Politecnico di Milano – Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

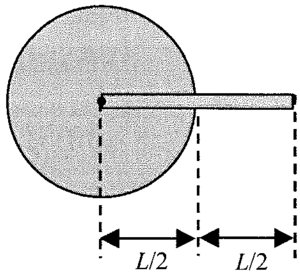
7/7/2014
ore 13:30

FISICA (seconda verifica in itinere)

Proff. Della Valle, Nisoli, Torricelli

1)
Un satellite artificiale di massa m è in orbita circolare attorno alla Terra (massa M_T) con periodo orbitale T_0. Si calcoli il lavoro necessario per portarlo su una nuova orbita circolare con periodo orbitale $T_1 = 8T_0$.

2)
Un corpo rigido è costituito da un'asta omogenea sottile di lunghezza L saldata ad un disco omogeneo di raggio $L/2$ e massa pari a quella dell'asta. Il corpo può ruotare senza attrito intorno al centro del disco. Inizialmente il corpo è in quiete con l'asta disposta orizzontalmente (come mostrato in figura) e poi viene lasciato libero di ruotare. Si determini la velocità angolare nell'istante in cui l'asta transita dalla posizione verticale.

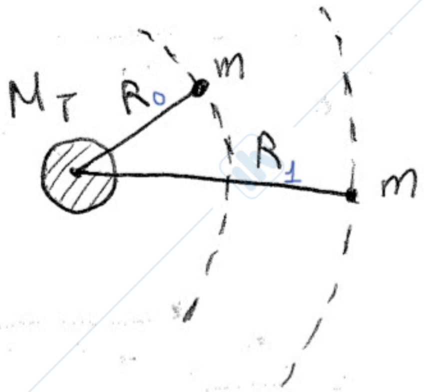


3)
Una mole di gas ideale compie un'espansione reversibile secondo la legge $T = aV^{1/2}$ (con a una costante), dal volume iniziale V_0 al volume finale $4V_0$. Successivamente il sistema viene riportato nello stato iniziale attraverso una trasformazione isobara seguita da una isocora, entrambe reversibili. Si determini il lavoro totale del ciclo così formato.

4)
a) Si enunci il teorema di Clausius, precisando il significato di tutte le grandezze fisiche coinvolte e delle operazioni matematiche utilizzate.
b) Si difinisca l'entropia e si dimostri che è una funzione di stato.

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA
- ***FIRMARE*** *l'elaborato*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate*

Es. 1



Poiché il satellite compie un moto circolare uniforme con velocità angolare $\omega_{0,1} = 2\pi / T_{0,1}$, l'equazione del suo moto (I eq. cardinale della Dinamica) è:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_N$$

con $\vec{F} = -\gamma \dfrac{M_T m}{R_{0,1}^2} \hat{u}_r$ e $\vec{a}_N = -\omega_{0,1}^2 R_{0,1} \hat{u}_r$

Si ottiene quindi

$$\gamma \frac{M_T \cancel{m}}{R_{0,1}^2} = \frac{4\pi^2 \cancel{m}}{T_{0,1}^2} R_{0,1} \Rightarrow R_{0,1} = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_T T_{0,1}^2}{4\pi^2}}$$

L'energia del satellite sulle due orbite in esame sarà

$$E_{0,1} = -\gamma \frac{M_T m}{R_{0,1}} + \frac{1}{2} m\,\omega_{0,1}^2 R_{0,1}^2$$

$$= -\gamma \frac{M_T m}{2R_{0,1}}$$

Il lavoro che occorre compiere per portare il satellite dalla prima alla seconda orbita sarà $\mathcal{L} = E_1 - E_0 = \gamma \dfrac{M_T m}{2}\left(\dfrac{1}{R_0} - \dfrac{1}{R_1}\right)$

Sostituendo le espressioni di R_0 e R_1 trovate in precedenza abbiamo:

$$\mathcal{L} = \gamma \frac{M_T m}{2} \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{\gamma M_T}} \left(\frac{1}{T_0^{2/3}} - \frac{1}{T_1^{2/3}} \right).$$

