante nel foglio $\Rightarrow Rf_{as} = I_{CM}\alpha$



$$\vec{F} + \vec{f}_{as} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$
$$\vec{r} \times \vec{f}_{as} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F - f_{as} = ma_{CM} \\ N = mg \\ Rf_{as} = I_{CM}\alpha \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

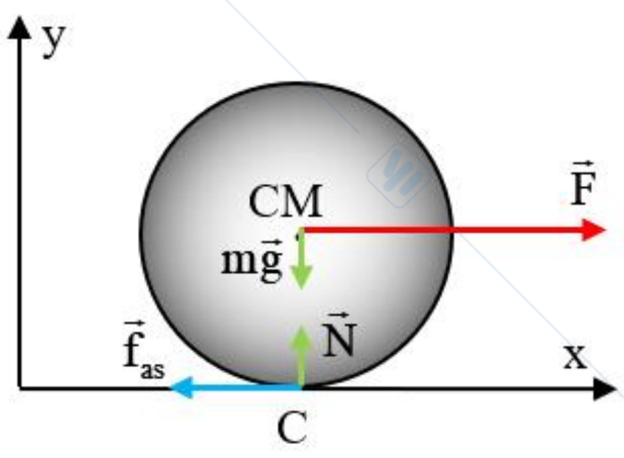
$$\Rightarrow \begin{cases} F - f_{as} = ma_{CM} \\ N = mg \\ Rf_{as} = I_{CM}\alpha = I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{CM} = \dfrac{F - f_{as}}{m} \\ N = mg \\ f_{as} = I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R^2} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{CM} = \dfrac{F - I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R^2}}{m} \\ N = mg \\ f_{as} = I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R^2} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$



$$\vec{F}+\vec{f}_{as}+m\vec{g}+\vec{N}=m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{r}\times\vec{f}_{as}=I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} ma_{CM}+I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R^2}=F\Rightarrow \boxed{a_{CM}=\dfrac{F}{m+\dfrac{I_{CM}}{R^2}}} \\ N=mg \\ f_{as}=I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R^2}\Rightarrow f_{as}=\dfrac{I_{CM}}{R^2}\dfrac{F}{m+\dfrac{I_{CM}}{R^2}}=\boxed{\dfrac{I_{CM}F}{mR^2+I_{CM}}} \\ \alpha=\dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$



$$\vec{F}+\vec{f}_{as}+m\vec{g}+\vec{N}=m\vec{a}_{CM}$$
$$\vec{r}\times\vec{f}_{as}=I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$a_{CM}=\frac{F}{m+\frac{I_{CM}}{R^2}}$$
$$f_{as}=\frac{I_{CM}F}{mR^2+I_{CM}}$$

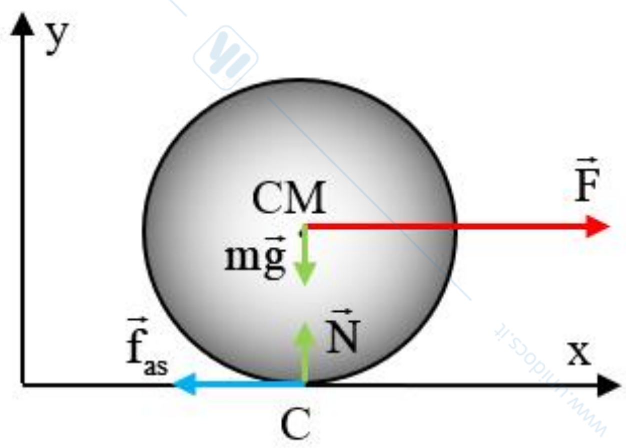
f_{as} NON può assumere qualsiasi valore: $f_{as}\le\mu_s N=\mu_s mg$

$$\Rightarrow \frac{I_{CM}F}{mR^2+I_{CM}}\le\mu_s mg\Rightarrow F\le\mu_s mg\left(\frac{mR^2}{I_{CM}}+1\right)=F_{lim}$$

Se $F>F_{lim}$ si perde l'aderenza al piano orizzontale $\Rightarrow$ il moto non è più di puro rotolamento

$\Downarrow$

Rotolamento con strisciamento



Metodo b)

Rotazione attorno a C:

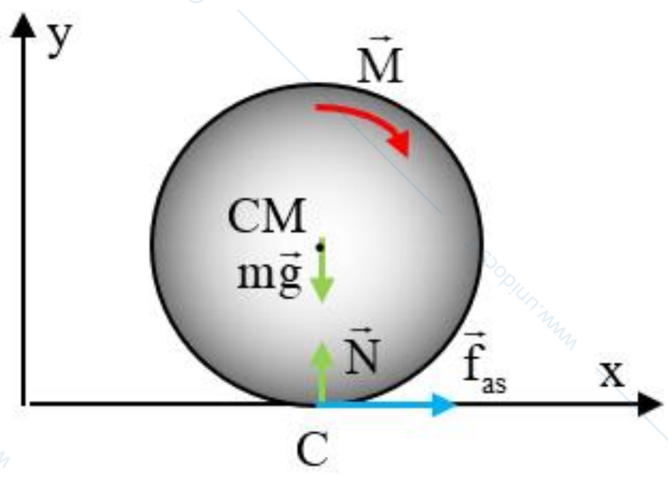
poiché l'asse di rotazione NON è di simmetria $\Rightarrow \vec{M}_{C,z} = I_z \alpha \hat{u}_z \rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = I_C \vec{\alpha} = (I_{CM} + mR^2)\vec{\alpha}$

(dove $\vec{r}$ è il vettore che parte dal punto C e va al CM)

che proiettata su di un asse z passante per il punto C ed entrante nel foglio $\Rightarrow RF = (I_{CM} + mR^2)\alpha$

$$\Rightarrow RF = (I_{CM} + mR^2)\alpha = (I_{CM} + mR^2)\frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{F}{m + \frac{I_{CM}}{R^2}}}$$

Caso 2 – Sotto l'azione di un momento costante $\vec{M}$, entrante nel foglio



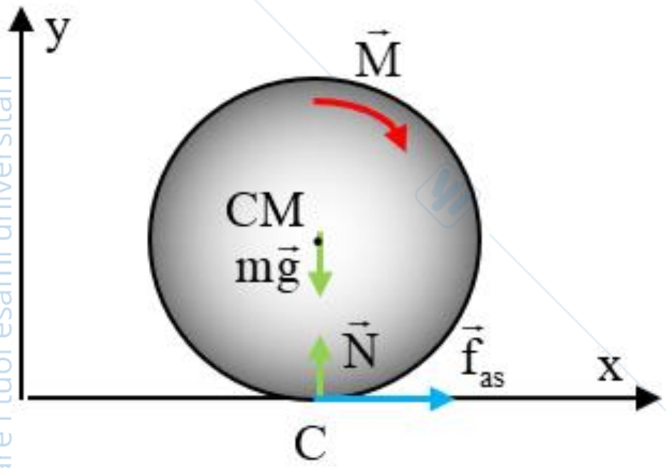
Metodo a)

