cinematica

Moto in una dimensione

Iniziamo lo studio della cinematica con il caso più semplice, il moto in una direzione di un corpo puntiforme.

Corpo puntiforme: astrazione - oggetto piccolissimo in relazione alla distanza che percorre (ad es. pianeta per gli astronomi, elettrone per i fisici delle particelle) e privo di massa

Dobbiamo poi definire lo ***spostamento*** Δx, che è dato dalla variazione della posizione del corpo puntiforme:

$$\Delta x = x_f - x_i$$

Moto in una dimensione

Non si deve confondere lo *spostamento* con la *distanza percorsa*.

La distanza percorsa da un punto materiale è la lunghezza della traiettoria dalla posizione iniziale a quella finale. È una quantità scalare indicata sempre con un numero positivo.

Lo spostamento è invece la variazione della posizione del punto materiale. È una *quantità vettoriale*.

La ***traiettoria*** è il luogo geometrico delle posizione occupate dal punto mobile.

Per descrivere il moto del corpo puntiforme faremo poi uso dell'equazione oraria del moto che è la legge che descrive la *traiettoria in funzione del tempo*.

Ha sempre una forma del tipo (s = spostamento)

$$s = s(t)$$

Si definisce poi la velocità *scalare* media per il corpo puntiforme che si muove di un tratto d in un intervallo di tempo Δt, come:

$$v_m = \frac{d}{\Delta t}$$

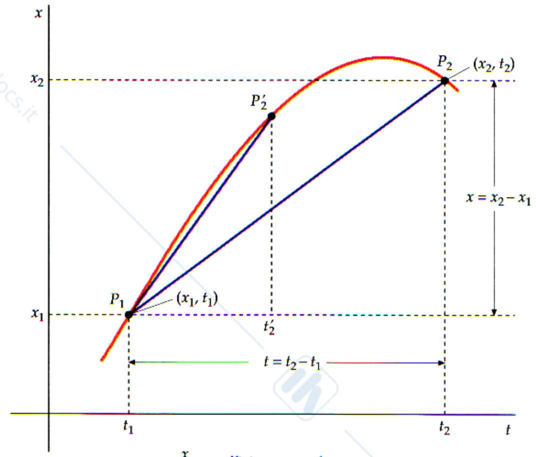
È appunto una quantità scalare e sempre positiva.

Si definisce poi la velocità media come il rapporto

$$v_{x,m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

La velocità media ha le dimensioni di una lunghezza diviso un tempo. Non dipende dal percorso seguito durante lo spostamento.

La velocità *scalare* media (uno *scalare*) si trova dividendo la ***distanza*** percorsa per il tempo impiegato, mentre la velocità media (un *vettore*) si trova dividendo lo ***spostamento*** per il tempo impiegato.



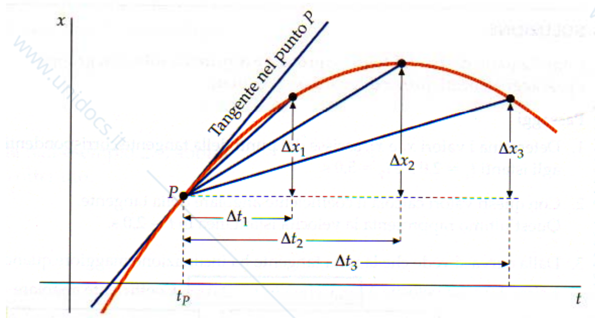
$\frac{x}{t}$ = coefficiente angolare = v_{media}

Si ha che dimensionalmente è $[v] = \left[\frac{L}{T}\right] = \left[LT^{-1}\right]$