Ricordando che $T_1 = 8T_0$, quindi che $T_1^{2/3} = 4T_0^{2/3}$, otteniamo infine

$$\mathcal{L} = \sqrt[3]{\frac{\pi^2\gamma^2 M_T^2}{2T_0^2}}\, m \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3m}{4} \sqrt[3]{\frac{\pi^2\gamma^2 M_T^2}{2T_0^2}}.$$

Es. 2

$$I_A = \frac{1}{3} m L^2$$

$$I_D = \frac{1}{2} m \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

Momenti d'inerzia dell'asta e del disco rispettivamente, calcolati rispetto al centro del disco.

Poichè sul sistema agiscono tutte e sole forze conservative, l'energia meccanica del corpo rigido si conserva nel moto.

Essa è pari alla somma dell'energia potenziale e cinetica. Preso come livello di riferimento ad energia potenziale nulla quello su cui si trova il centro del disco abbiamo:

$$E_1 = 0$$

$$E_2 = -mgL/2 + \frac{1}{2} I_A \omega^2 + \frac{1}{2} I_D \omega^2$$

Abbiamo indicato con ω la velocità angolare del sistema nell'istante in cui l'asta transita dalla posizione verticale.

$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}(I_A + I_D)\omega^2 = mg\,L/2$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} L^{\cancel{2}} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right) \omega^2 = \cancel{m} g \cancel{L}/\cancel{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{24g}{11L}}$$

Es. 3

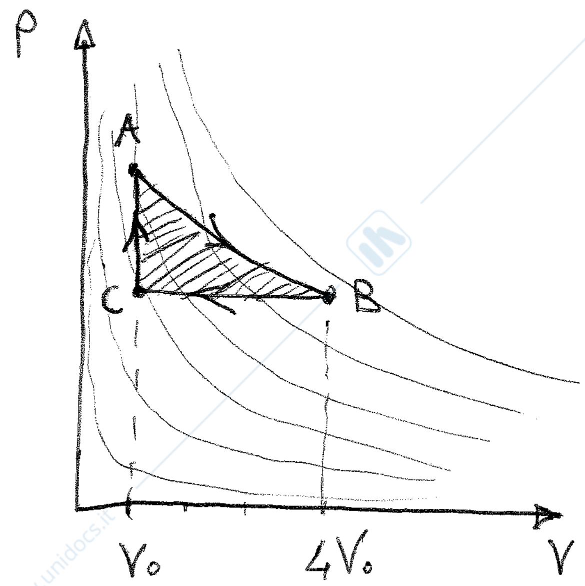
Esprimiamo la legge della trasformazione nel piano di Clapeyron:

$T = a V^{1/2}$

Equazione di stato $pV = nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR}$

$$\frac{pV}{nR} = a V^{1/2}$$

$$p = anR\,V^{-1/2}$$



Il lavoro nel ciclo ABCD corrisponde all'area tratteggiata compresa all'interno del ciclo stesso. Tale lavoro sarà pari a $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{AB} + \mathcal{L}_{BC}$, essendo $\mathcal{L}_{CA} = 0$ (trasformazione isocora reversibile $C \rightarrow A$)

$$\mathcal{L}_{AB} = \int_{V_0}^{4V_0} anR\,V^{-1/2}\,dV = anR\,2\left[V^{1/2}\right]_{V_0}^{4V_0} =$$

$$= 2anR\sqrt{V_0}.$$

$$\mathcal{L}_{BC} = p_B (V_C - V_B) = p_B(-3V_0)$$

$$p_B = anR\, V_B^{-1/2} = anR\,(4V_0)^{-1/2} = \frac{anR}{2\sqrt{V_0}}$$

$$\mathcal{L}_{BC} = -\frac{3}{2} anR\sqrt{V_0}$$

Il lavoro del ciclo risulta quindi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} anR\sqrt{V_0}.$$

Es. 4

Si vedano appunti di lezione, pagine 156 e 160.