Traslazione del CM: $\vec{f}_{as} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$ (N.B. $\vec{f}_{as}$ è diretta in verso concorde all'asse x)

che proiettata sugli assi x e y $\Rightarrow \begin{cases} f_{as} = ma_{CM} \\ N - mg = 0 \end{cases}$

Rotazione attorno al CM : $\vec{M} + \vec{r} \times \vec{f}_{as} = I_{CM}\vec{\alpha}$ (dove $\vec{r}$ è il vettore che parte dal CM e va al punto C)

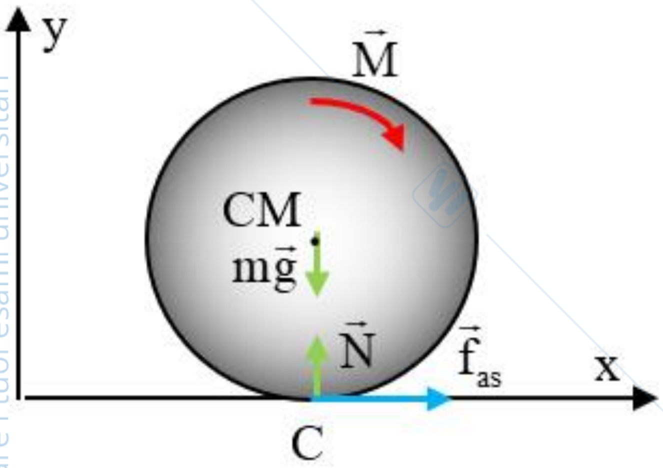
che proiettata su di un asse z passante per il CM ed entrante nel foglio $\Rightarrow M - Rf_{as} = I_{CM}\alpha$



$$\vec{f}_{as} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{M} + \vec{r} \times \vec{f}_{as} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{as} = ma_{CM} \\ N = mg \\ M - Rf_{as} = I_{CM}\alpha = I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{as} = ma_{CM} \\ N = mg \\ M - Rma_{CM} = I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{f_{as} = m\dfrac{M}{Rm + \dfrac{I_{CM}}{R}} = \dfrac{M}{R + \dfrac{I_{CM}}{mR}}} \\ N = mg \\ \boxed{a_{CM} = \dfrac{M}{Rm + \dfrac{I_{CM}}{R}}} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$



$$\vec{f}_{as} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{M} + \vec{r} \times \vec{f}_{as} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$a_{CM} = \frac{M}{Rm + \frac{I_{CM}}{R}}$$

$$f_{as} = m\frac{M}{Rm + \frac{I_{CM}}{R}} = \frac{M}{R + \frac{I_{CM}}{mR}}$$

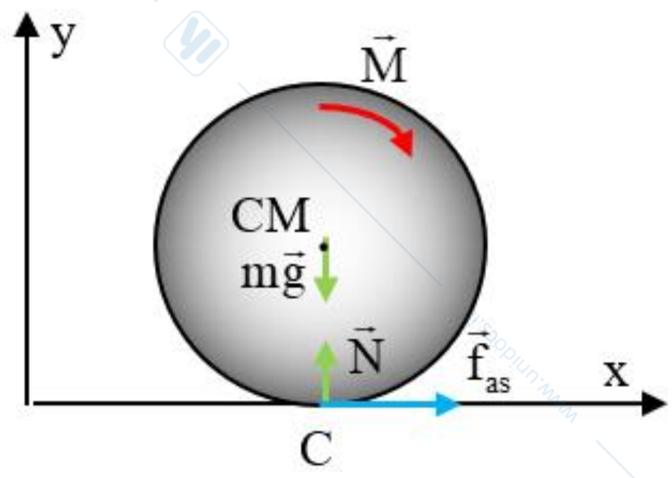
f_{as} NON può assumere qualsiasi valore: $f_{as} \le \mu_s N = \mu_s mg$

$$\Rightarrow \frac{M}{R + \frac{I_{CM}}{mR}} \le \mu_s mg \Rightarrow M \le \mu_s mg\left(R + \frac{I_{CM}}{mR}\right) = M_{lim}$$

Se $M>M_{lim}$ si perde l'aderenza al piano orizzontale $\Rightarrow$ il moto non è più di puro rotolamento

$\Downarrow$

Rotolamento con strisciamento



Metodo b)

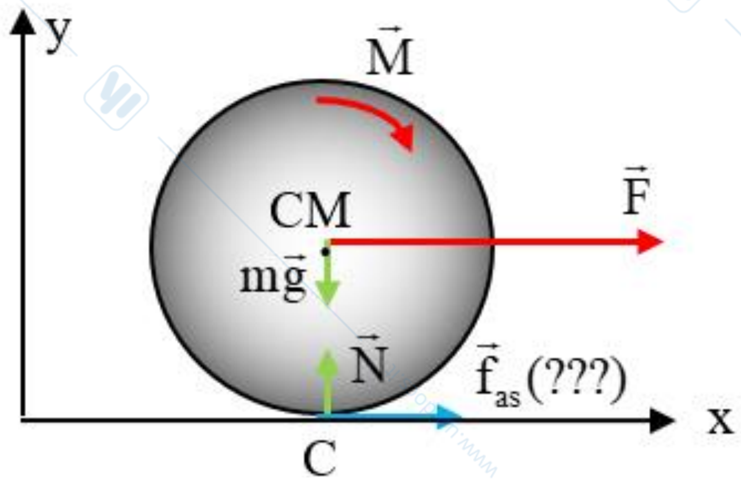
Rotazione attorno a C:

poiché l'asse di rotazione NON è di simmetria $\Rightarrow \vec{M}_{C,z} = I_z \alpha \hat{u}_z \rightarrow \vec{M} = I_C \vec{\alpha} = (I_{CM} + mR^2)\vec{\alpha}$

che proiettata su di un asse z passante per il punto C ed entrante nel foglio

$$\Rightarrow M = (I_{CM} + mR^2)\alpha = (I_{CM} + mR^2)\frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{M}{Rm + \frac{I_{CM}}{R}}}$$

Caso 3 - Sotto l'azione di una forza orizzontale $\vec{F}$ applicata al CM e di un momento costante $\vec{M}$, entrante nel foglio



$\vec{f}_{as}$ a priori non sappiamo in che verso risulta diretta (vedi i due casi precedenti)!!!