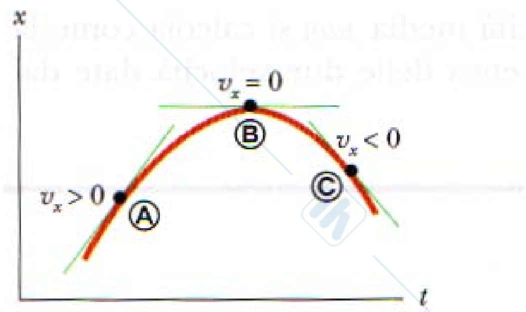
Nel SI la velocità si misura in $v = \frac{m}{s}$

e nella pratica anche in $v = \frac{km}{h}$

Come si vede dalla figura, se ora si calcola la velocità media in un tratto sempre più breve (ossia per Δt → 0), si trova la ***velocità istantanea*** del corpo puntiforme:



$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



Può essere positiva (in A), negativa (in C) o nulla (in B)

La velocità è una grandezza vettoriale e più in generale è corretto scrivere che, dato lo spostamento **r**, la velocità istantanea è data da:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

il cui *modulo* è

$$v = \left|\vec{v}(t)\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$$

Di seguito, se non espressamente detto altrimenti, con il termine velocità si intenderà la velocità istantanea.

Dalla relazione

$$\mathrm{v}_x(t) = \frac{dx}{dt}$$

Si può scrivere che

$$dx = \mathrm{v}_x(t)\,dt$$

e quindi che

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} \mathrm{v}_x(t)\,dt$$

o anche

$$\int_{x_0}^{x} dx = x - x_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{v}_x(t)\,dt$$

Assumendo che sia $t_0 = 0$ e che la ***velocità*** **sia costante** (*moto rettilineo uniforme*), si può quindi scrivere che

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{v}_x(t)\,dt = \mathrm{v}_x \int_{0}^{t} dt = \mathrm{v}_x\, t$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + \mathrm{v}_x\, t$$

Questa prende il nome di ***legge oraria*** del moto rettilineo uniforme.

La legge potrebbe anche essere ricavata, in via semplificata, dalla

$$\mathrm{v}_{x,m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = \mathrm{v}_{x,m}\,\Delta t \quad \Rightarrow \quad x_f - x_i = \mathrm{v}_{x,m}\left(t_f - t_i\right)$$

e sempre assumendo che sia $t_i = 0$ e che la ***velocità*** **sia costante** ($\mathrm{v}_{x,m} = \mathrm{v}_x$ = *moto rettilineo uniforme*), si può scrivere che

$$x_f = x_i + \mathrm{v}_x\, t$$

Si ritrova quindi la ***legge oraria*** del moto rettilineo uniforme.

Nella espressione precedente si è inteso x_f come la posizione generica x vista prima e il termine $x_0 = x_i$).

$$x = x_0 + \mathrm{v}_x\, t$$

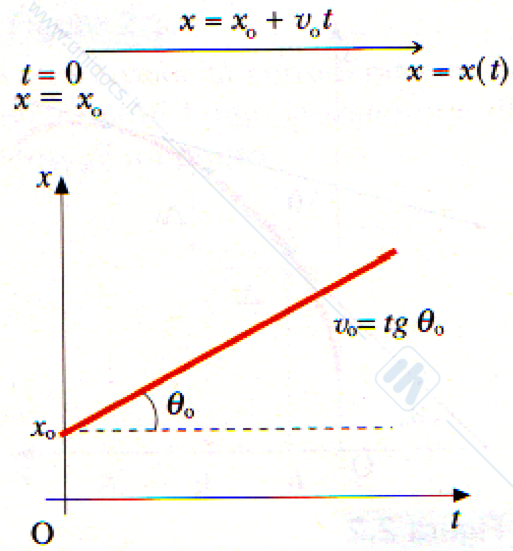
Si può poi facilmente fare il controllo dimensionale dell'espressione trovata:

$$\Rightarrow \quad [L] = [L] + \left[LT^{-1} \times T\right] = [L] + [L]$$

Graficamente si trova che l'equazione del moto rettilineo uniforme

$$x = x_0 + v_x\, t$$

è rappresentata in un piano x, t come in figura.



ESEMPIO 2.5 **Un corridore come un punto materiale**

Una scienziata, studiando la biomeccanica del corpo umano, determina la velocità di un corridore mentre corre a velocità costante. La scienziata fa partire il cronometro nel momento in cui il corridore passa un certo punto e lo ferma quando il corridore passa da un punto 20 m più avanti. L'intervallo di tempo indicato dal cronometro è 4.4 s.

A Qual è la velocità del corridore?

Soluzione Il nostro modello del corridore è un punto materiale, come abbiamo già fatto nell'Esempio 2.2 poiché la dimensione del corridore e il movimento delle braccia e delle gambe sono dettagli non necessari. Questo, insieme al fatto che la velocità sia costante, ci ha consentito di usare l'Equazione 2.4 per trovare la velocità:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{20\ \text{m} - 0}{4.4\ \text{s}} = 4.5\ \text{m/s}$$

B Qual è la posizione del corridore dopo 10 s da quando è passato?

Soluzione In questa parte del problema, usiamo l'Equazione 2.5 per trovare la posizione della particella al tempo $t = 10$ s. Utilizzando la velocità già trovata nella parte (A),

$$x_f = x_i + v_x t = 0 + (4.5\ \text{m/s})(10\ \text{s}) = 45\ \text{m}$$

In molti casi però il vettore velocità **non** è costante (in modulo o direzione) ed in questi casi si deve tenere conto di questa *variazione della velocità con il* tempo. Si parla allora di **accelerazione**.
Analogamente a quanto visto prima, si può definire una *accelerazione media* come

$$a_m = \frac{\Delta \mathrm{v}_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{v}_{x,f} - \mathrm{v}_{x,i}}{t_f - t_i}$$

e quindi è anche

$$\Delta \mathrm{v}_x = a_m \, \Delta t$$

Anche in questo caso, si può definire più correttamente una *accelerazione istantanea* come

$$\vec{\mathrm{a}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} = \frac{d\,\vec{\mathrm{v}}}{dt}$$

L'accelerazione è una *grandezza vettoriale* ed è data *dimensionalmente* da:

$$[\mathrm{a}] = \left[\frac{L}{T} \cdot \frac{1}{T}\right] = \left[LT^{-1} \cdot T^{-1}\right] = \left[LT^{-2}\right]$$

Nel SI si misura in

$$a = \frac{m}{s^2}$$

Dalla relazione

$$\vec{\mathrm{a}}(t) = \frac{d\,\vec{\mathrm{v}}}{dt} \quad \Rightarrow \quad d\,\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{a}}(t)\,dt$$

E analogamente a quanto già fatto precedentemente, si trova che

$$d\,\vec{v} = \vec{a}(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v} d\,v = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

e se **a** è *costante* ed il *moto è in una dimensione*, **moto rettilineo uniformemente accelerato**, si trova che (assumendo sempre $t_0 = 0$):

$$v_x - v_{0x} = \int_{t_0}^{t} a_x(t)\,dt = a_x \int_{0}^{t} dt = a_x t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = v_{0x} + a_x t}$$

Anche in questo caso, questa espressione poteva essere ricavata, con minor rigore matematico, sempre lungo la direzione x, dalla

$$a_m = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x,f} - v_{x,i}}{t_f - t_i} \quad \Rightarrow \quad \Delta v_x = v_{x,f} - v_{x,i} = a_m \Delta t = a_m (t_f - t_i)$$