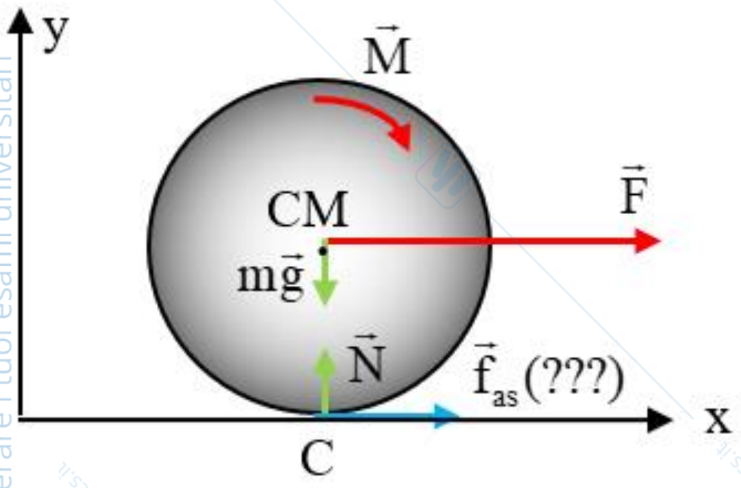
Metodo a)

Traslazione del CM: $\vec{F}+\vec{f}_{as}+m\vec{g}+\vec{N}=m\vec{a}_{CM}$ ($\vec{f}_{as}$ viene ipotizzata diretta nel verso dell'asse x)

che proiettata sugli assi x e y $\Rightarrow \begin{cases} F+f_{as}=ma_{CM} \\ N-mg=0 \end{cases}$

Rotazione attorno al CM : $\vec{M}+\vec{r}\times\vec{f}_{as}=I_{CM}\vec{\alpha}$ (dove $\vec{r}$ è il vettore che parte dal CM e va al punto C)

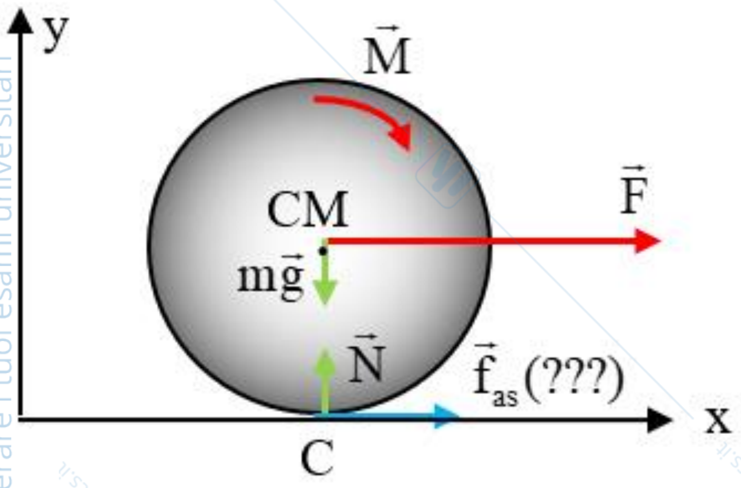
che proiettata su di un asse z passante per il CM ed entrante nel foglio $\Rightarrow M-Rf_{as}=I_{CM}\alpha$



$$\vec{F} + \vec{f}_{as} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{M} + \vec{r} \times \vec{f}_{as} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

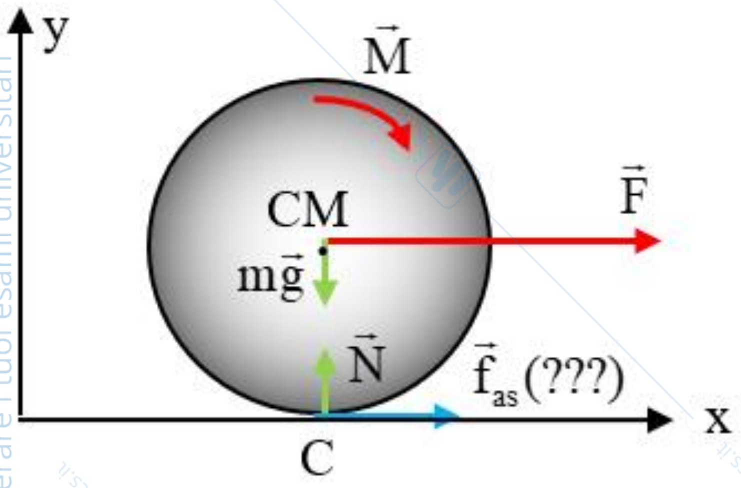
$$\Rightarrow \begin{cases} F + f_{as} = ma_{CM} \\ N = mg \\ M - Rf_{as} = I_{CM}\alpha \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{as} = ma_{CM} - F \\ N = mg \\ M - R(ma_{CM} - F) = I_{CM}\dfrac{a_{CM}}{R} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{as} = m\left(\dfrac{M + RF}{mR + \dfrac{I_{CM}}{R}}\right) - F \\ N = mg \\ a_{CM} = \dfrac{M + RF}{mR + \dfrac{I_{CM}}{R}} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$



$$\vec{F}+\vec{f}_{as}+m\vec{g}+\vec{N}=m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{M}+\vec{r}\times\vec{f}_{as}=I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} f_{as}=\dfrac{mM+mRF-mRF-F\dfrac{I_{CM}}{R}}{mR+\dfrac{I_{CM}}{R}}=\boxed{\dfrac{mM-F\dfrac{I_{CM}}{R}}{mR+\dfrac{I_{CM}}{R}}} \\ N=mg \\ \boxed{a_{CM}=\dfrac{M+RF}{mR+\dfrac{I_{CM}}{R}}} \\ \alpha=\dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$



$$\vec{F} + \vec{f}_{as} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{M} + \vec{r} \times \vec{f}_{as} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$a_{CM} = \frac{M + RF}{mR + \frac{I_{CM}}{R}}$$

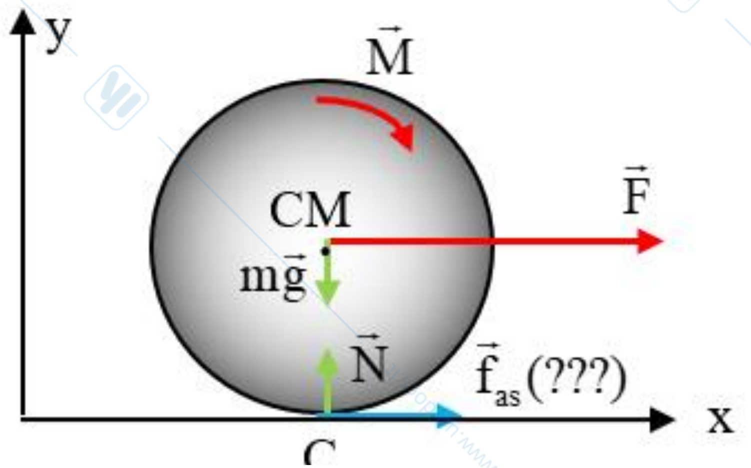
$$f_{as} = \frac{mM - F\frac{I_{CM}}{R}}{mR + \frac{I_{CM}}{R}}$$