ed assumendo ancora $t_0 = t_i = 0$ e **a** costante

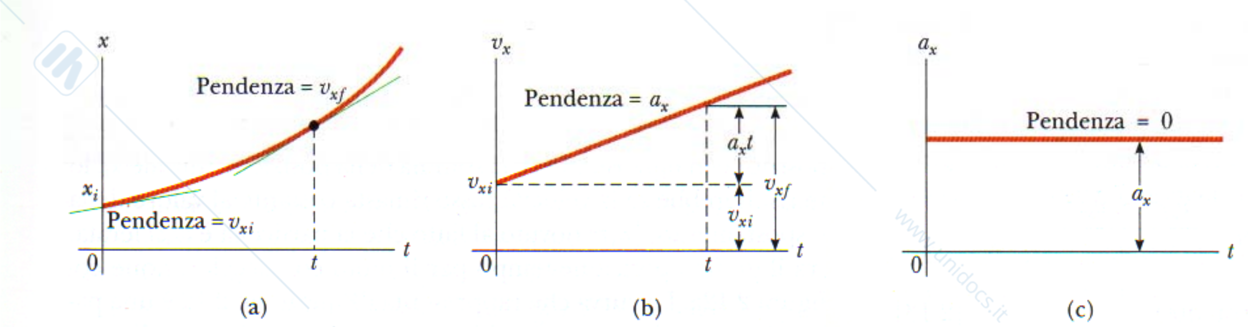
$$v_x = v_{0,x} + a_x t$$

con v_x la velocità al generico istante t.

Dalla definizione data precedentemente per l'accelerazione, e ricordando la definizione di *velocità istantanea*, si vede anche che è

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad a_x(t) = \frac{d\,v_x}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Le figure seguenti mostrano spostamento, velocità ed accelerazione in un moto rettilineo uniformemente accelerato



Nel moto rettilineo uniformemente accelerato, la velocità varia *uniformemente con il tempo* (vedi fig. b) e si può quindi scrivere che la sua *velocità media* tra t = 0 ed il generico istante t è data da:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{2}\left(v_{0,x} + v_x\right)$$

Ma è anche, come visto nel moto rettilineo uniforme,

$$x = x_0 + \bar{v}_x\, t$$

E quindi, combinando le due espressioni:

$$x = x_0 + \bar{v}_x\, t = x_0 + \frac{1}{2}\left(v_{0,x} + v_x\right)t$$

Usando ora la

$$v_x = v_{0,x} + a_x t$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + \frac{1}{2}\left(v_{0,x} + v_x\right)t = x_0 + \frac{1}{2}\left(v_{0,x} + v_{0,x} + a_x t\right)t$$

ed infine

$$\boxed{x = x_0 + v_{0,x}\, t + \frac{1}{2} a_x t^2}$$

Si può vedere che in generale per un moto rettilineo uniformemente accelerato (a = cost.) lungo una *direzione qualunque* s, si potrà sempre scrivere

$$\boxed{s = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} a t^2}$$

Si può verificare che *l'equazione dimensionale* è soddisfatta:

$$[L] = [L] + \left[LT^{-1} \times T\right] + \left[LT^{-2} \times T^2\right] = [L] + [L] + [L]$$

Usando poi ancora le due relazioni $\mathrm{v}_x = \mathrm{v}_{0,x} + a_x t$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_{0,x} + \mathrm{v}_x\right)t$$

e ricavando t dalla prima e sostituendo, si trova che

$$t = \frac{\mathrm{v}_x - \mathrm{v}_{0,x}}{a_x} \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \frac{1}{2}\left(\mathrm{v}_{0,x} + \mathrm{v}_x\right)\frac{\mathrm{v}_x - \mathrm{v}_{0,x}}{a_x}$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{v}_x^2 - \mathrm{v}_{0,x}^2}{a_x}$$

ed infine (ricordando sempre che a = cost!)

$$\mathrm{v}_x^2 = \mathrm{v}_{0,x}^2 + 2a_x\left(x - x_0\right)$$

Si può vedere che in generale per un moto rettilineo uniformemente accelerato (a = cost.) dopo uno *spostamento* s, si potrà sempre scrivere

$$\mathrm{v}_f^2 = \mathrm{v}_i^2 + 2a\,s$$

Si può verificare anche in questo caso che *l'equazione dimensionale* è soddisfatta:

$$\left[L^2T^{-2}\right] = \left[L^2T^{-2}\right] + \left[LT^{-2} \times L\right] = \left[L^2T^{-2}\right] + \left[L^2T^{-2}\right]$$