Se $\left(mM - F\frac{I_{CM}}{R}\right) > 0 \Rightarrow f_{as} > 0 \Rightarrow \vec{f}_{as}$ è diretta nel verso dell'asse x (come inizialmente ipotizzato)

Se $\left(mM - F\frac{I_{CM}}{R}\right) < 0 \Rightarrow f_{as} < 0 \Rightarrow \vec{f}_{as}$ è diretta nel verso opposto all'asse x

Se $\left(mM - F\frac{I_{CM}}{R}\right) = 0 \Rightarrow f_{as} = 0 \Rightarrow a_{CM} = \frac{F}{m} \Leftarrow f_{as} = ma_{CM} - F$

N.B. f_{as} NON può assumere qualsiasi valore: $|f_{as}| \leq \mu_s N = \mu_s mg$



Metodo b)

Rotazione attorno a C:

poiché l'asse di rotazione NON è di simmetria $\Rightarrow \vec{M}_{C,z} = I_z \alpha \hat{u}_z \rightarrow \ \vec{M} + \vec{r} \times \vec{F} = I_C \vec{\alpha} = (I_{CM} + mR^2)\vec{\alpha}$

(dove $\vec{r}$ è il vettore che parte dal punto C e va al CM)

che proiettata su di un asse z passante per il punto C ed entrante nel foglio

$$\Rightarrow M + RF = (I_{CM} + mR^2)\frac{a_{CM}}{R} \Rightarrow a_{CM} = \frac{M + RF}{mR + \frac{I_{CM}}{R}}$$

Conservazione dell'energia meccanica

⇒ La forza di attrito statico, che tiene fermo istante per istante il punto di contatto tra corpo e piano di appoggio, NON compie lavoro.

⇒ La reazione vincolare del piano, sempre perpendicolare allo spostamento, NON compie lavoro

Se sul corpo che compie il moto di puro rotolamento lavorano solo forze conservative

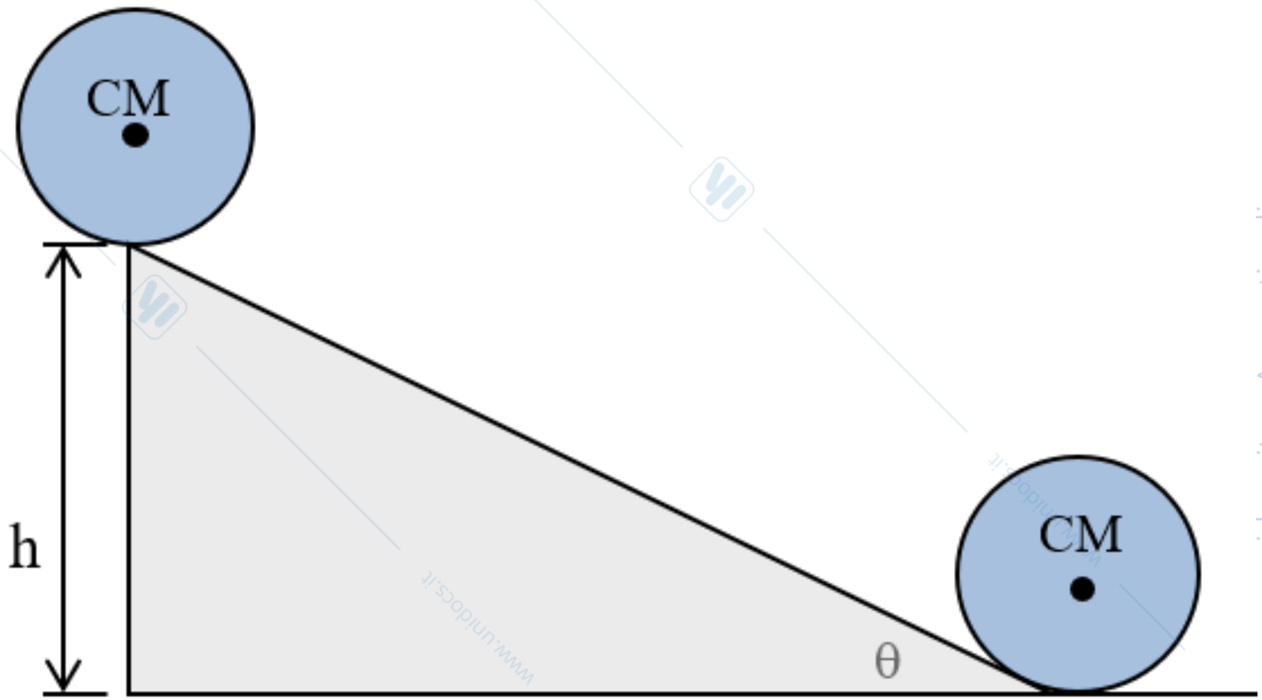
⇒ si applica la conservazione dell'energia meccanica.

Esempio

Un cilindro pieno omogeneo di massa m e raggio R rotola senza strisciare lungo un piano inclinato (caratterizzato da un angolo θ) partendo da fermo da un'altezza h. Sapendo che l'attrito statico tra cilindro e piano inclinato è caratterizzato dal coefficiente di attrito statico μ_s, determinare:

1) Il modulo della velocità del CM del cilindro quando esso arriva in fondo al piano inclinato.
2) Come varierebbe la velocità del CM se non ci fosse attrito tra il cilindro e il piano inclinato ?
3) L'accelerazione del CM durante il moto di discesa.
4) L'angolo massimo θ_{max} del piano inclinato che permetta ancora il moto di puro rotolamento.

($I_{CM} = (1/2)mR^2$).



1) Il modulo della velocità del CM del cilindro quando esso arriva in fondo al piano inclinato

Sul cilindro agiscono:

- la reazione vincolare $\vec{N}$ che però non lavora essendo sempre perpendicolare alla traiettoria,
- la forza peso $m\vec{g}$ applicata al CM del cilindro (forza conservativa)
- la forza di attrito statico $\vec{f}_{as}$ che agisce su un punto istantaneamente fermo per cui lo spostamento è nullo ed è quindi nullo il lavoro.

$\Rightarrow$ conservazione dell'energia meccanica: $\Delta E_m = \Delta E_K + \Delta E_P = 0$

Prendendo la base del piano inclinato come riferimento su cui misurare le altezze:

$$\text{inizio} \rightarrow E_K = 0, \quad E_P = mg(h+R)$$

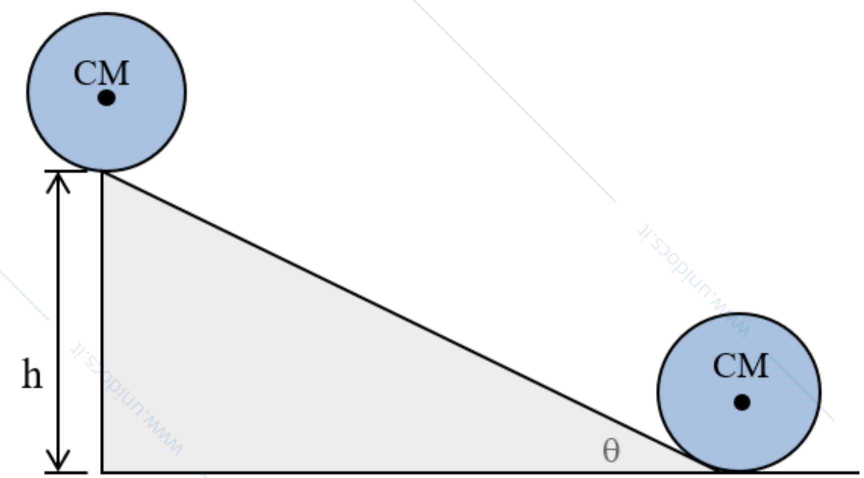
$$\text{fine} \rightarrow E_K = (1/2)I_{CM}\omega^2 + (1/2)mv_{CM}^2, \quad E_P = mgR$$

(dove $I_{CM} = (1/2)mR^2$ e $\omega = v_{CM}/R$)

$$\Rightarrow \; mgh = (1/2)I_{CM}\omega^2 + (1/2)mv_{CM}^2 =$$

$$=(1/4)mv_{CM}^2 + (1/2)mv_{CM}^2 = (3/4)mv_{CM}^2$$

$$\Rightarrow \; \boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}}$$



2) Come varierebbe la velocità del CM se non ci fosse attrito tra il cilindro e il piano inclinato ?

Se non si fosse attrito tra il cilindro e il piano inclinato, il cilindro scenderebbe traslando rigidamente:

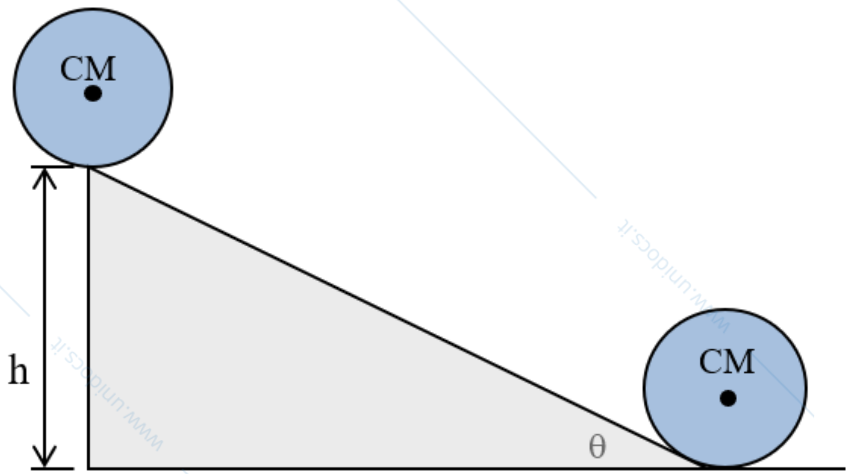
$\Rightarrow$ conservazione dell'energia meccanica: $\Delta E_m = \Delta E_K + \Delta E_P = 0$

inizio $\rightarrow E_K = 0, \quad E_P = mg(h+R)$

fine $\rightarrow E_K = (1/2)mv_{CM}^2, \quad E_P = mgR$

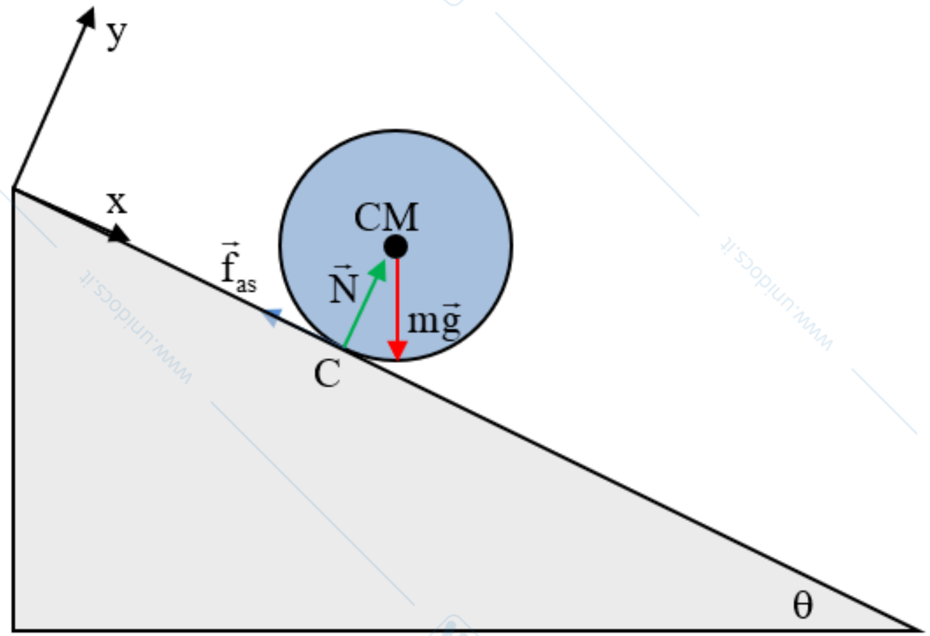
$\Rightarrow \; mgh = (1/2)mv_{CM}^2 \;\Rightarrow \boxed{v_{CM} = \sqrt{2gh}} > \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

i corpi che rotolano senza strisciare sono più "lenti" di quelli che scivolano senza attrito, a causa della presenza dell'energia cinetica rotazionale $(1/2)I_{CM}\omega^2$



3) L'accelerazione del CM durante il moto di discesa.

4) L'angolo massimo θ_{max} del piano inclinato che permetta ancora il moto di puro rotolamento.