Le relazioni precedenti del moto rettilineo uniformemente accelerato possono essere ricavate in maniera più corretta usando il *calcolo integrale*. Infatti dall'espressione usata precedentemente (con $t_0 = 0$):

$$x - x_0 = \int_0^t \mathrm{v}_x(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad x = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}_x(t)\,dt$$

e dalla

$$\mathrm{v}_x - \mathrm{v}_{0x} = \int_0^t a_x(t)\,dt = a_x \int_0^t dt = a_x t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}_x(t) = \mathrm{v}_{0x} + a_x t$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + \int_0^t (\mathrm{v}_{0x} + a_x t)\,dt$$

che *integrata* dà di nuovo l'equazione della *legge oraria* del moto rettilineo uniformemente accelerato:

$$x = x_0 + \mathrm{v}_{0,x}\, t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Analogamente, per un moto rettilineo, possiamo scrivere che

$$\mathrm{a}_x(t) = \frac{d\,\mathrm{v}_x}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a}_x(t) = \frac{d\,\mathrm{v}_x}{dx}\frac{dx}{dt} = \mathrm{v}_x \frac{d\,\mathrm{v}_x}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{x_0}^{x} a_x dx = \int_{\mathrm{v}_{0x}}^{\mathrm{v}_x} \mathrm{v}_x\, d\,\mathrm{v}_x$$

integrando, ed essendo a = cost:

$$\int_{x_0}^{x} a_x dx = a_x\left(x - x_o\right) = \int_{v_{0,x}}^{v_x} v_x \, d\, v = \frac{1}{2} v_x^2 - \frac{1}{2} v_{0,x}^2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{v_x^2 = v_{0,x}^2 + 2a_x\left(x - x_0\right)}$$

che è esattamente l'equazione trovata precedentemente.

Corpi in caduta libera

Trascurando l'attrito con l'aria,

un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso di moto rettilineo uniformemente accelerato.

Questa accelerazione viene indicata con g ed il suo valore è approssimativamente g = 9.80 m/s^2.

Si consideri un sistema di riferimento con la direzione verticale come asse delle y e rivolto verso l'alto.
Con tale scelta *l'accelerazione di gravità*, costante, sarà negativa e quindi le formule precedenti diventano:

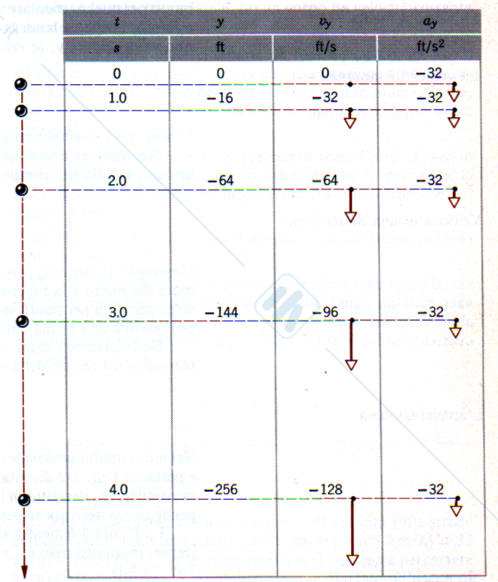
$$v_y = v_{0y} - gt$$

La velocità aumenta linearmente con il tempo

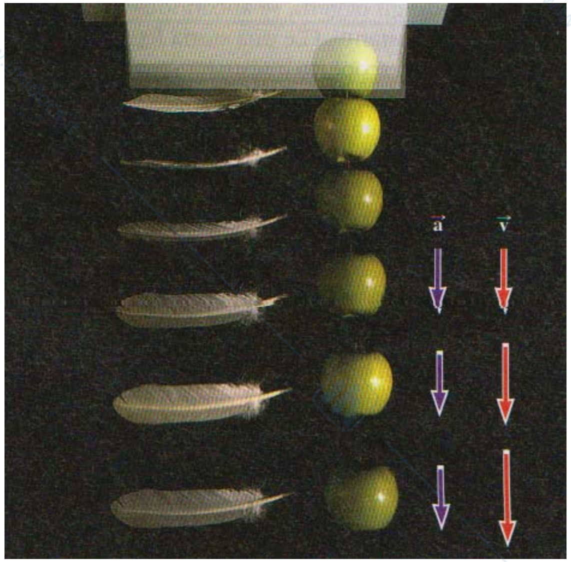
$$y = y_0 + v_{0,y}\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