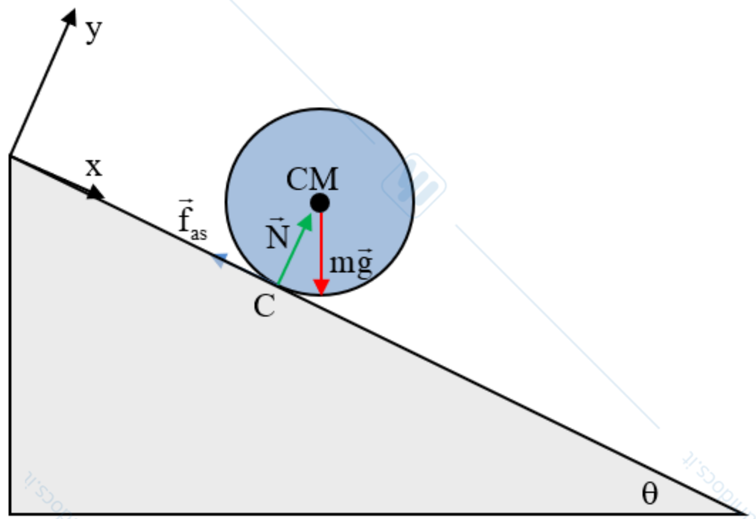


Traslazione del CM: $\vec{f}_{as} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$ ($\vec{f}_{as}$ è diretta in verso opposto all'asse x)

che proiettata sugli assi x e y $\Rightarrow \begin{cases} mg\sin\theta - f_{as} = ma_{CM} \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$

Rotazione attorno al CM : $\vec{r} \times \vec{f}_{as} = I_{CM}\vec{\alpha}$ (dove $\vec{r}$ è il vettore che parte dal CM e va al punto C)

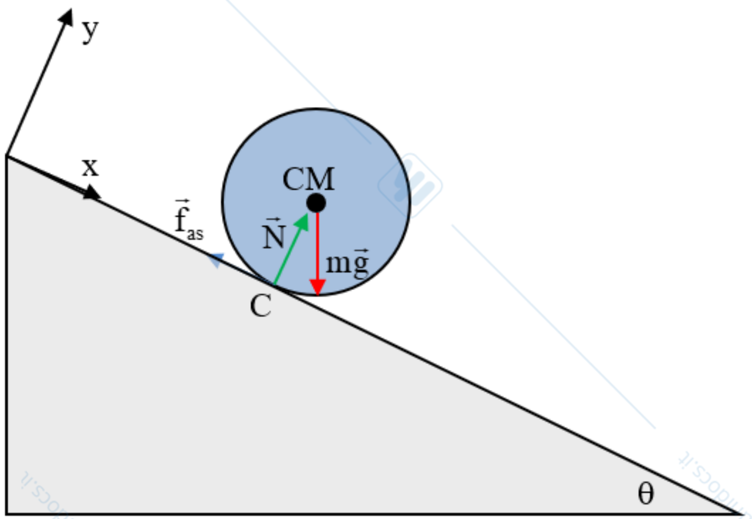
che proiettata su di un asse z passante per il CM ed entrante nel foglio $\Rightarrow Rf_{as} = I_{CM}\alpha$



$$\vec{f}_{as} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{r} \times \vec{f}_{as} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$\begin{cases} mg\sin\theta - f_{as} = ma_{CM} \\ N - mg\cos\theta = 0 \\ Rf_{as} = I_{CM}\alpha \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg\sin\theta - \dfrac{I_{CM}a_{CM}}{R^2} = ma_{CM} \\ N - mg\cos\theta = 0 \\ f_{as} = \dfrac{I_{CM}}{R}\dfrac{a_{CM}}{R} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{CM} = \dfrac{mg\sin\theta}{m + \dfrac{I_{CM}}{R^2}} \\ N - mg\cos\theta = 0 \\ f_{as} = \dfrac{I_{CM}a_{CM}}{R^2} = \dfrac{I_{CM}}{R^2}\dfrac{mg\sin\theta}{m + \dfrac{I_{CM}}{R^2}} = \dfrac{mg\sin\theta}{\dfrac{mR^2}{I_{CM}} + 1} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$



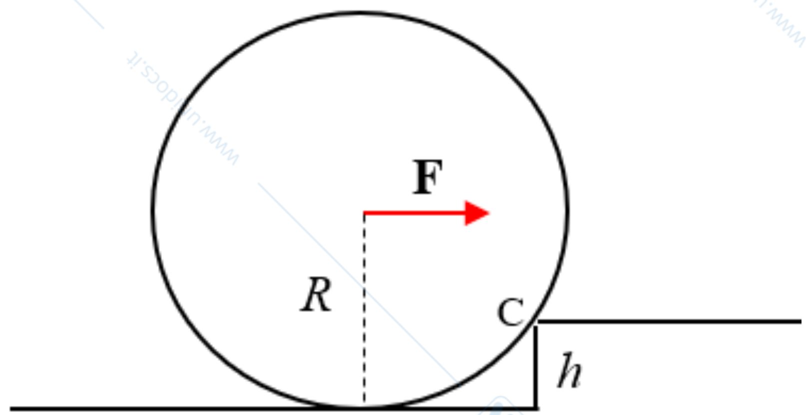
$$\vec{f}_{as} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{r} \times \vec{f}_{as} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{CM} = \dfrac{g\sin\theta}{1+\dfrac{I_{CM}}{mR^2}} = \boxed{\dfrac{2}{3}g\sin\theta} \\ N = mg\cos\theta \\ f_{as} == \dfrac{mg\sin\theta}{\dfrac{mR^2}{I_{CM}}+1} \le \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta \Rightarrow tg\theta \le \mu_s\left(\dfrac{mR^2}{I_{CM}}+1\right) = 3\mu_s \Rightarrow \boxed{\theta_{max} = arctg(3\mu_s)} \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

Esempio

Un disco omogeneo di massa m e raggio R deve superare uno scalino alto h senza strisciare. Calcolare il minimo valore $F_{\min}$ del modulo della forza orizzontale costante **F** che occorre applicare nel centro di massa del disco affinché il disco superi il gradino senza strisciare.



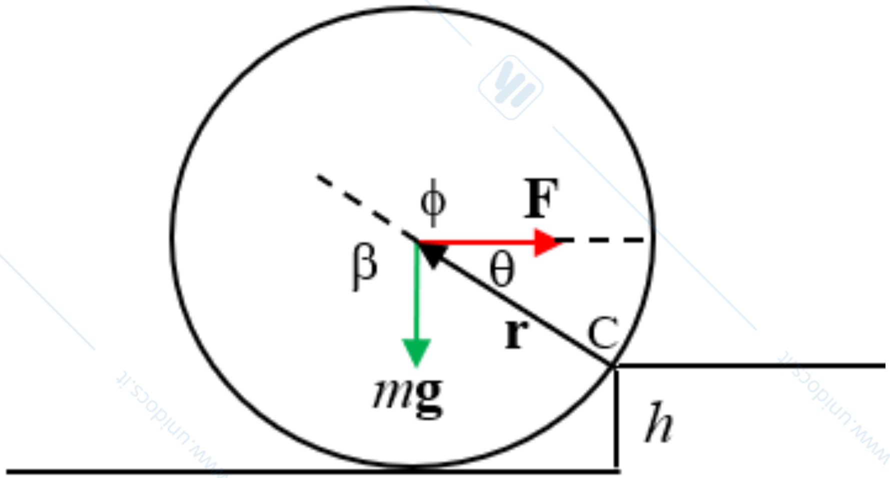
Il moto del disco risulta una rotazione rigida (oraria) attorno ad un asse perpendicolare al piano del disegno e passante nel punto C (spigolo dello scalino). Le forze che intervengono durante il moto sono:

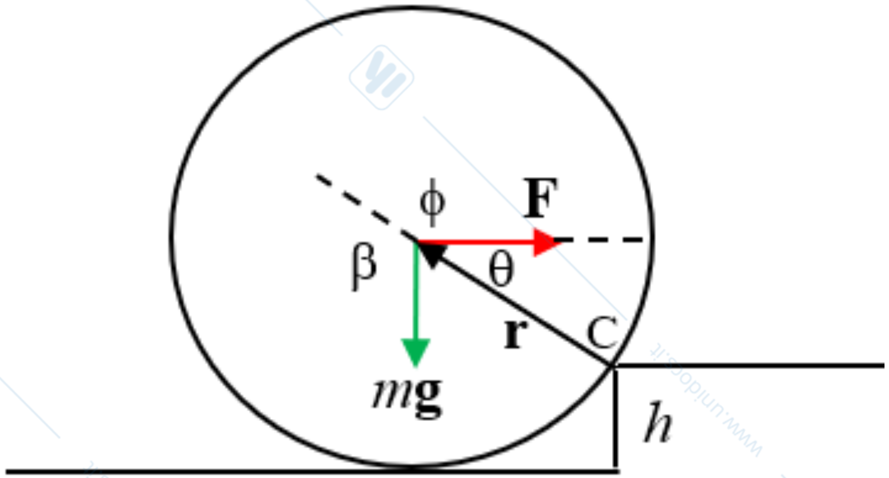
1) la forza orizzontale **F** e la forza peso m**g**, entrambe applicate nel centro di massa del disco;

2) la forza di attrito statico $\mathbf{f}_{as}$ (il disco non deve scivolare durante il moto) e la reazione vincolare **N**, entrambe applicate nel punto di contatto C. In particolare:

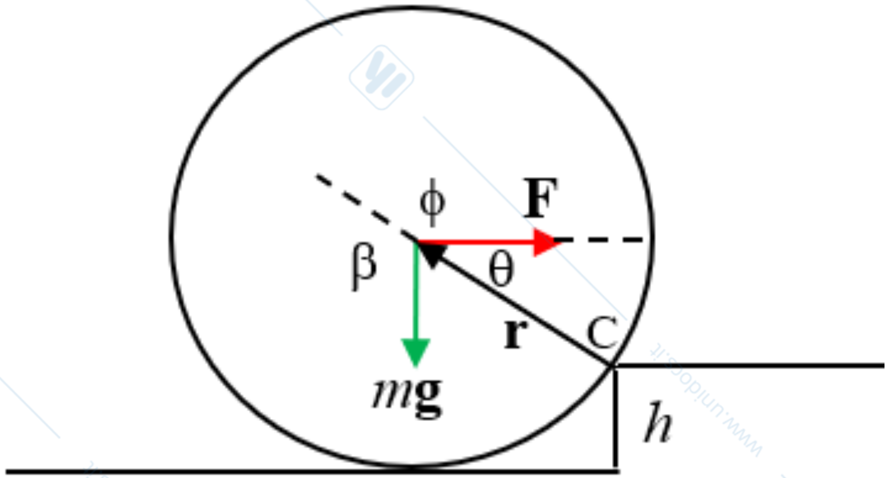
a) $\mathbf{f}_{as}$ risulta tangente alla circonferenza

b) **N** risulta diretta lungo il raggio della circonferenza





Prendiamo come polo su cui calcolare i momenti delle forze, il punto di contatto C. Rispetto a C, solo la forza orizzontale **F** e la forza peso m**g** generano un momento $\mathbf{M}_C = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$

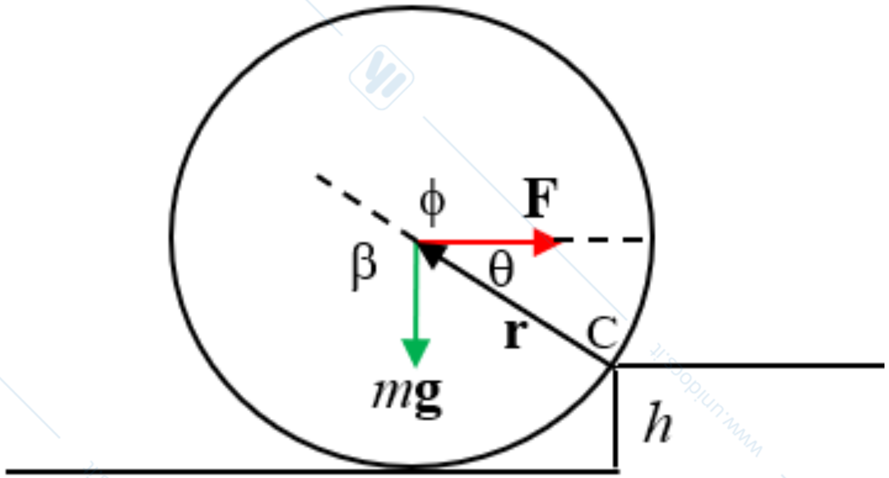


Prendiamo come polo su cui calcolare i momenti delle forze, il punto di contatto C. Rispetto a C, solo la forza orizzontale **F** e la forza peso m**g** generano un momento $\mathbf{M}_C = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$

⇒ **r** x **F** risulta in direzione perpendicolare al piano del disegno e in verso entrante nel foglio (movimento rotatorio orario)

⇒ **r** x m**g** risulta in direzione perpendicolare al piano del disegno e in verso uscente dal foglio (movimento rotatorio antiorario)

⇒ $\mathbf{M}_C$ risulta quindi direzionato lungo l'asse di rotazione e quindi $\mathbf{M}_C = M_z\mathbf{u}_z = I_z\alpha\mathbf{u}_z$, avendo indicato con z l'asse di rotazione passante per il punto C.