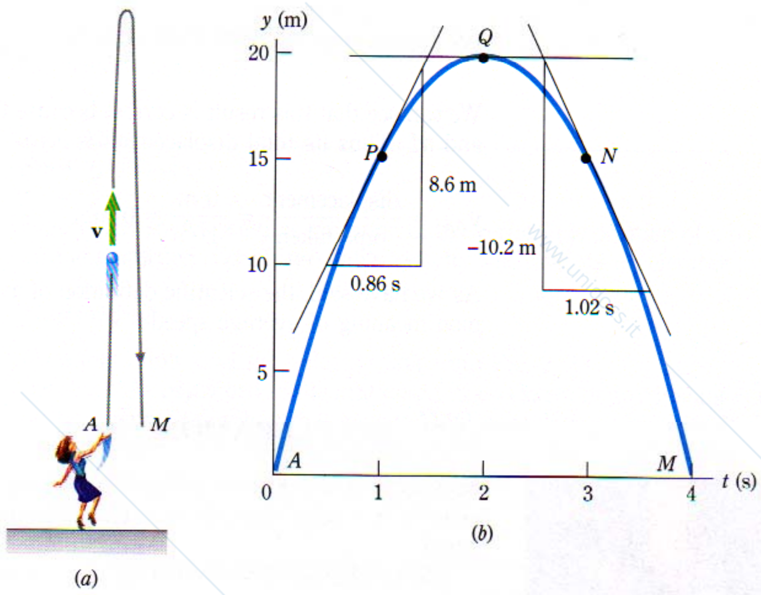
Lo spostamento aumenta quadraticamente con il tempo

$$v_y^2 = v_{0,y}^2 - 2g(y - y_0)$$



Se si fanno cadere due corpi, una mela ed una piuma nella figura, *in assenza di attrito*, ad esempio nel vuoto, essendo soggetti alla stessa accelerazione di gravità g, cadranno con moto identico ed arriveranno al suolo *nello stesso istante*!





Moto di un corpo lanciato verso l'alto.

L'accelerazione è costante. a = -g

La velocità è data dalla pendenza della tangente alla curva dello spostamento (tutto lungo y!) in funzione del tempo

esercizio

Una pallina da base-ball viene lasciata da ferma dalla sommità di un edificio molto alto. Trascurando la resistenza dell'aria, calcolare la posizione e la velocità della pallina dopo 1, 2 e 3 s.

Soluzione: Scegliamo le nostre coordinate in modo tale che il punto di partenza della pallina sia all'origine ($y_o = 0$ per $t = 0$) e ricordiamo di avere definito y positiva se diretta verso l'alto. Poiché $v_o = 0$, le Equazioni 3.12 e 3.14 diventano

$$v = -gt = -(9.80 \text{ m/s}^2)\, t$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)\, t^2$$

dove t è espresso in s, v in m/s e y in m. Queste espressioni danno la velocità e lo spostamento ad un qualsiasi istante t dopo che la pallina è stata abbandonata.