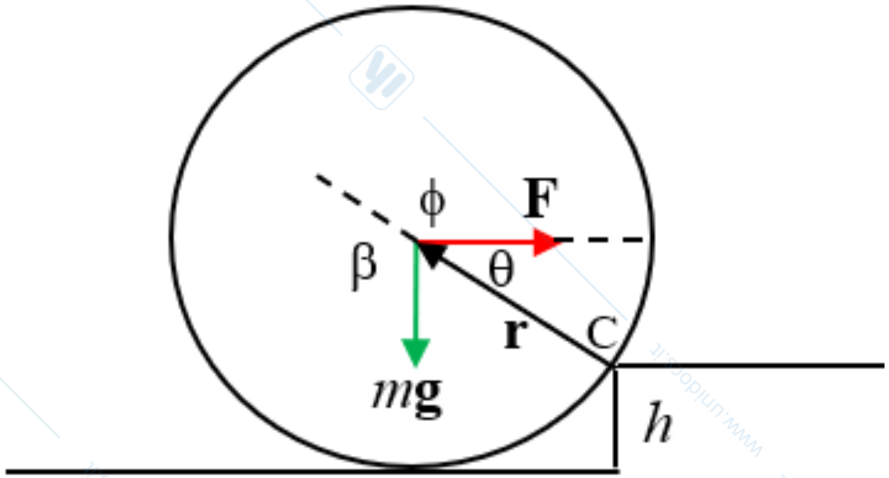


$$\mathbf{M}_C = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$$

Perché il disco superi lo scalino bisogna che in ogni istante del moto **r** x **F** (in modulo) sia maggiore o, al limite, uguale a **r** x m**g** (in modulo):

$\Rightarrow \quad |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| \geq |\mathbf{r} \times m\mathbf{g}|$

$\Rightarrow \quad R\,F \sin(\phi) \geq R\,mg \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad F \geq mg(\sin(\beta) / \sin(\phi))$



$\mathbf{M}_C = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$

Perché il disco superi lo scalino bisogna che in ogni istante del moto **r** x **F** (in modulo) sia maggiore o, al limite, uguale a **r** x m**g** (in modulo):

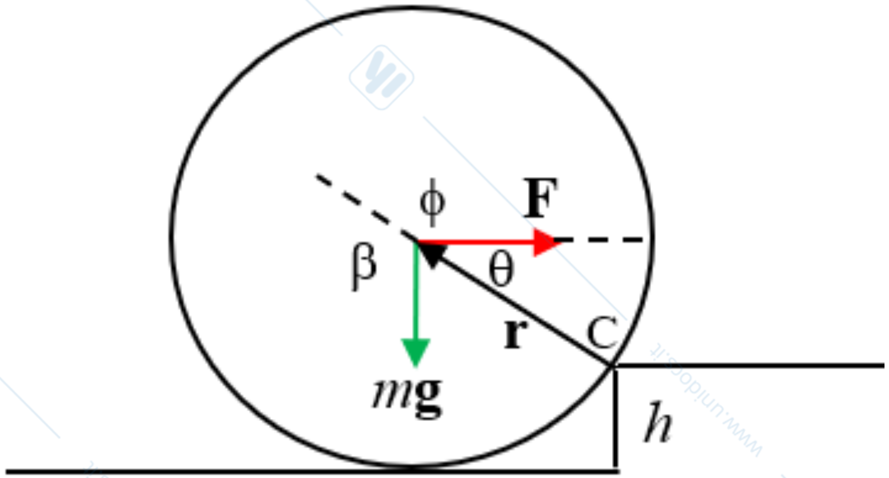
$\Rightarrow \quad |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| \geq |\mathbf{r} \times m\mathbf{g}|$

$\Rightarrow R\,F \sin(\phi) \geq R\,mg \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad F \geq mg(\sin(\beta) / \sin(\phi))$

Indicando con θ l'angolo tra la direzione di **F** e il raggio del disco, si ha:

$\phi = \pi - \theta$ e $\beta = \pi - (\pi/2 - \theta) = \pi/2 + \theta$

$\Rightarrow F \geq mg(\sin(\pi/2 + \theta) / \sin(\pi - \theta)) = mg(\cos(\theta) / \sin(\theta)) = mg/tg(\theta)$



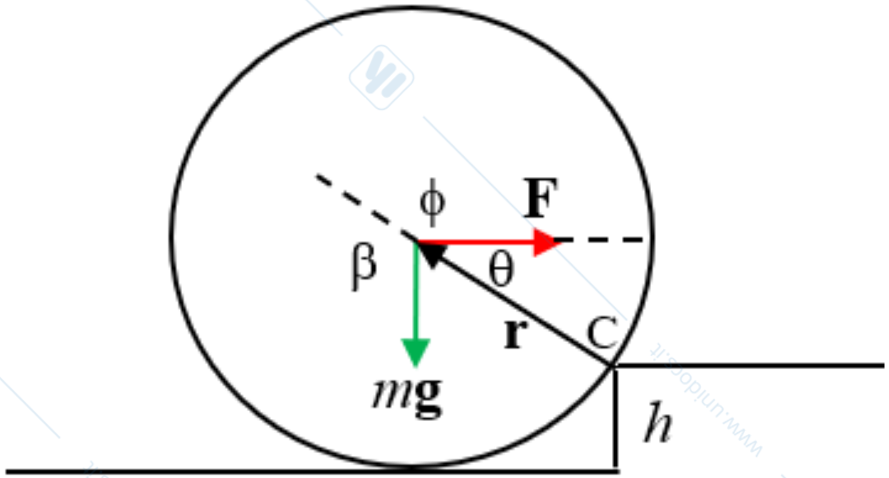
$F \geq mg/tg(\theta)$

θ va da un valore iniziale $\theta=\theta_0$ (disco sul gradino inferiore) ad un valore finale $\theta=\pi/2$ (disco sul gradino superiore)

$\Rightarrow$ il valore limite inferiore della forza è maggiore all'inizio del moto, dopo di che diminuisce per annullarsi a $\theta=\pi/2$

$\Rightarrow$ il minimo valore F_{min} del modulo della forza orizzontale **F** che occorre applicare nel centro di massa del disco affinché il disco superi il gradino è quindi quello relativo all'istante iniziale del moto

$\Rightarrow F_{min} = F(\theta=\theta_0) = mg/tg(\theta_0)$



$$F_{min} = mg/tg(\theta_0)$$

Geometricamente si ha:

$$R\sin(\theta_0) = R - h \Rightarrow \sin(\theta_0) = \frac{(R-h)}{R}$$

$$R^2 = (R-h)^2 + (R\cos(\theta_0))^2 \Rightarrow R\cos(\theta_0) = \sqrt{R^2-(R-h)^2} \Rightarrow \cos(\theta_0) = \frac{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}{R}$$

da cui:

$$F_{min} = F(\theta=\theta_0) = mg/tg(\theta_0) = \frac{mg\sqrt{R^2-(R-h)^2}}{R-h} = \boxed{\frac{mg\sqrt{2Rh-h^2}}{R-h}}$$