Pertanto per $t = 1$ s

$$v = -(9.80 \text{ m/s}^2)(1 \text{ s}) = -9.80 \text{ m/s}$$

$$y = -\frac{1}{2}(9.80 \text{ /s}^2)(1 \text{ s}^2) = -4.90 \text{ m}$$

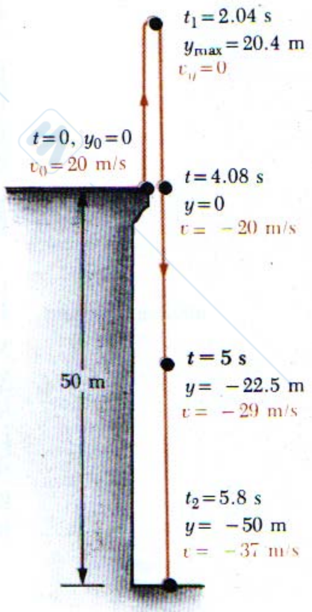
Analogamente, per $t = 2$ s, troviamo che $v = -19.6$ m/s e $y = -19.6$ m. Infine, a $t = 3$ s, $v = 29.4$ m/s e $y = 44.1$ m. Il segno meno per v indica che la velocità è diretta verso il basso, ed il segno meno per y indica uno spostamento nella direzione delle y negative.

Esercizio Calcolate la posizione e la velocità della pallina dopo 4 s.

Risposta: -78.4 m, -39.2 m/s.

esercizio

Una pietra è lanciata dalla cima di un edificio con una velocità iniziale di 20 m/s verso l'alto. L'edificio è alto 50 m e la pietra sfiora il bordo dell'edificio quando ritorna giù come mostrato dalla figura 3-11. Determinare (a) il tempo impiegato dalla pietra a raggiungere la sua altezza massima, (b) l'altezza massima (c) il tempo impiegato dalla pietra per ritornare al livello del lanciatore, (d) la velocità della pietra in questo istante ed (e) la velocità e la posizione della pietra per $t = 5$.



Soluzione: (a) Per trovare il tempo necessario a raggiungere la massima altezza usa l'equazione 3.12 $v = v_o - gt$, notando che $v = 0$ alla massima altezza:

$$20 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)\, t_1 = 0$$

$$t_1 = \frac{20 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 2{,}04 \text{ s}$$

(b) Questo valore del tempo può essere sostituito nell'equazione 3.14 $y = v_o t - (1/2) g t^2$, per dare l'altezza massima misurata dalla posizione del lanciatore:

$$y_{max} = (20 \text{ m/s})(2.04 \text{ s}) - (1/2)(9.80 \text{ m/s}^2)(2.04 \text{ s})^2 = 2.04 \text{ m}$$

(c) Quando la pietra ritorna all'altezza del lanciatore, la coordinata y è zero. Dall'espressione $y = v_o t - (1/2) g t^2$ (equazione 3.14), con $y = 0$, otteniamo:

$$20\, t - 4.9\, t^2 = 0$$

Questa è un'espressione quadratica ed ha due soluzioni per t. (Per qualche indicazione nel risolvere l'equazione quadratica vedi l'appendice B.2). l'equazione può essere fattorizzata per dare

$$t\,(20 - 4.9\, t) = 0$$

Una soluzione è $t = 0$, che corrisponde al tempo in cui la pietra inizia il moto. L'altra soluzione è $t = 4{,}08$ s, che è la soluzione che cerchiamo.

in $v = v_o - gt$ (Equazione 3.12) per fornire:

$$v = 20 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(4.08 \text{ s}) = -20.0 \text{ m/s}$$

Si osservi che la velocità della pietra quando ritorna alla quota di partenza ha lo stesso modulo ma direzione opposta alla velocità iniziale. Ciò indica che il moto è simmetrico.

(e) da $v = v_o - gt$ (Equazione 3.12), la velocità dopo 5 s è

$$v = 20 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s})^2 = -29.0 \text{ m/s}$$

Possiamo usare $y = v_o t - (1/2) g t^2$ (Eq. 3.14) per trovare la posizione della particella dopo 5 s:

$$y = (20 \text{ m/s})(5 \text{ s}) - (1/2)(9.80 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s})^2 = -22.5 \text{ m}$$

Esercizio 1 Trovare (a) la velocità della pietra mentre sta per toccare terra e (b) il tempo complessivo in cui la pietra è stata in aria.

Risposta: (a) $= -37.1$ m/s (b) 5,83 s.